Ma 1410: analyse

Oppgaver i uke 44, høsten 2000

Oppgave 6.9: 43

Vi bruker substitusjonen $u = g(x) = e^x$, $du = e^x\, dx$, $g(0) = 1$ og $g(\ln(\sqrt{3})) = \sqrt{3}$. Da får vi:

$$\int_1^{\ln(\sqrt{3})} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\,du$$ = arctan(u) (innsatt u=1 og u=$\sqrt{3}$) = arctan($\sqrt{3}$) - arctan(1) = $\pi/3 - \pi/4 = \pi/12$.

Oppgave 7.1: 49

Polynomdivisjon: $2x^3 : (x^2-1)$ gir kvotient 2x og rest 2x. Vi skriver om integralet:

$$\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{2\cdot x^3}{x^2-1}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{3} \left(2\cdot x + \frac{2\cdot x}{x^2-1}\right)dx$$ = $(x^2 + \ln(x^2 - 1))$ (innsatt x=$\sqrt{2}$ og x=3) = 9 - 2 + ln(8) - ln(1) = 7 + ln(8) = 7 + 3 ln(2).

Oppgave 7.2: 5

I integralet $\int_1^2 x\cdot\ln(x)\,dx$, velger vi å sette x = f '(x) og ln(x) = g(x). Da er $f(x) = x^2/2$ og g '(x) = 1/x. Delvis integrasjon gir: $x^2/2 \ln(x)$ (innsatt grensene x=1 og x=2) - $\int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$ = $(x^2/2 \ln(x) - x^2/4)$ (innsatt grensene x=1 og x=2) = 2 ln(2) -1 - 0 + 1/4 = 2 ln(2) - 3/4.

Oppgave 7.3: 29

Polynomdivisjon $(2x^3-2x^2+1) : (x^2-x)$ gir kvotient 2x og rest 1. Vi skriver: $\frac{1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$. Vi multipliserer begge sider med x (x-1) og får: 1 = A (x-1) + B x. Setter vi x=0, får vi A = -1, og setter vi x=1, får vi B = 1. Dermed får vi:

$$\int \frac{2\cdot x^3 - 2\cdot x^2 + 1}{x^2 - x}\,dx = \int 2\cdot x\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$ = x^2 - ln|x| + ln|x-1| + C = x^2 + ln$\left|\frac{x-1}{x}\right|$ +C.

Oppgave 7.5: 101

Vi skal bruke integralformel for overflaten av et omdreiningslegeme om x-aksen. Vi har gitt y(x) over [a,b]. Da er arealet av overflaten: $S = 2\cdot\pi\cdot\int_a^b y(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2}\,dx.$

Vi har gitt a=0 og b=√2. y(x) = √(x2+2). Litt regning gir: 1+(y')2 = (2x2+2)/(x2+2). Da blir y*√(1+(y')^2) = √2 * √(1+x^2). Dette gir oss: $S = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx.$

Vi kan bruke resultatet fra oppgave 71 s. 607: $\int\sqrt{1+x^2}\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{asinh}(x).$

Så $S = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)$ (innsatt grensene) = $\pi\cdot\left(2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)$

Oppgave 7.6: 1

Vi får: $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\rightarrow\infty}\operatorname{atan}(b) = \pi/2.$

Oppgave 7.6: 25

Vi foretar først en delvis integrasjon (se Ex. 4 side 564): $\int x\cdot\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$ $\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{x^2}{4}$. Funksjonen x*ln(x) går muligens mot uendelig når x->0+. Vi skal se at dette ikke er tilfelle og at beregning av det gitte integralet ikke byr på problemer.

$\int_0^1 x\cdot\ln(x)\,dx = \lim_{c\rightarrow 0}\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{x^2}{4}\right)$ (innsatt grensene x=c og x=1) =

$0-\frac{1}{4}-\lim_{c\rightarrow 0}\frac{c^2\cdot\ln(c)}{2}+0$ = -1/4 -0 = -1/4, siden $\lim_{c\rightarrow 0}c^2\cdot\ln(c)\rightarrow 0$.

Oppgave 7.6: 73

Vi skal beregne integralet mellom to grafer. Nedre grafe er y(x) = tan(x) og øvre grafe er y(x) =

1/cos(x) over intervallet [0,π/2].

A = $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x)\right) dx$. Vi har gjennomgått disse integrasjonene på forelesningene (se

sidene 464 og 558), $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\cos(x)} - \tan(x)\right) dx \rightarrow \ln(\sec(x) + \tan(x)) + \ln(\cos(x))$.

A = $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\ln\left(\left|\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right|\right) + \ln(|\cos(x)|)\right]$ -ln(0+1) - ln(1) = $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x))$ = ln(2).

Oppgave 71 side 607:

Vi skal i denne oppgaven foreta delvis integrasjon (Integration by parts) der vi setter inn 1 som i Example 4 side 564 og der vi flytter over et ledd som i Example 6 side 565.

$\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx$ (x = f ' og g = $\sqrt{1+x^2}$).

$$= x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int x\cdot\frac{2\cdot x}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \left[x\cdot\sqrt{1+x^2} - \left(\int \sqrt{1+x^2}\,dx\right)\right] + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

= $\displaystyle\left(x\cdot\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx\right) + \operatorname{arcsin}(x)$ (Nå flytter vi over integralet og dividerer med 2.)

$$= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arcsin}(x) + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Oppgave 97 side 607:

Vi skal foreta en delbrøkoppspalting og deretter en integrasjon $3\cdot x^2 + 4\cdot x + 4 \;\; = \;\; A \;\; + \;\; B\cdot x + C$ Vi

Vi skal foreta en delbrøkoppspalting og deretter en integrasjon: $\frac{}{x^3+x} = \frac{}{x} + \frac{}{x^2+1}$. Vi multipliserer begge sider med x*(x^2+1) og får: $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 4 = A \cdot \left(x^2+1\right) + x \cdot (B \cdot x + C)$.Setter vi x=0 får vi A=4. Vi kan deretter forkorte 4 og dividere med x. Vi står igjen med: -x+4 = Bx+C. Da ser vi at C=4 og B=-1. Dermed får vi:

$$\int \frac{3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 4}{x^3 + x}\,dx = \int \frac{4}{x}\,dx + \int \frac{-x+4}{x^2+1}\,dx = 4 \cdot \ln(|x|) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+4\right) + 4 \cdot \arctan(x) + C\ .$$