Ma1410: Analyse

Ma1410: Analyse

PC-øvelser høsten 2000: Obligatorisk oppgavesett 2.

<u>Frist for innlevering:</u> Fredag 27. oktober.

Vi skal se på en oppgave som går på integrasjon, og en oppgave som går på differensiallikninger. De som leverer en-manns besvarelse velger en av oppgavene.

<u>Oppgave 1.</u>

1. I oppgave 6.9: 90 skal vi beregne lengden av kurven gitt ved y(x) = $\sqrt{1-x^2}$, fra a=-1/2 til b=1/2. Tegn grafen og beregn lengden ved bruk av formelen:

   Lengden = $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx$. Beregn svaret både ved en numerisk metode og ved bruk av $\to$. Stemmer svaret med det dere fant på grupperegningen? Ser svaret rimelig ut? (Se: **Resource Center - - QuickSheets - Calculus and Differential Equations - Computing the Arc Length of a Function.**)

1. I oppgave 6.9: 89 skal vi beregne volumet av et omdreiningslegeme (solid of revolution). Når vi tar en funksjon y = f(x) definert på et intervall [a,b] og dreier grafen i rommet om x-aksen får vi det vi kaller et omdreiningslegeme. Beregn volumet det spørres etter i oppgave 6.9: 89 ved bruk av formelen: Volumet = $\pi\cdot\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx$. (Velg numerisk metode eller beregn ved bruk av $\to$.)

   Tegn omdreiningslegemet. (Hvordan dette gjøres er beskrevet nedenfor.
   Se også: **Resource Center - Advanced Topics - Creating 3D Graphs.** Nederst på denne sida, slå opp på: **Chapter 15 Practical Curves and Surfaces.**)

<u>Oppgave 2.</u>

Vi tar utgangspunkt i eksempel 6 side 533 i læreboka. Forfatterne av boka viser hvordan vi går fram steg for steg når likninga x y' = x^2 + 3y (x>0) skal løses. De viser at generell løsning er

y(x) = $-x^2 + Cx^3$.

Nedenfor er det vist hvordan vi kan tegne grafene til mange av disse løsningene (kalt integralkurver) samtidig.

1. Tegn et antall integralkurver, f.eks. 12. (Definer en funksjon y(x,C) og gå fram som beskrevet i eksemplet nedenfor. Definerer en matrise D som vil være grunnlaget for uttegningen.)
2. Tegn integralkurven gjennom punktet (x,y) = (1,2) og tangenten til integralkurven i dette punktet. (Se fila ma1410u37.mcd for hvordan vi tegner tangenter, eller slå opp i **Resource Center- Advanced Topics - Creating 3D Graphs.** Nederst på denne sida, slå opp på: **Chapter 15 Practical Curves and Surfaces,** se **15.1.4 Tangent Line to a Curve**. Se også: **Resource Center - Advanced Topics - Differential Equations Introduction.**)

Differensiallikninger
Når vi løser en differensiallikning y' = f(x,y), får vi løsninger der det inngår en konstant, så vi kan skrive løsningene som y(x,C). Når vi tegner grafene til y for en C-verdi, får vi kurver som vi kaller integralkurver.
Vi skal se på hvordan vi i Mathcad kan tegne integralkurver til **Lineære 1. ordens differensiallikninger**.
Vi antar gitt en likning på formen: **y' + P(x) y = Q(x).**
I oppgaven 5.12.1983: 4 har vi gitt:

$$P(x) := 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{og} \qquad Q(x) := x$$

Løsningen som en funksjon i to variable, x og C. Denne 2-variable funksjonen kan vi bruke for å tegne integralkurvene.
La oss sette (vi har omformet svaret ovenfor litt):

$$y(x, C) := x + C \cdot x \cdot \exp(-x)$$

I Oppgave 2 kan dere gå rett hit og definere y(x,C) siden dere kan finne løsningen i boka.

Vi kan nå tegne integralkurvene for flere C-verdier på en gang. Vi tegner kurvene over et x-intervall [-1,3], og oppgir f.eks. xmin < -1 og xmax > 3. Vi tegner kurver for flere C-verdier. (I grafen nedenfor har vi valgt et noe mindre intervall enn [xmin,xmax] for å unngå noen ekstra streker.) Nedenfor tegner vi 20=19+1 kurver og på hver kurve tegner vi 72=71+1 punkt.
I andre eksempler velger vi å bruke andre verdier for cmin, cmax, xmin og xmax.
Indeksene må være nøyaktige. Du kan skrive indeksene ved først å velge X_n fra Calculator Toolbar.

