Numeriske beregninger i Ma 1410: Analyse

I Ma 1410 inngår noen få metoder for numerisk beregning. Det er Newtons metode for å løse likninger og Trapes-metoden og Simpsons formel for integrasjon.

Newtons metode

Vi har gitt beskrivelse av denne metoden i obligatorisk oppgave 1. Programmer er:

```
Newton(f, x0, c, n) := | x ← x0
                       | for i ∈ 1..n
                       |   x ← x − (f(x) − c) / (d/dx f(x))
```

Alternativt kan vi velge antallet iterasjoner n, startverdi x0 og skrive ut verdien for hver iterasjon.

La $g(x) := x^{10} - 10$ og $h(x) := x - \dfrac{g(x)}{\frac{d}{dx}g(x)}$. La oss velge $j := 1..4$, og $x_0 := 1.5$. $x_j := h(x_{j-1})$. Da får vi liste med x0, x1, x2 osv.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.37601229 \\ 1.29495671 \\ 1.2631179 \\ 1.25898748 \end{pmatrix}$.

Bruker vi Newton( ) funksjonen på g(x), får vi ti-ende rot av 10 til å bli $\mathrm{Newton}(g, 1.5, 0, 4) = 1.25898748$.

Trapesmetoden

Vi skal beregne numerisk et bestemt integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Vi starter med å velge et naturlig tall n, regner ut h og funksjonsverdier som i formelen side 346 i boka.

Vi hjelp av programmerings mulighetene i Mathcad kan vi lage et funksjon som beregner integralet ved Trapesmetoden.

```
Trapes(f, a, b, m) := | h ← (b − a) / m
                      | sum ← (f(a) + f(b)) / 2
                      | for k ∈ 1..m − 1
                      |   sum ← sum + f(a + k·h)
                      | sum·h
```

Vi kan nå teste denne funksjonen. La $a := 0$, $b := \pi$, og $f(x) := \sqrt{1 + \cos(x)^2}$. Vi beregner lengden til grafen til sin(x) fra 0 til π. (Vi velger **Format-Result - Number of decimal places** 8 desimaler.)

$\mathrm{Trapes}(f, a, b, 8) = 3.82019772$. Hva får vi med større m? $\mathrm{Trapes}(f, a, b, 20) = 3.82019779$.

I beregningene ovenfor er detaljene i utregningen delvis skjult i programmeringen. Vi bruker samme f(x), $a := 0$ og $b := \pi$.

Vi kan sette $m := 8$, $h := \frac{b-a}{m}$ og range-variabel $X := a, a+h .. b$.

Da får vi $X =$ og $f(X) =$

X	$f(X)$
0	1.41421356
0.39269908	1.36145268
0.78539816	1.22474487
1.17809725	1.07072247
1.57079633	1
1.96349541	1.07072247
2.35619449	1.22474487
2.74889357	1.36145268
3.14159265	1.41421356

Dette er lister med delepunktene og funksjonsverdiene i delepunktene.

Simpsons formel

Simpsons formel er nesten lik Trapes formelen. Vi må passe på å bruke andre vekter på funksjonsverdiene. Merk at mod(k,2)=0, betyr at k er par-tall. Ved bruk av Simpsons formel må n være et partall.

$$\mathrm{Simpson}(f,a,b,n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ sum \leftarrow f(a) + f(b) \\ \text{for } k \in 1 .. (n-1) \\ \quad sum \leftarrow \left| \begin{array}{ll} sum + 2\cdot f(a+k\cdot h) & \text{if } \mathrm{mod}(k,2) = 0 \\ sum + 4\cdot f(a+k\cdot h) & \text{otherwise} \end{array} \right. \\ sum\cdot\dfrac{h}{3} \end{array} \right. .$$

Test: $\mathrm{Simpson}(f,0,\pi,8) = 3.82028241$, og $\mathrm{Simpson}(f,0,\pi,20) = 3.82019779$.