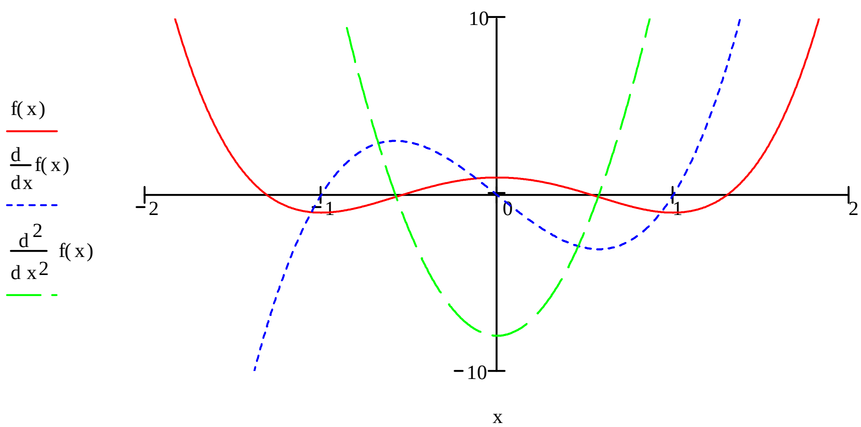
Oppgaver til gruppe-regningen i Ma 1410, uke 39, 2000.

<u>Oppgave 3.4: 89</u>:

Vi har gitt funksjon $f(x) := 2\cdot x^4 - \left(4\cdot x^2\right) + 1$. Vi skal tegne grafene fil f, f ' og f ''.

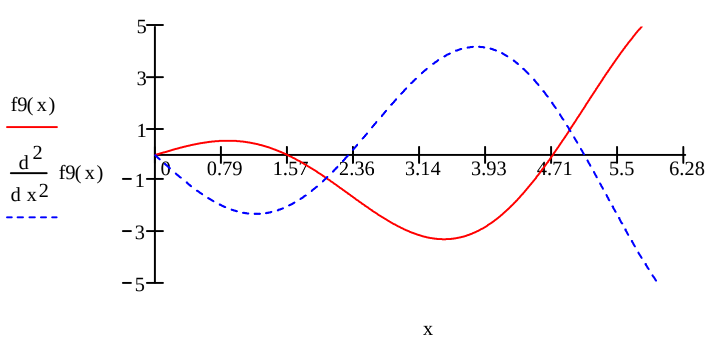


Det ser ut til at f '(x)=0 har tre løsninger, x = -1,0 og 1. Vi kan se på dette. $\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 8\cdot x^3 - 8\cdot x$. Vi kan faktorisere: $8\cdot x^3 - 8\cdot x$. Ved å bruke factor, får vi: $8\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$. Dette stemmer med grafen til f, f avtagende til -1, deretter voksende til 0, avtagende til 1 og til slutt voksende.

Den annenderiverte er $\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow 24\cdot x^2 - 8$, som er 0 når x = $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$ og minus denne verdien. Dermed får vi at grafen til f er konveks til venstre for -0.577 og til høyre for 0.577, mens den er konkav imellom disse verdiene.

<u>Oppgave 3.4: 90</u>

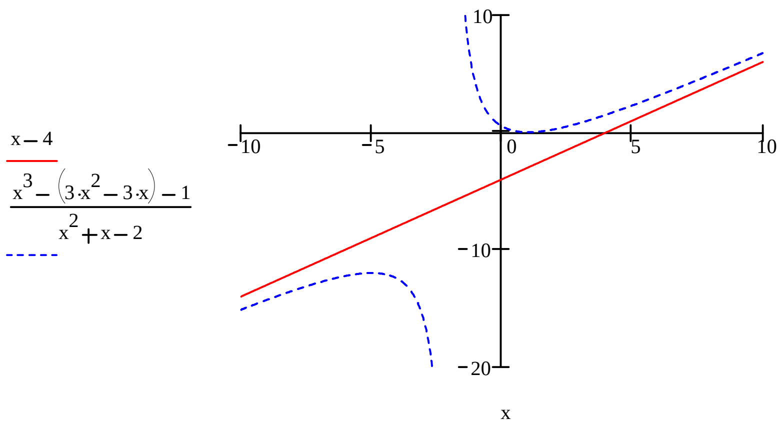
Vi har gitt funksjon $f9(x) := x\cdot\cos(x)$. Vi skal tegne grafen til f9(x) og til f9 ''(x).