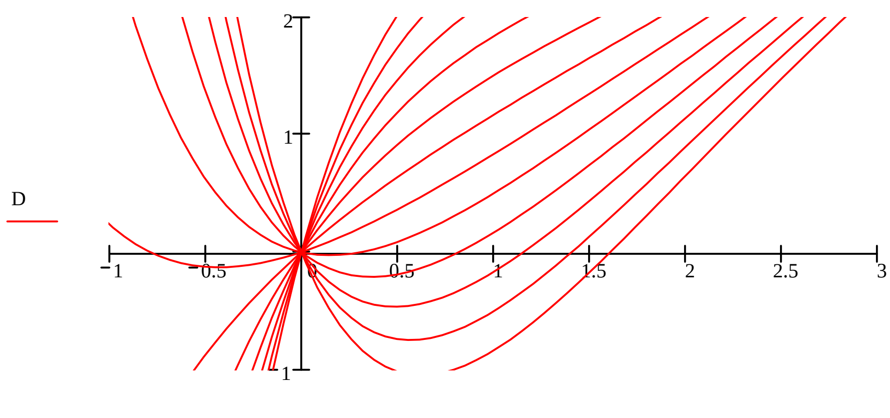
$$cmin := -5 \qquad cmax := 5 \qquad xmin := -1.1 \qquad xmax := 3.1$$

$$I := 11 \quad i := 0 .. I \qquad J := 71 \qquad j := 0 .. J$$

$$c_i := cmin + \left(\frac{cmax - cmin}{I}\right) \cdot i \qquad x_j := xmin + \left(\frac{xmax - xmin}{J}\right) \cdot j$$

$$D_{j,i} := y(x_j, c_i)$$ Merk at på D bruker vi 2 indekser, dvs. D er en matrise.

Nå kaller vi opp xy-plot fra Graph Toolbar, og setter inn x og D.



La oss få Mathcad til å regne ut løsningene:

$$P(x) := 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{og} \qquad Q(x) := x \qquad \text{Definer} \qquad v(x) := \exp\left[\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx\right] \rightarrow \exp(x - \ln(x))$$

Vi bruker formel (7) i Theorem 4 side 533, og får løsningene til å bli (jeg har skrevet inn det til venstre for $\blacksquare \rightarrow$):

$$L(x, C) := \left(\frac{1}{v(x)}\right) \cdot \left(\int v(x) \cdot x\, dx + C\right) \rightarrow \frac{1}{\exp(x - \ln(x))} \cdot (\exp(x) + C)$$

Integrasjon:

I fila ma1410integral.mcd og ma1410integral.pdf er det beskrevet hvordan vi bruker integral til å beregne lengder av kurver og volum og areal av omdreiningslegemer (om x-aksen). I fila ma1410num.pdf er det beskrevet hvordan vi kan bruke Mathcad til å beregne integraler numerisk.

Å tegne grafer har dere gjort tidligere.

Når dere skal tegne rotasjonslegemet der en funksjon roteres om x-aksen, så er dette beskrevet i **Resource Center - QuickSheets - Graphing and Visualization - Drawing a Surface of Rotation About the x-Axis**. Plot-vinduet i **15.2.4 Surfaces of Revolution** får en fram ved å velge **Insert - Graph - Surface Plot**.

(Jeg hadde et problem da jeg laget oppgavene. Det består i at Mathcad2000 gir rød feilmelding til sin egen beskrivelse i **15.2.4 Surfaces of Revolution** av hvordan vi skal tegne flaten. I Mathcad8 fungerer ting greit. Muligens er problemet at jeg bruker Windows 95, mens Mathcad2000 ønsker Windows 98.)

Merk at når vi skal tegne flater som roteres om x-aksen, så må vi endre litt på det som er beskrevet i 15.2.4. Vi setter i vårt tilfelle $X_{i,j} = x_i$, $Y_{i,j} = f(x_i) \cos(\theta_j)$ og $Z_{i,j} = f(x_i) \sin(\theta_j)$.