MA 1410: Analyse

PC-øvelser høsten 2000. Obligatoriske oppgavesett I.

Frist for innlevering: Torsdag 5. oktober.

Gruppene må besvare alle oppgavene.
Studenter som leverer en-manns besvarelser, velger to av oppgavene og besvarer disse.

Det er ikke all verdens krav for å få besvarelsene godkjent. Det dere bør legge vekt på er at det skal være en sammenheng i oppgavene, der det inngår oppgavebeskrivelser og forklaringer (tekst), beregninger og grafikk. Det er opp til dere hvordan dere lager layout og organiserer besvarelsene. Noen formler vil dere kanskje legge som formler i tekstlinjer, mens beregninger og grafikk kanskje legges i egne områder (regions).
For hver oppgave, skriv hvem som har gjort hva på oppgaven. Hver enkelt på gruppa må gjøre noe på minst to av oppgavene.

I uke 39 vil jeg være på PC-labben til vanlige tider slik at dere kan stille spørsmål hvis dere ønsker.
I uke 40 vil jeg komme innom PC-labben hvis det ser ut til å være behov for det.

Oppgave 1.

Gitt en likning G(x,y) = $x^3 + y^3 - 9xy$. (Se læreboka side 164.)

Hvis G(x,y) = 0, og vi setter x(t) = R(t) cos(t) og y(t) = R(t) sin(t), så får vi $R(t) := \dfrac{9 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t)}{\cos(t)^3 + \sin(t)^3}$.

(Se kommentar nedenfor.)

1. Foreta utregningen som gir formelen for R(t).
2. Tegn grafen til R(t). Når får vi 0 i nevneren i R(t)?
3. Tegn grafen til G(x,y) = 0.
4. Beregn punktet A i Figur 2.45 side 164 i læreboka.

Oppgave 2.

Gitt funksjonen $f(x) = \sin(x - \sin(x))$.

1. Vis at f(x) er periodisk med periode 2π. (Du skal begrunne at f(x) = f(x+2π) for alle x.)
2. Finn alle løsningene i [0, 2π] av likninga f '(x)=0. (Du kan bruke root( ) eller Newton( ), se nedenfor.)
3. Finn hvor f er konveks og hvor f er konkav i intervallet [0, 2π]. Tegn grafene til f, f ' og f '' i samme graf-rute. Angi alle lokale og absolutte maksimums- og minimumspunkter i [0, 2π].

Oppgave 3.

Skriv løsninger til oppgavene 3.2: 12, 13 og 14.
Finn eksempler som belyser påstandene i oppgavene og tegn grafene til disse.

Åsvald Lima.

Ad. Oppgave 1.
På forelesningene har vi sett på eksempel 4 side 167. Der har vi gitt en funksjon y=y(x) gjennom punktet (-1,2) definert implisitt ved likninga x^2-xy+y^2=7.Figur 2.49 viser hvilke punkter (x,y) som oppfyller likninga. Hvordan kan vi tegne denne kurven?
La oss sette x = R cos(t) og y = R sin(t). Setter vi dette inn i x^2-xy+y^2=7, og forenkler litt, får vi R^2(1-cos(t)sin(t))=7. Dermed kan vi sette: R = $R(t) := \sqrt{\dfrac{7}{1 - \cos(t)\cdot\sin(t)}}$ .Nevneren her er alltid større enn 0. Vi ser nå at vi kan tegne kurven i Figur 2.49 som en parameterkurve: x(t) = R(t) cos(t), og y(t) = R(t) sin(t). Prøv dette!

Numerisk løsning av likninger.
Vi har sett på øvelsene hvordan vi kan bruke funksjonen root( ) til å løse likninger. Et alternativ er å bruke Newtons metode, se § 3.8.
Anta f(x) er en deriverbar funksjon og at vi skal finne løsninger til likninga f(x) = c, der c er en gitt verdi. Newtons metode slik den er beskrevet i § 3.8 er en iterasjons algoritme som til en gjettet løsning, x0, beregner stadig mere nøyaktig tilnærminger, x1, x2, ..., til den søkte verdien. (I virkelighetens verden er det ofte at ting går galt. I kurs i numerisk matematikk diskuteres hvorfor Newtons metode noen ganger feiler, og hva en kan gjøre i slike tilfeller.)
Den iterasjonen (gjentakelsen) som er en del av Newtons metode, kan programmeres i Mathcad. Vi bruker **Add Line**, **for** og **<-** fra **Programming Toolbar**.
Anta vi har gitt f(x):= (en formel). Vi definerer en ny funksjon Newton(f,x0,c,n) slik:

$$\mathrm{Newton}(f, x0, c, n) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad x \leftarrow x - \dfrac{f(x) - c}{\dfrac{d}{dx} f(x)} \end{array} \right. .$$

Denne funksjonen kan vi bruke f.eks. slik: Newton(f,2,0,4)=
Eksempel: $f(x) := x^2$, $\mathrm{Newton}(f, 1, 2, 4) = 1.414$. Her har vi løst likninga x^2 = 2, med startverdi x0=1 og 4 iterasjoner.

PC-øvelse nr. 1.