Ved å se på grafen til den annen-deriverte, ser vi at f9(x) er konkav fra 0 til ca. 2.3, deretter konveks fra ca. 2.3 til ca. 4.6, for deretter å være konkav.

Oppgave 3.5: 61:

Vi har gitt rasjonal funksjon $\frac{\left[\left(x^3-3\cdot x^2\right)+3\cdot x\right]-1}{x^2+x-2}$. Polynomdivisjon gir: $x-4+\frac{9\cdot x-9}{x^2+x-2}$. Dette viser at vi har asymptote y = x-4. Grafene ser slik ut (asymptoten er rød).



Oppgave 3.5: 78:

Vi må foreta en omskriving.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+x\right)-\left(x^2-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\,x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Oppgave 3.5: 86

$\frac{x^2+3\cdot x+7}{x+2} = x+1+\frac{5}{x+2}$. Vi ser her at y=x+1 er skrå asymptote. Hvis vi skriver $\frac{x^2+3\cdot x+7}{x+2} = \frac{x+3+\left(\frac{7}{x}\right)}{1+\left(\frac{2}{x}\right)}$, så ser det ut til at for x stor, blir brøken nær x+3. Dette er rett og slett et bedrag, våre erfaringer strekker ikke til, og vi blir lurt. Den reelle asymptoten er y=x+1!

Oppgave 3.6: 39:

Vi viser til figuren i boka side 246. La P være punktet det lyset reflekteres. Vi skal finne plassering av P slik at AP+PB blir kortest mulig.

La a = avstanden fra A til speilet
b = avstanden fra B til speilet
d = avstanden mellom A og B i horisontal retning.
x = avstanden fra P til B i horisontal retning.

Sett f(x) = $\sqrt{a^2 + (d-x)^2} + \sqrt{b^2 + x^2}$. f(x) er avstanden fra A til P + avstanden fra P til B utregnet ved bruk av Pythagoras setning.

Derivasjon gir: f'(x) = $\frac{-(d-x)}{\sqrt{a^2 + (d-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}$. Vi setter f'(x) = 0, og får (husk at sin(t) = motstående katet/hypotenusen): sin(θ_1) = sin(θ_2). Dette medfører at $\theta_1 = \theta_2$.

Oppgave 3.6: 50:

Se figuren i boka. I punktet c har funksjonen f(x)-g(x) sitt maksimum. Siden denne differansen er deriverbar i dette punktet, må den ha derivert lik 0. Men det betyr at f '(c) = g '(c), dvs. tangentene er parallelle.

Oppgave 3.8: 15a

Gitt f(x) = x^3-3x-1.

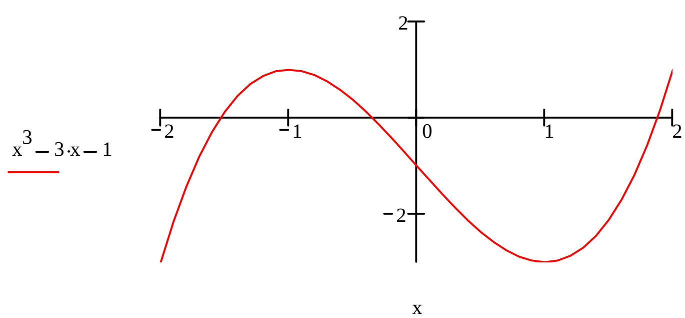
ii) f(x) = 0 er det samme som at x^3 = 3x+1. Dvs. at kurvene y = x^3 og y = 3x+1 skjærer hverandre.

iii) f(x) = 0 er også det samme som at x^3-3x = 1, dvs. at kurven y = x^3-3x skjærer kurven y=1.

iv) g(x) = x^4/4 -(3/2)x^2-x+5 har derivert lik f(x). Det betyr at g'(x) = 0 hvis og bare hvis f(x) = 0.

