MA 1410: Analyse
Høsten 1999

Åsvald Lima

Ma 1410, løsningsforslag til oppgaver uke 40, 2000

Oppgave 3.8: 16
La $f(x) := x - 1 - 0.5 \cdot \sin(x)$. Vi skal bruke Newtons metode til å finne nullpunktet nær x_0 = 1.5. La oss sette $\text{newton}(x) := x - \dfrac{f(x)}{\frac{d}{dx}f(x)}$. Da får vi x_1 = newton(x_0) = $\text{newton}(1.5) = 1.498702$.

Oppgave 4.1: 30

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx \to \frac{1}{3} \cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 4 \cdot x^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Oppgave 4.1: 65
Vi deriverer høyre side i de tre uttrykkene. Da ser vi at c) gir funksjonen som skal integreres.

Oppgave 4.2: 1
Som markert på alle figurene, skal den søkte kurven gå igjennom punktet (1,4). Vi har gitt at y' = 2x. 2x er den deriverte av $y(x)=x^2+C$. Setter vi 4=y(1)=1+C, får vi at C=3. Dvs. $y(x)=x^2+3$. (b) er rett graf.

Oppgave 4.2: 9
Vi har gitt ds/dt = 1+cos(t) og s(0)=4. Vi bruker også nå Tabell 4.1 side 277 og får: s(t)=t+sin(t)+C. 4=s(0)=0+sin(0)+C=C. Derfor: s(t)=t+sin(t)+4.

Oppgave 4.2: 31
Vi har oppgitt at y = f(x) oppfyller f(9) = 4 og f '(x) = $3 \cdot \sqrt{x}$. Ved å integrere får vi $f(x)$ =

$\int 3 \cdot \sqrt{x}\, dx \to 2 \cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)}$ + C. Kurven skal passere igjennom (9,4) og da må vi ha 4 = 2 $9^{(3/2)}$ +C = + C,

slik ar C = -50. Vi får f(x) = 2 $x^{\frac{3}{2}}$ - 50.

Oppgave 4.3: 2
Vi skal beregne $\int x \cdot \sin\left(2 \cdot x^2\right) dx$, og har fått oppgitt $u=2x^2$. Da er u'=4x. Den forreste x-en kan vi

skrive som (1/4)*u'. Nå foretar vi substitusjonen og får: $\int \left(\frac{1}{4}\right) \sin(u)\, du$.(1/4) kan settes utenfor

integralet (Rule 1. i Tabell 4.2), og integralet av sin(u) er -cos(u). Vi får derfor som svar: -(1/4)cos(u)+C. Nå erstatter vi u-en med $2x^2$, slik at svaret blir: $-(1/4)\cos(2x^2)$+C.

$$\int x \cdot \sin\left(2 \cdot x^2\right) dx \to \frac{-1}{4} \cdot \cos\left(2 \cdot x^2\right)$$

Oppgave 4.3: 20

I denne oppgaven velger vi $u = g(x) = 2x^2+1$. Da blir $g'(x) = 4x$, og $du = 4x\,dx$. Vi får å integrere $u^{(-1/2)}$.

Denne substitusjonen gir $\displaystyle\int \frac{4\cdot y}{\sqrt{2\cdot y^2+1}}\,dy = \int u^{\frac{-1}{2}}\,du = 2\cdot u^{\frac{1}{2}} + C = 2\cdot\sqrt{2\cdot y^2+1} + C$.

Oppgave 4.3: 22

Vi bruker substitusjonen $u = g(x) = 1 + \sqrt{x}$. Da blir $du = g'(x)\,dx = \dfrac{dx}{2\cdot\sqrt{x}}$. Bruker vi dette får vi:

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2u^3\,du = \frac{u^4}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)^4 + C\ .$$

Oppgave 4.5: 51

Vi skal tolke integralet $\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ som et areal, og ved arealbetraktning angi svaret på integrasjonen. Funksjonen som skal integreres er $y(x)=\sqrt{9-x^2}$. Ved kvadrering får vi: $x^2+y^2=3^2$. Dette angir en sirkel med sentrum i origo og med radius 3. y(x) er positiv, dvs. vi skal beregne arealet under y(x) og over x-aksen. Dette er arealet av en halvsirkel. Arealet, og det søkte integralet, må bli $(1/2)\pi\, r^2 = \pi\, 3^2/2$.

