Høgskolen i Agder

Avdeling for realfag

Eksamensoppgaver i MA1410: Analyse

Dato: Høsten 2000

Merknader: **Oppgaver i MA1410: Analyse tidligere gitt i MAT 5.**
Noen punkter i oppgavene er utenfor pensum i MA 1410, og er ikke tatt med her.
kritisk punkt = stasjonært punkt

OPPGAVE 17.08.1988: 2.

La $f(x,y) = \frac{x}{x^2+2y^2+3}$.

(1) Finn $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(2) Finn største og minste verdi til f når $x \geq 0$ og $x^2 + 2y^2 \leq 4$.

OPPGAVE 26.05.1990: 1.

Gitt $f(x,y) = \sqrt{xy + 2x - 2y}$.

(a) Bestem definisjonsområdet til $f(x,y)$ og lag en skisse av det.
Finn de stasjonære (kritiske) punktene til $f(x,y)$ og funksjonsverdiene i disse punktene.

(b) Avgjør typen til de stasjonære punktene.

(c) Bruk Lagranges metode til å vise at

$$\text{minimum av} \quad g(x,y) = (x-1)^2 + y^2$$

$$\text{når} \quad h(x,y) = xy + 2x - 2y = 0$$

har løsninger som ligger på snittet av hyperblene

$$(y+1)^2 - (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{3}{4} \quad \text{og} \quad y = \frac{2x}{2-x}.$$

Tegn grafene til disse hyperblene og angi tilnærmete verdier for skjæringspunktene.

OPPGAVE 07.05.1991: 2.

La $f(x,y) = (x-1)(y-1)(4-x-y)$.

(a) Finn nivåkurvene $f(x,y) = 0$, og angi i et xy-diagram hvor $f(x,y) > 0$ og hvor $f(x,y) < 0$.

(b) Bestem stasjonære punkter for $f(x,y)$, og avgjør deres type.

(c) Bestem største verdi av $f(x,y)$ i det området av 1. kvadrant der $x + y \leq 4$.

(d) (Ikke aktuell i MA 1410.)

OPPGAVE 15.08.1991: 2.

La $f(x,y) = x + y^2$.

(a) Bruk Lagranges metode til å finne største og minste verdi av $f(x,y)$ når $4x^2 + y^2 = 4$.

(b) Skisser nivåkurver for f, og forklar grafisk maks/min-problemet fra punkt a).

OPPGAVE 15.08.1991: 5.

Gitt funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+xy^2}{x^2-y^2} & \text{når } y^2 \neq x^2 \\ 0 & \text{når } x^2 = y^2 \end{cases}$$

(a) Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Avgjør om f er kontinuerlig i $(0,0)$.

OPPGAVE 08.05.1992: 2.

Finn maksimum av $f(x,y) = x^2y^3$ når $x^2 + 2y^2 = 10$ ved å bruke Lagranges metode.

OPPGAVE 08.05.1992: 3.

$f(x,y) = 3ye^x - y^3 - e^{3x}$.

(a) Vis at f har ett og bare ett stasjonært punkt og klassifiser dette.

(b) Punktet $P = (0,2,-3)$ ligger på flaten $z = f(x,y)$.

En kule holdes i ro i P. Den slippes og begynner å trille. Hvilken retning triller den i startøyeblikket? (xy-planet er vannrett.)

OPPGAVE 14.08.1992: 2.

$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.

(a) Beregn de partielle deriverte av 1. orden.

Finn den retningsderiverte i retningen $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ i punktet $(1,1)$.

(b) Finn maksimum til $f(x,y)$ når $x^2 + y^2 \leq 9$.

Har $f(x,y)$ globalt maksimum på $\mathbb{R}^2$?

(c) (Ikke aktuell i MA1410.)

OPPGAVE 22.05.1993: 2.

La $f(x,y) = x^2 - 2x^2y + y^2$.

(a) Bruk Lagranges metode til å maksimere, minimere $f(x,y)$ når $x^2 + y^2 = k^2$.

(b) Vis at ∇f i punktet $(\frac{k\sqrt{6}}{3}, \frac{k\sqrt{6}}{3})$ er parallell med linjen $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

Finn en vektor i planet som står ortogonalt på f's nivåkurve gjennom dette punktet.

OPPGAVE 09.08.1993: 4.

La $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$.

(a) Finn nivåkurvene $f(x,y) = 0$ og angi i et diagram hvor $f(x,y) > 0$ og hvor $f(x,y) < 0$.

(b) Finn de partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Punktet $(0,0)$ er et kritisk punkt (stasjonært punkt) til $f(x,y)$.

Klassifiser dette punktet.

(c) La k være et reelt tall > 0.

Finn største og minste verdi til $f(x,y)$ under bibetingelsen $x^2 + y^2 = k^2$.

OPPGAVE 04.05.1994: 2.

La $f(x,y) = (x^2 + 4y^2 - 4)(1 - x^2 - y^2)$.

(a) Finn nivåkurvene $f(x,y) = 0$.

Hva slags kurver blir dette?

Angi i et diagram hvor $f(x,y) > 0$ og hvor $f(x,y) < 0$.

(b) Bestem de stasjonære (kritiske) punktene til $f(x,y)$ og klassifiser dem.

(c) $f(x,y)$ antar en absolutt maksimumsverdi og en absolutt minimumsverdi når $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

Bestem disse verdiene.

OPPGAVE 20.05.1995: 2.

$f(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

(a) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y)$.

Klassifiser det stasjonære punktet $(0, 0)$.

(b) Finn den minste verdien $f(x, y)$ kan ha når $x^2 + y^2 \leq 1$.

(c) (Ikke aktuell for Ma 1410.)

OPPGAVE 16.05.1995: 3.

Finn de stasjonære punktene til $f(x, y) = xy(1 - x^2 - 2y^2)$.

OPPGAVE 10.05.1996: 2.

$f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$.

(a) Regn ut de partielle deriverte av 1. og 2. orden og finn de stasjonære punktene.

(b) Karakteriser de stasjonære punktene $(1, 1)$ og $(0, 0)$.