Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag

MA1410: Analyse - Notat om differensiallikninger

Dato: Høsten 2000
Merknader: Dette notatet kommer i tillegg til § 4.2 og § 6.11 i læreboka.

Ma 1410: Analyse skal inneholde et grunnlag i differensiallikninger. Læreboka, Thomas and Finney, har i de siste utgavene tatt bort et kapittel om differensiallikninger. Dette notatet tar opp noen av de typene differensiallikninger som tidligere var inneholdt i læreboka. Ofte brukes t som variabel i stedet for x. Da må x-ene i formlene erstattes med t-er. I heftet med eksamensoppgaver finnes det mange oppgaver der differensiallikninger skal løses.

1. ordens differensiallikninger.

Dette er likninger av formen $F(x, y, y') = 0$. Her er x den variable og $y = y(x)$ er en funksjon vi skal finne et uttrykk for. Ofte vil vi få som løsning en likning der x og y inngår, slik at y blir gitt implisitt.

Hvis vi i tillegg til en likning $F(x, y, y') = 0$ har gitt at $y_0 = y(x_0)$, så sier vi at vi har gitt et **startverdi problem**. Når vi løser likninga, vil det dukke opp en konstant C (den kommer fra integrasjonen) og ved å velge en rett verdi for C, får vi oppfylt startverdien $y_0 = y(x_0)$.

Vi kan tegne grafene til funksjonene $y(x)$. Disse grafene kalles for **integralkurver**. Siden det inngår en konstant i løsningen, finnes det uendelig mange slike integralkurver. Å tegne slike integralkurver inngår i obligatorisk PC-øvelse nr. 2.

Likninger av formen $y' = f(x)$.
Disse likningene løses ved integrasjon og er omtalt i § 4.2. Løsningene er gitt ved formelen $y(x) = \int f(x)\,dx + C$.

Separable likninger $y' = f(x)g(y)$.
Disse likningene er omtalt i § 6.11. Vi finner løsningene ved å integrere begge sider av $\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C$.

Eksempel. Gitt likning $y' = \frac{x^2}{1-y^2}$. Her er $f(x) = x^2$ og $g(y) = \frac{1}{1-y^2}$. Vi flytter alle y-ene over på venstre side og alle x-ene over på høyre side, $(1 - y^2)y' = x^2$. Nå integrerer vi med hensyn på x, og bruker på venstre side at $dy = y'\,dx$. Da får vi

$$\int (1 - y^2)\,dy = \int x^2\,dx,$$

slik at

$$y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C.$$

Denne løsningen kan vi skrive som $y^3 - 3y + x^3 + 3C = 0$.

Lineære 1. ordens likninger $y' + P(x)y = Q(x)$.
Også disse likningene er omtalt i § 6.11. Vi løser disse ved først å regne ut $v(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ ($v(x)$ kalles en **integrerende faktor**), og deretter setter vi

$$y(x) = \frac{1}{v(x)}(\int v(x)Q(x)\,dx + C).$$

Eksempel. Vi har gitt

$$y' - \frac{3}{x}y = x.$$

Her er $P(x) = \frac{-3}{x}$ og vi får $v(x) = e^{\int \frac{-3}{x}\,dx} = e^{-3\ln(x)} = \frac{1}{x^3}$. Dermed får vi

$$y(x) = x^3(\int \frac{1}{x^3}x\,dx + C) = x^3(\int \frac{1}{x^2}\,dx + C) = x^3(-\frac{1}{x} + C),$$

slik at

$$y(x) = -x^2 + Cx^3.$$

Anta vi har gitt startverdi $y(1) = 0$. Når vi setter inn $x = 1$ og $y = 0$ i løsningen, får vi $0 = -1 + C$. Løsningen på startverdi problemet blir $y(x) = -x^2 + x^3$.

Homogene likninger $y' = F(\frac{y}{x})$.
Vi løser homogene likninger ved å innføre ny ukjent funksjon $v = \frac{y}{x}$. Da får vi $y = xv$. Vi setter dette inn i $y' = F(\frac{y}{x})$, og får $v + xv' = F(v)$. Vi flytter v over på høyre side, og ser at likninga nå er separabel $xv' = F(v) - v$. Vi kan nå løse likninga som en separabel likning, $\int \frac{1}{F(v)-v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx + C$. I svaret erstatter vi så v med $\frac{y}{x}$.

