Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag

EKSAMEN

Emnekode:	**MA 1410**
Emnenavn:	**Analyse**
Dato:	9. desember 1999
Varighet:	09.00 - 15.00
Antall sider inklusivt forside:	2
Tillatte hjelpemidler:	Alle, også alfanumerisk kalkulator.
Merknader:	Nynorskteksten er identisk med originalteksten med hensyn til setningsbygging og ordvalg med disse unntakene: løsning = løysing løs = løys benytte = nytte beregn = rekn ut bestem =

OPPGAVE 1.

Definer funksjonen $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{for } x \neq 0 \\ 1, & \text{for } x = 0 \end{cases}$.

(a) Beregn $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.
Beregn $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x}$.

Forslag til løsning:

Begge grensene blir beregnet ved bruk av L'Hôpitals regel. Den første:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \frac{"0"}{0}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \frac{"0"}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0.$$

Før vi starter på den andre grenseberegningen, må vi derivere $f(x)$ utenfor origo. Vi får $f'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$, som innsatt gir:

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3} = \frac{"0"}{0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{3x} = \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

OPPGAVE 2.

(a) Beregn konvergensradius til potensrekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{n(n-1)} x^{2n}.$$

Konvergerer rekka når $x = \pm 1$?

(b) For hvilke $x > 0$ konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$?

Forslag til løsning:
La oss skrive $a_n = (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)}{n(n-1)} x^{2n}$. Forholdskriteriet gir oss

$$\mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = \mid \frac{(2n+1)}{(n+1)n} x^{2n+2} \cdot \frac{n(n-1)}{(2n-1)x^{2n}} \mid = \frac{(2n+1)}{(2n-1)} \frac{(n-1)}{(n+1)} x^2 \underset{n\to\infty}{\rightarrow} x^2.$$

Vi har konvergensradius R gitt ved $R^2 = 1$, dvs. $R = 1$. For $x = \pm 1$ får vi alternerende rekker (NB! summasjonen skal starte på $n = 2$)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)}{n(n-1)}.$$

Det n-te leddet går mot 0 når n går mot ∞, så det er nok å sjekke monotonitet. Litt regning viser at $\frac{(2n+1)}{n(n+1)} < \frac{(2n-1)}{n(n-1)}$ er ekvivalent med $0 < 2n$, som er sant. Dermed har vi vist at rekka er konvergent i $x = \pm 1$.
(b) La $b_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$. Først ser vi på tilfellet $x = 1$. Da er $b_n = 1/2$ og $b_n \not\to 0$, så vi har divergens.

La så $0 < x < 1$. Da får vi $b_n < \frac{x^n}{1+0}$. Siden $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konvergerer, må $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergere.

La så $x > 1$. Vi har at $b_n = \frac{(1/x)^n}{1+(1/x)^{2n}}$, dvs. b_n har samme verdi i x og i $1/x$. Da vi har konvergens for $0 < x < 1$, følger det at vi må ha konvergens for $x > 1$.

OPPGAVE 3.

(a) La $p(x)$ og $q(x)$ være to polynom og la a være et reelt tall. Vis at hvis $p(a) = q(a) = 0$ og $L = \lim_{x\to a} \frac{-p'(x)q^2(x)}{p(x)q'(x)}$ eksisterer, så er $\lim_{x\to a} q(x) \ln |p(x)| = L$.

(b) Beregn $\lim_{x\to -1^+} (1-x^2)\ln(1-x^2)$. (Du kan bruke (a) hvis du ønsker.)

Forslag til løsning:
Vi har gitt polynomer $p(x)$ og $q(x)$ slik at $p(a) = 0 = q(a)$. Vi skriver om uttrykket vi skal beregne grensen av slik at vi kan bruke L'Hôpitals regel.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} q(x)\ln|p(x)| &= \lim_{x\to a}\frac{\ln|p(x)|}{(1/q(x))} = \frac{"\infty"}{\infty} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{(\frac{p'(x)}{p(x)})}{(\frac{-q'(x)}{q^2(x)})} = \lim_{x\to a}\frac{-p'(x)q^2(x)}{q'(x)p(x)} = L\end{aligned}$$

(b) Vi velger $p(x) = q(x) = 1-x^2$ og $a = -1$. Ved eventuelt å sette absoluttverditegn på $p(x)$, ser vi at vi kan bruke resultatet fra (a). Dermed får vi

$$\lim_{x\to -1^+}(1-x^2)\ln(1-x^2) = \lim_{x\to -1^+}\frac{-(1-x^2)'(1-x^2)^2}{(1-x^2)'(1-x^2)} = \lim_{x\to -1^+} -(1-x^2) = 0.$$

OPPGAVE 4.

(a) Løs differensiallikninga $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \arctan(x)$.

(b) Beregn integralet $\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$.

