OM TRIGONOMETRISKE FUNKSJONER.

Emne:	**MA 1410: Analyse**	**Høgskolen i Agder**
	Uke 36, 2000	Avdeling for realfag
	http://home.hia.no/~aasvaldl/	Institutt for matematiske fag
		Tordenskjoldsgate 65, Kristiansand

Beskjed: Dette er en oversikt over noen formler vi skal bruke i kurset. Vi bruker flere av disse formlene i § 2.4, men utledningen av formlene foregår ved å regne på oppgaver i Preliminaries 5.

På side 43 i Thomas and Finney blir cosinus-setningen utledet. I utledningen bruker vi Pythagoras setning, og vi ser at cosinus setningen inneholder Pythagoras setning som et spesialtilfelle (når $\theta = 0$). La oss skrive opp cosinus setningen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta). \tag{1}$$

c er lengden av siden i trekanten som er motsatt til vinkelen θ.

I § 2.4 viser vi først at $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er kontinuerlige i $x = 0$. Vi viser også at $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$. På grunnlag av dette og de trigonometriske formlene side 42, finner vi at $\sin(x)$ og $\cos(x)$ begge er deriverbare og at $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ og $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$. Siden deriverbare funksjoner er kontinuerlige (se § 2.1, side 116), følger at $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er kontinuerlige over alt. (Dette siste resultatet kunne vært vist på en annnen måte.)

Oppgave: P5: 53 (side 45)

$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B). \tag{2}$$

Forslag til løsning:

Dere bør ha figuren i boka side 45 framme, siden jeg skal referere til den. Vinkelen B bestemmet et punkt på sirkelperiferien $P(\cos(B), \sin(B))$. Likedan, vinkelen A bestemmer et punkt på sirkelperiferien $Q(\cos(A), \sin(A))$. Jeg skal beregne avstanden fra P til Q på to måter. La oss kalle denne avstanden for c. Ved cosinussetningen får vi

$$c^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(A-B) = 2 - 2\cos(A-B).$$

Bruker vi Pythagoras setning får vi

$$c^2 = (\cos(A) - \cos(B))^2 + (\sin(A) - \sin(B))^2.$$

Multipliserer vi ut høyre siden og bruker at $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, så får vi

$$\begin{aligned} c^2 &= \cos^2(A) - 2\cos(A)\cos(B) + \cos^2(B) + \sin^2(A) - 2\sin(A)\sin(B) + \sin^2(B) \\ &= 2 - 2\cos(A)\cos(B) - 2\sin(A)\sin(B). \end{aligned}$$

Når vi setter de to uttrykkene for c^2 lik hverandre, får vi (2).

Ved å se på Figur 54 side 37, så ser vi at $\sin(-x) = -\sin(x)$ og $\cos(-x) = \cos(x)$. La oss i formel (2) bytte ut B med $-B$. Da får vi (se formel (3) side 42)

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos(A)\cos(-B) + \sin(A)\sin(-B) \\ &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B).\end{aligned} \tag{3}$$

Hvis vi nå setter $A = B$ og bruker at $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$, så får vi

$$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A) = 2\cos^2(A) - 1 \tag{4}$$

og vi får videre (se formlene (4) og (5) side 42)

$$\cos^2(A) = \frac{1+\cos(2A)}{2}. \tag{5}$$

Videre får vi

$$\sin^2(A) = 1 - \cos^2(A) = \frac{1-\cos(2A)}{2}. \tag{6}$$

I disse formlene for cosinus til sum og differanse, setter vi nå $B = \pi/2$. Da får vi (se oppgavene 31 og 32 side 44):

$$\begin{aligned}\cos(A-\pi/2) &= \cos(A)\cos(\pi/2) + \sin(A)\sin(\pi/2) \\ &= \cos(A)\cdot 0 + \sin(A)\cdot 1 = \sin(A)\end{aligned} \tag{7}$$

og

$$\begin{aligned}\cos(A+\pi/2) &= \cos(A)\cos(\pi/2) - \sin(A)\sin(\pi/2) \\ &= \cos(A)\cdot 0 - \sin(A)\cdot 1 = -\sin(A).\end{aligned} \tag{8}$$

Fra formel (7) og formel (3) får vi

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \cos(A+B-\pi/2) \\ &= \cos(A)\cos(B-\pi/2) - \sin(A)\sin(B-\pi/2) \\ &= \cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B).\end{aligned} \tag{9}$$

Setter vi nå $A = B$, så får vi

$$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A). \tag{10}$$

I Oppgave 51 side 45 bes det om å vise en formel for tangens til en sum. Vi får ved å bruke formlene ovenfor at

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)}{\cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)} \\ &= \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)}.\end{aligned} \tag{11}$$

Vi har her dividert teller og nevner med $\cos(A)\cos(B)$. Ved å erstatte B med $-B$, får vi formelen (se Oppgave 52 side 45)

$$\tan(A-B) = \frac{\tan(A) - \tan(B)}{1 + \tan(A)\tan(B)} \tag{12}$$

La oss gå tilbake til side 12 i læreboka. Det står der at to linjer står vinkelrett på hverandre hvis og bare hvis produktet av stigningstallene er lik -1. Ved å se på Figur 15 side 12, så ser vi at stigningstallene er gitt ved $m_1 = \tan(\phi_1)$ og $m_2 = \tan(\phi_2)$. Linjene står vinkelrett på hverandre hvis og bare hvis vinkelen $\phi_2 - \phi_1 = \pm\pi/2$. Dette er det samme som at $\tan(\phi_2 - \phi_1) = \pm\infty$, som betyr at vi må ha 0 i nevneren i formelen

$$\tan(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\tan(\phi_2) - \tan(\phi_1)}{1 + \tan(\phi_2)\tan(\phi_1)}.$$

Så at linjene står vinkelrett på hverandre betyr at $0 = 1 + \tan(\phi_2)\tan(\phi_1)$, dvs. $0 = 1 + m_2 m_1$.