Eksempel. Vi har gitt

$$(x^2 + y^2) + 2xyy' = 0.$$

Ved å dividere med x^2 får vi $(1 + (\frac{y}{x})^2) + 2(\frac{y}{x})y' = 0$. Nå kan vi skrive likninga som $y' = -\frac{1+(y/x)^2}{2(y/x)}$. Vi innfører $v = y/x$ og bruker $F(v) = -\frac{1+v^2}{2v}$. Da blir $F(v) - v = -\frac{1+3v^2}{2v}$. Vi "separerer" x-ene og v-ene til hver sin side av likhetstegnet, og får

$$\frac{2v}{1+3v^2}v' = \frac{-1}{x}.$$

Ved integrasjon får vi

$$\frac{1}{3}\ln(1 + 3v^2) = -\ln(x) + C.$$

Vi multipliserer med 3, eksponensierer og får

$$1 + 3v^2 = \frac{C_1}{x^3},$$

der $C_1 = \pm e^{3C}$. Vi multipliserer med x^3, og bytter ut v med $\frac{y}{x}$. Da får vi løsningen (på implisitt form)

$$x(x^2 + 3y^2) = C_1.$$

Eksakte likninger $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$.
Anta vi har gitt en differensierbar funksjon $F(x,y)$. Hvis vi har gitt at $F(x,y) = C$ og at $y = y(x)$, så vil Theorem 5 i § 12.5 gi at

$$\frac{\partial F}{\partial x}1 + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0.$$

Ved Euler's teorem, følger det at $\frac{\partial^2 F}{\partial xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial yx}$.

Anta nå at vi har gitt en likning $M(x,y)+N(x,y)y' = 0$. Kan vi finne en funksjon $F(x,y)$ slik at $M(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ og $N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$? Svaret er ja hvis likninga er **eksakt**, noe som betyr at $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$. (At en likning er eksakt er det samme som at $M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ er en gradient.) Noen likninger er i utgangspunktet ikke eksakte, men kan multipliseres med en passende funksjon, kalt integrerende faktor, slik at de blir eksakte. Vi skal ikke gå inn på hvordan vi finner integrerende faktor, men bare se på likninger som er eksakte. Hvordan vi løser eksakte likninger vises i eksemplet nedenfor.

Eksempel. Vi har gitt en likning $2x + y^2 + 2xyy' = 0$. Her er $M(x,y) = 2x + y^2$ og $N(x,y) = 2xy$. (Det som står sammen med y' er N, og resten er M.) Vi sjekker først eksakthet: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y$ og $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y$, så $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Vi finner $F(x,y)$ ved integrasjon.

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (2x + y^2)\,dx = x^2 + xy^2 + C_2(y),$$

der $C_2(y)$ er en konstant (kan avhenge av y men ikke av x).

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy = \int (2xy)\,dy = xy^2 + C_1(x),$$

der $C_1(x)$ er konstant (kan avhenge av x men ikke av y). Vi ser at $F(x,y) = x^2 + xy^2 = C$ løser likninga.

Oppgave.
Er likninga $x^2 + y^2 + 2xyy' = 0$ eksakt? Hvis ja, løs likninga.

Bernoulli's likning $y' + P(x)y = Q(x)y^n$.
Differensiallikninger på formen

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

kalles Bernoulli likninger etter Jakob Bernoulli som først studerte disse likningene. Hvis $n = 0$ eller $n = 1$, så er dette en lineær likning, og vi løser den med metoden beskrevet ovenfor. Hvis $n \neq 0, 1$, så setter vi $v = y^{1-n}$. Da blir likninga redusert til en lineær likning i v. Ved derivasjon får vi $v' = y^{-n}y'$ slik at $y' = y^n v'$. Vi setter inn $y^n v'$ for y' i den gitte likninga, dividerer med y^n og får

$$v' + P(x)v = Q(x).$$

Oppgave.
I populasjonsdynamikk studeres modellen $y' = ry - ky^2$ der $r > 0$ og $k > 0$. Løs denne likninga.

2. ordens differensiallikninger.

Dette er likninger av formen $F(x, y, y', y'') = 0$. Vi ser at den annenderiverte til den ukjente funksjonen $y = y(x)$ inngår i den gitte formelen. Vi har et startverdiproblem når vi har gitt $y(x_0) = y_0$ og $y'(x_0) = y'_0$.