Av grafen nedenfor ser vi at f(x) har nullpunkt nær x= -1.5, nær x= -0.3 og nær x= 1.8. Newtons metode betyr at vi skal iterere (gjenta) beregning av funksjonen: x - f(x)/f'(x)

$x := -2, -1.9 .. 2$



$f(x) := x^3 - 3 \cdot x - 1$ $\qquad h(x) := x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx} f(x)} \rightarrow x - \frac{\left(x^3 - 3 \cdot x - 1\right)}{\left(3 \cdot x^2 - 3\right)}$ $\qquad n := 0 .. 4$

$x_0 := -1.5$ $\quad$ $x_{n+1} := h(x_n)$ $\quad$ $u_0 := -0.3$ $\quad$ $u_{n+1} := h(u_n)$

$v_0 := 1.8$ $\quad$ $v_{n+1} := h(v_n)$

$$x = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1.533333 \\ -1.532091 \\ -1.532089 \\ -1.532089 \\ -1.532089 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} -0.3 \\ -0.34652014652 \\ -0.347296117888 \\ -0.347296355334 \\ -0.347296355334 \\ -0.347296355334 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.884524 \\ 1.879405 \\ 1.879385 \\ 1.879385 \\ 1.879385 \end{bmatrix}$$

Oppgave 66 side 271:
Ved å bruke formlike trekanter, får vi (6-r)/6 = h/12, slik at h = 2(6-r). Da volumet av en kjegle er $V = (1/3)\pi r^2 h$, får vi $V(r) = (2\pi/3)(6r^2 - r^3)$. Derivasjon gir $V'(r) = 2\pi r(4-r)$, og vi får maksimum for r=4. Da er h = 2(6-4) = 4, og $V_{maks} = 64\pi/3$.

Oppgave 16 side 273:
Vi skal i denne oppgaven bruke tangens. Fra figuren ser vi at $\tan(\theta) = a/h$ og $\tan(\theta+\beta) = (a+b)/h$.
Vi ser at $\frac{1}{h} = \frac{\tan(\theta)}{a} = \frac{\tan(\theta+\beta)}{a+b}$. Vi betrakter $\beta = \beta(\theta)$ - som en funksjon av θ.

Vi antar vi kan derivere implisitt. Da får vi: $\frac{1+\tan(\theta)^2}{a} = \frac{\left(1+\frac{d}{d\theta}\beta(\theta)\right)\cdot\left(1+\tan(\theta+\beta)^2\right)}{a+b}$. I et maksimumspunkt er $\frac{d}{d\theta}\beta(\theta) = 0$, slik at $(a+b)(1+\tan^2(\theta)) = a(1+\tan^2(\theta+\beta))$. Litt regning på denne likninga gir at $\frac{\tan(\theta+\beta)^2}{(a+b)^2} = \frac{1+\tan(\theta)^2}{a\cdot(a+b)} - \frac{1}{(a+b)^2}$. Vi setter dette inn i den første likninga (linje 2), og får: $\tan(\theta)^2 = \frac{a}{a+b}$. Dermed følger at $h = \frac{a}{\tan(\theta)} = \sqrt{a(a+b)}$.

For spesielt interesserte:
Oppgave 3.2: 23
Vi har gitt funksjon $h23(x) := \sin(x)\cdot\sin(x+2) - (\sin(x+1))^2$. Grafen er tegnet nedenfor, se på denne!!! Grafen er en rett strek, så funksjonen MÅ være en konstant. Skriv x = (x+1)-1 og skriv x+2 = (x+1)+1, og bruk formlene for sinus til sum og differanse side 42.

Oppgave 3.7: 64 (ikke nr. 66!)
Vi har gitt en funksjon y = f(x). La L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) være lineariseringen av f(x) nær a. Anta en funksjon g(x) = c + m(x-a) er gitt. Vi antar at E(x) =f(x) -g(x) oppfyller:

1. E(a) = 0.
2. $\lim_{x \to a} \frac{E(x)}{x-a} = 0$.

Når vi setter inn a i E(a) = f(a) - g(a), får vi c = g(a) = f(a)

Når vi setter inn 0 = E(a) = f(a) -g(a) får vi c = g(a) = f(a).

0 = $\lim_{x \to a} \frac{E(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-m\cdot(x-a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ -m = f'(a) - m, slik at m = f'(a). Men da blir g(x) = L(x)!

Her kommer grafen i 3.2: 23.

$x := -2\cdot\pi, -2\cdot\pi + 0.01 .. 2\cdot\pi$