Oppgave 11 side 269:
Når $g(t) = \sin^2(t)-3t$, så blir $g'(t) = 2\sin(t)\cos(t) - 3 = \sin(2t)-3$. Sin(2t) tar verdier mellom -1 og +1, slik at g'(t) er mindre eller lik -2. Det betyr at g(t) er strengt avtagende. Siden g(t) er strengt avtagende, kan g(t)=5 kan ha høyst en løsning.
$g(0) = 0$ og $g(-2)=\sin^2(-2)+6>5$.

Oppgave 68 side 271:
Omkretsen er $O = 2\pi r+2r = 400$. Arealet er $A = 2rx$. Fra likninga for omkretsen får vi $2x = 400-2\pi r$, slik at $A(r) = r(400-2\pi r)$. Derivasjon og løsing av likninga $A'(r) = 0$, gir $r = 100/\pi$, slik at $x = 200 -\pi r = 100$.

Oppgave 8 side 273:

Vi gar gitt $g(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$. Derivasjon gir $g'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, og likninga $g'(x) = 0$, har løsningene x = 1 og x = -1. Vi finner minimumsverdi $g(-1) = -1/2$ og maksimumsverdi $g(1) = 1/2$.
Dermed følger at g(x) ligger mellom -1/2 og 1/2.
Middelverditeoremet sier at det finnes c mellom a og b slik at
$|f(b)-f(a)| = |b-a|\,|f'(c)| = |b-a|\,|g(c)| \le (1/2)|b-a|$.

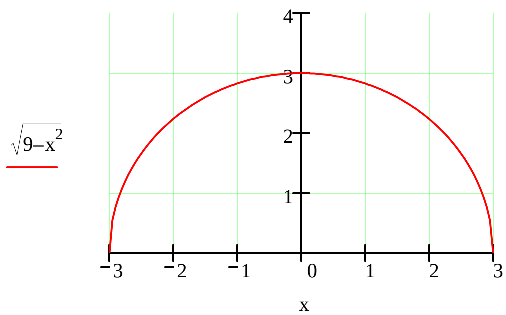
Oppgave 4.5: 35

Vi har gitt Riemann sum $S_P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\right)^2\cdot\Delta_k$. I Riemann summene inngår $f(c_k)$ multiplisert med lengden av intervallet Δ_k. Det betyr at vi må ha $f(c_k) = c_k^2$. Det er derfor naturlig å gjette at $f(x) = x^2$.

Dermed får vi $\lim\limits_{||P|| \to 0} S_P = \int_0^2 x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3}$ (innsatt 0 og 2) = 8/3.

Graf til oppgave 4.5: 51:

$$x := -3, -2.95 .. 3$$

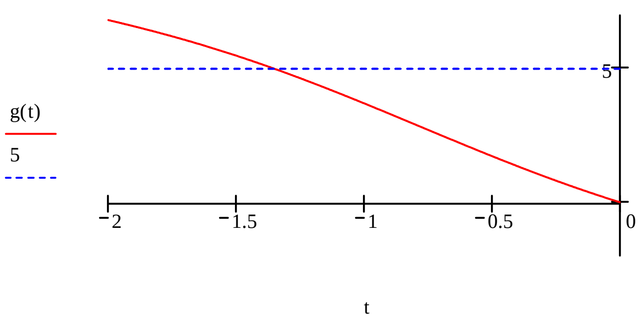


$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx \rightarrow \frac{9}{2}\cdot\pi$$

Beregning for oppgave 11/269:

$$g(t) := \sin(t)^2 - 3\cdot t \qquad dg(t) := \frac{d}{dt}g(t) \rightarrow 2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) - 3 \qquad u := -1.5$$

$$u0 := \text{root}(g(u) - 5, u)$$



$$u0 = -1.349407$$