Likninger uten y, $F(x, y', y'') = 0$.
Vi innfører ny ukjent funksjon $p = y'$ og får $y'' = p'$ og $F(x, p, p') = 0$. Vi sier at vi har redusert orden til likninga, siden vi nå har en 1. ordens likning. Likninga løses deretter med en av metodene omtalt ovenfor. Når vi har funnet $p(x)$, regner vi ut $y(x) = \int p(x)\,dx$.

Oppgave.
Løs likninga $xy'' + y' = 0$.

Likninger uten x, $F(y, y', y'') = 0$.
Også nå innfører vi ny ukjent funksjon $p = y'$. Vi får $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. Nå kan vi skrive likninga $F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$. Likninga har blitt en 1. ordens likning der y spiller rollen som den variabel og p spiller rollen som den ukjente funksjonen.

Eksempel. Gitt en likning

$$y'' + y = 0.$$

Vi setter $\frac{dy}{dx} = p$ og $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}p$. Da får vi omskrevet likning

$$p\frac{dp}{dy} + y = 0.$$

Vi integrerer med hensyn på y, og får (etter substitusjon $dp = \frac{dp}{dy}dy$),

$$\int p\,dp + \int y\,dy = C.$$

Vi får $p^2 + y^2 = 2C$, slik at $p = \frac{dy}{dx} = y' = \pm\sqrt{2C - y^2}$. Dette er en separabel likning $\int \frac{1}{\sqrt{2C-y^2}}\,dy = \pm\int dx + C_1$. Vi får $\arcsin(\frac{y}{\sqrt{2C}}) = \pm(x + C_1)$, og vi kan skrive løsningen

$$y = \sqrt{2C}\sin(x + C_1).$$

Merk at siden vi har foretatt 2 integrasjoner, har vi to konstanter i svaret.

Homogene lineære 2. ordens likninger med konstante koeffisienter $y'' + ay' + by = 0$.
Noen av de mest interessante differensiallikningene er på formen $y'' + r(x)y' + p(x)y = q(x)$. Dette er lineære 2. ordens differensiallikninger. Vi skal bare se på de enkleste av disse likningene.

Når vi skal løse 2. ordens lineære likninger med konstante koeffisienter, starter vi med å teste om $y(x) = e^{rx}$ er en løsning av likninga. Hvis vi deriverer denne funksjonen to ganger og setter inn i likninga, får vi $y'(x) = re^{rx}$ og $y''(x) = r^2e^{rx}$. Innsetting i likninga viser at e^{rx} blir felles faktor $e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$. Vi forkorter e^{rx} siden denne alltid er $\neq 0$. Da står vi igjen med at $y(x) = e^{rx}$ passer i likninga hvis og bare hvis $r^2 + ar + b = 0$. Vi løser denne annen-grads likninga og får 2, 1 eller 0 løsninger.

Hvis $r^2 + ar + b = 0$ har 2 ulike løsninger r_1 og r_2, får vi at likninga har både e^{r_1x} og e^{r_2x} som løsninger. I MA 2460 vises det at fullstendig løsning av likninga er på formen $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ der c_1 og c_2 er konstanter.

Eksempel. Vi har gitt $y'' + y' - 2y = 0$.
Her er $a = 1$ og $b = -2$ og likninga $r^2 + r - 2 = 0$ har løsningene $r_1 = 1$ og $r_2 = -2$. Løsningene av likninga blir $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}$.

Tilfellet når likninga $r^2+ar+b = 0$ har bare 1 løsning r (egentlig har likninga 2 like løsninger). Da er $y(x) = e^{rx}$ en løsning. Det finnes en metode som kalles **reduksjon av orden** (inngår i MA2460). Bruker vi denne, vil vi finne at $xy(x) = xe^{rx}$ også er en løsning av likninga. Vi kan nøye oss med å kontrollere at $u(x) = xe^{rx}$ er en løsning. Vi vet at $r^2+ar+b = 0$ og $r = -a/2$. Derivasjon og innsetting gir $u'(x) = (rx+1)e^{rx}$ og $u''(x) = (r^2x + 2r)e^{rx}$ slik at $u'' + au' + b = e^{rx}(x(r^2 + ar + b) + (2r + a)) = 0$. Fullstendig løsning av likninga i dette tilfellet blir

$$y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}.$$

Eksempel. Vi har gitt $y'' + 4y' + 4 = 0$. Likninga $r^2 + 4r + 4 = 0$ har en løsning, $r = -2$. Løsningene blir $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$.