(c) La $f(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$. Vis at $f'(x) = 0$ har nøyaktig en løsning når $x > 0$. Bruk Newtons metode til å finne en tilnærmet løsning av $f'(x) = 0$ når $x > 0$. (Du kan velge $x_0 = 0.8$. Det er nok å foreta 2 iterasjoner.)

Forslag til løsning:
(a) Vi har gitt en lineær 1. ordens likning $y' + P(x)y = Q(x)$, der $P(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$ og $Q(x) = \arctan(x)$. Først regner vi ut (merk at $2x = (1+x^2)'$ slik at substitusjonen $u = 1+x^2$ fungerer)

$$v(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{du}{u}} = e^{-\ln(u)} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Deretter skal vi regne ut (merk at vi kan bruke substitusjonen $u = \arctan(x)$ slik at $du = \frac{dx}{1+x^2}$)

$$\int v(x)Q(x)\,dx = \int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\arctan^2(x) + C.$$

Da får vi løsningen

$$y(x) = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx = (1+x^2)(C + \frac{1}{2}\arctan^2(x)).$$

(b) Samme substitusjon som i (a), $u = \arctan(x)$, gir

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\arctan^2(x)\,|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\arctan^2(b) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

(c) Vi har gitt funksjon $f(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$. Derivasjon gir

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot\frac{1}{(1+x^2)} - 2x\cdot\arctan(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}.$$

Vi ser at $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{1}{2x}$. (Tips: Tegn grafene til $\frac{1}{2x}$ og $\arctan(x)$.) Vi skal bare se på hva som skjer i intervallet $(0, \infty)$, og der er $\arctan(x)$ strengt voksende og $\frac{1}{2x}$ strengt avtagende. Derfor har likninga $f'(x) = 0$ høyst en løsning. Siden $\frac{1}{2x} > \arctan(x)$ når x er nær 0, og $\frac{1}{2x} < \arctan(x)$ når x blir stor, så finnes minst en løsning.

Vi skal bruke Newtons metode for å finne tilnærmet verdi av løsningen til $f'(x) = 0$, dvs. vi skal finne tilnærmet verdi av løsningen til $1 - 2x\arctan(x) = 0$. Sett $h(x) = 1 - 2x\arctan(x)$ og $g(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}$. Vi er bedt om å sette $x_0 = 0.8$ og regne ut $x_1 = g(x_0)$ og $x_2 = g(x_1)$. $h'(x) = -2\arctan(x) - \frac{2x}{1+x^2}$. Ved å taste inn tallene i lommekalkulatoren, har jeg fått $x_1 = 0.765771$ og $x_2 = 0.765379$.

OPPGAVE 5.

Vi har gitt en funksjon $g(x) = 1 - x^2$ over intervallet $[-1, 1]$.

(a) Beregn volumet V av omdreiningslegemet som framkommer når grafen til g roteres om x-aksen, $V = \pi\int_{-1}^{1} g^2(x)\,dx$.

(b) Overflatearealet av omdreiningslegemet er gitt ved $S = 2\pi\int_{-1}^{1} g(x)\sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx$. Beregn dette integralet numerisk ved bruk av Simpsons formel når antallet delintervaller er $n = 4$.

Forslag til løsning:

(a) Vi setter inn i formelen som er oppgitt og integrerer.

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx \\ &= \pi\int_{-1}^{1}(1-2x^2+x^4)\,dx \\ &= \pi(x - 2x^3/3 + x^5/5)|_{-1}^{1} \\ &= 2\pi(1 - 2/3 + 1/5) = 16\pi/15. \end{aligned}$$

(b) Når vi setter inn for $g(x) = 1 - x^2$ får vi

$$S = 2\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Vi skal bruke $n = 4$. Da blir $h = 2/4 = 1/2$, og $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$ og $x_4 = 1$. Tilsvarende y-verdier blir (husk at vi skal sette x_i inn i $2\pi(1-x^2)\sqrt{1+4x^2}$ for å få y_i): $y_0 = y_4 = 0$, $y_1 = y_3 = 2\pi\frac{3\sqrt{2}}{4}$ og $y_2 = 2\pi$. Simpsons formel for tilnærmet verdi av integralet gir

$$S \approx \frac{1}{2\cdot 3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = \pi(2\sqrt{2} + 2/3).$$

Vi får $S \approx 10,98$, mens nøyaktig svar er $\frac{\pi}{16}(14\sqrt{2} + 17\ln(2+\sqrt{5})) \approx 10,9655$.

OPPGAVE 6.

(a) Gitt en funksjon $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.
Finn de eller det kritiske punkt til $f(x,y)$ og finn typen (lokale maksimums- eller minimumspunkt eller sadelpunkt) til de eller det kritiske punkt.

