

# EKSAMEN

**Emnekode:** MA 110  
**Emnenavn:** Innføringskurs i analyse

Dato: 22. februar 2000  
Varighet: 09.00 - 14.00

Antall sider inklusivt 2  
forside:

Tillatte hjelpemidler: Alle

Merknader: Nynorskteksten er identisk med originalteksten med hensyn til setningsbygging og ordvalg med disse unntakene:

løs = løys  
beregner = rekn ut  
begrunn = grunngi

---

## OPPGAVE 1.

(a) Løs differensiallikninga

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{2}{2-x}$$

over intervallet  $(0, 2)$ .

(b) Bestem definisjonsområdet til funksjonen  $f(x) = 2x \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$ .

Vis at

$$\int 2x \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) dx = (4-x^2) \ln(2-x) + x^2 \ln(x) + 2x + C$$

ved integrasjon.

(c) Beregn grensen

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (4-x^2) \ln(2-x)$$

og det uekte integralet

$$\int_0^2 2x \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) dx.$$

## ØPPGAVE 2.

- (a) Avgjør om følgende rekker konvergerer eller divergerer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\pi^n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + n} - n^2).$$

- (b) Finn konvergensradien  $R$  til potensrekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n + \sqrt{n})}.$$

Avgjør om rekka konvergerer når  $x = \pm R$ .

- (c) Vis at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \frac{-1}{2}.$$

Begrunn at rekka

$$\sum_{k=3}^{\infty} \ln(\cos(\pi/k))$$

konvergerer.

## ØPPGAVE 3.

- (a) Gitt differensiallikninga

$$(1 + x^2)y' = x(1 + y^2)$$

og startverdi  $y(0) = 1$ . Løs likninga i et passende intervall rundt  $x = 0$ .

- (b) Begrunn at  $\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \arctan(x) + C$  over intervallet  $(-1, \infty)$  for en konstant  $C$ . Finn  $C$ .

## ØPPGAVE 4.

Vi har gitt funksjon  $f(x) = x + e^x$  på intervallet  $[0, 1]$ .

- (a) Beregn volumet  $V$  av omdreiningslegemet som framkommer når grafen til  $f$  roteres om  $x$ -aksen,  $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx$ .

## ØPPGAVE 5.

- (a) Vis at likninga  $(x + 1) \ln(x) = 1$  har nøyaktig en løsning. Finn tilnærmet verdi for denne løsningen ved Newtons metode. (Det er nok med 2 iterasjoner.)
- (b) La  $a > 1$ . Beregn integralet  $\int_0^{\infty} \frac{a^x}{(1+a^x)^2} dx$ .