Det gjenstår tilfellet når likninga $r^2+ar+b = 0$ ikke har reelle løsninger. Egentlig har likninga løsninger, men begge løsningene er komplekse tall. I MA2460 (og muligens i MA1420) regner en ut løsningene i slike likninger. Realdelen til løsningene er $-a/2$ og imaginærdelen er $\sqrt{4b - a^2}/2$. Vi kan nå vise at løsningene av likninga i dette tilfellet blir

$$y(x) = e^{-a/2}(c_1 \sin(\sqrt{4b - a^2}/2) + c_2 \cos(\sqrt{4b - a^2}/2)).$$

Eksempel. Gitt likning

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Vi får $-a/2 = -1$ og $\sqrt{4b - a^2}/2 = \sqrt{8 - 4}/2 = 1$. Da blir løsningene

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \sin(x) + c_2 cos(x)).$$

Oppgave.
Løs likninga $y'' + y = 0$.

Inhomogene lineære 2. ordens likninger med konstante koeffisienter $y'' + ay' + by = F(x)$.
Det finnes mange teknikker for å løse likninger med $F(x) \neq 0$. Vi skal bare se på en teknikk kalt **ubestemte koeffisienters metode**. Vi kan demonstrere metoden på likninga

$$y'' + ay' + by = 2\sin(x).$$

Vi gjetter på en løsning på formen

$$y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x).$$

Vi deriverer denne likninga to ganger og setter inn i den gitte likninga. Vi får

$$y_p'(x) = A\cos(x) - B\sin(x),$$

og

$$y_p''(x) = -A\sin(x) - B\cos(x),$$

som innsatt gir

$$-A\sin(x) - B\cos(x) + aA\cos(x) - aB\sin(x) + bA\sin(x) + bB\cos(x) = 2\sin(x).$$

Vi samler $\sin(x)$-delene og $\cos(x)$-delene og får to likninger

$$\begin{aligned} -A - aB + bB &= 2, \\ -B + aA + bB &= 0. \end{aligned}$$

Vi løser disse likningene med hensyn på A og B. La $y_h(x)$ betegne den homogene løsningen, dvs. løsningen av likninga i det tilfellet at vi har 0 på høyre side der $F(x)$ står. Da er fullstendig løsning gitt ved $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Eksempel. Gitt likning $y'' - y' = 2\sin(x)$. Her er $a = -1$ og $b = 0$. Likningene blir $-A + B = 2$ og $-B - A = 0$. Løsningene er $A = -1$ og $B = 1$ og vi får $y_p(x) = (\cos(x) - \sin(x))$. Løsningen av den homogene likninga $y'' - y' = 0$ er

$$y_h(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{0x} = c_2 + c_1e^{-x}$$

siden $r^2 - r = 0$ har løsningene $r_1 = 1$ og $r_2 = 0$. Fullstendig løsning blir

$$y(x) = c_2 + c_1e^{-x} + (\cos(x) - \sin(x)).$$

Et interessant tilfelle oppstår nåe likninga $r^2 + ar + b = 0$ har komplekse røtter. La oss se hva som skjer når høyreside $F(x)$ er en sinus med periode nær $\sqrt{4b - a^2}/2$.

Eksempel. Gitt $y'' + 25y = 16\cos(3x)$. Først løser vi den homogene likninga. $r^2 + 25 = 0$ har komplekse røtter $r = \pm 5\sqrt{-1}$. Homogene løsninger er $y_h(x) = c_1\sin(5x) + c_2\cos(5x)$. Vi ser etter inhomogen (partikulær) løsning $y_p(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$. To gangers derivasjon og innsetting gir $A = 0$ og $B = 1$. Vi får $y_p(x) = \cos(3x)$, og

$$y(x) = c_1\sin(5x) + c_2\cos(5x) + \cos(3x).$$

Hvis vi i tillegg bruker startverdier $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$, så får vi $c_1 = 0$ og $c_2 = -1$. Løsningen får formen $y(x) = -\cos(5x) + \cos(3x) = \cos(4x - x) - \cos(4x + x)$ som kan skrives som $y(x) = 2\sin(4x)\sin(x)$. Grafen viser at vi har fått en periodisk svingning der amplituden varierer, dette kalles beats. I elektronikk brukes dette mye og det kalles amplityde modulering.

Oppgave.
(a) Løs likninga $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$.
(Hint: Prøv med $y_p(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$.)
(b) Løs likninga $y'' - 3y' - 4y = 4x^2 - 1$.
(Hint: Prøv med $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$.)