(b) Finn ekstremverdiene til $f(x,y)$ langs linja $g(x,y) = 6x + 3y - 50 = 0$ ved bruk av Lagranges metode.

(c) Finn tangentlinja til nivåkurven til $f(x,y)$ gjennom punktet $(13/3, 8)$.

Forslag til løsning:
(a) Vi har gitt $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$. Partiell derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y,$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x - 7.$$

Vi setter begge de partielle deriverte lik 0 og får 2 likninger med 2 ukjente

$$\begin{aligned} 4x - \ \ y &= 0 \\ -x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

Likningssystemet har løsning $x = 1$ og $y = 4$. Så vi får et kritisk/stasjonært punkt $(1,4)$. Funksjonsverdien er $f(1,4) = -14$. De annen-ordens partielle deriverte er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1,$$

slik at

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 = 8 - 1 = 7 > 0.$$

Annen-derivert testen forteller oss at $(1,4)$ er et lokalt minimumspunkt. (Det er egentlig absolutt minimum.)
(b) Vi har gitt $f(x,y)$ som ovenfor, og dessuten en bibetingelse $g(x,y) = 6x + 3y - 50 = 0$. $g(x,y) = 0$ beskriver en rett linje. Gradientene til f og g er

$$\nabla f(x,y) = (4x - y)\vec{i} + (2y - x - y)\vec{j},$$

og

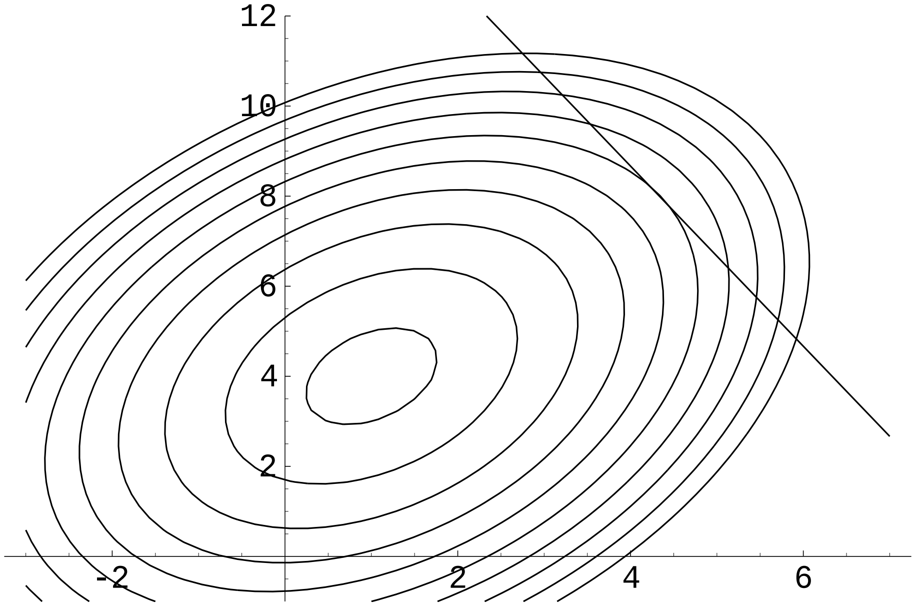
$$\nabla g(x,y) = 6\vec{i} + 3\vec{j}.$$

Vi skal bruke Lagranges metode og starter med likninga $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, dvs. $4x - y = 6\lambda$ og $2y - x - 7 = 3\lambda$. Vi multipliserer siste likning med 2 og setter likningene lik hverandre. Da får vi $6\lambda = 4x - y = 4y - 2x - 14$. Herav følger at $6x = 5y - 14$. Vi setter dette inn i $g(x,y) = 0$, og får $0 = (5y - 14) + 3y - 50$. Da blir $y = 8$, som igjen innsatt i $g(x,8) = 0$ gir $x = 13/3$. Lagranges metode gir ett punkt, som kan være lokalt eller absolutt minimum eller maksimum. (Ved å la $x \to \infty$, kan vi se at punktet $(13/3, 8)$ er et absolutt/globalt minimum.)

(c) $\nabla f(x,y)$ er normal til (står vinkelrett på) tangentlinja til $g(x,y) = 0$. Men $g(x,y) = 0$ er en rett linje, og er dermed sin egen tangentlinje. Derfor er tangenten til nivåkurven til $f(x,y) = f(13/3, 8) = 80/9$ lik linja $g(x,y) = 6x + 3y - 50 = 0$.

Alternativt, har vi tangentlinja gitt ved $\nabla f(13/3, 8) \cdot (x - 13/3, y - 8) = 0$, dvs. $(28/3, 14/3) \cdot (x - 13/3, y - 8) = 0$. Litt regning gir $6x + 3y - 50 = 0$.

La oss se på noen nivåkurver og linja gitt ved $g(x,y) = 0$.



Erik Bedos

Åsvald Lima