Ma 1410: Analyse

Løsningsforslag - oppgaver til uke 45, høsten 2000

Oppgave 10.2: 57
AB = **i** + 4 **j** - 2 **k** og B = (5,1,3). Siden B-A = (1,4,-2), får vi A = (4,-3,5)

Oppgave 10.2: 69
$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$.
Siden $2x^2 + x = 2(x2 + x/2 + 1/16) - 1/8$, får vi
$2(x+1/4)^2 + 2(y+1/4)^2 + 2(z+1/4)^2 = 9+3/8 = 75/8$. Dette gis oss senter (-1/4,-1/4,-1/4) og radius = $5\sqrt{3}\,/4$.

Oppgave 10.3: 3
A = 10 **i** + 11 **j** -2 **k** og **B** = 3 **j** + 4 **k**.

a) **A*B** = 10*0 + 11*3 - 2*4 = 25. |**A**| = $\sqrt{10^2 + 11^2 + (-2)^2}$ = 15 og |**B**| = $\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}$ = 5.
b) cos(**A**,**B**) = 25/(5*15) = 1/3.
c) Lengden av proj. **B***A**/|**A**| = 25/15 = 5/3.
d) Projeksjon $\text{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$ = (5/3)***A**/|**A**| = **A**/9.

Oppgave 10.3: 23
Vi har gitt vektorer: **A** = 2 **i** + **j**, og **B** = **i** + 2 **j** - **k**. Vi får skalarprodukt **A*B** = 2*1+1*2+0*(-1) = 4 , og lengder | **A** | = $\sqrt{(2*2+1*1)} = \sqrt{5}$, og | **B** | = $\sqrt{(1*1+2*2+(-1)*(-1))} = \sqrt{6}$. Da blir $\cos(\theta) = 4/\sqrt{30}$, slik at = $\arccos(4/\sqrt{30})$ = 0,75.. rad = 43,088.. grader.

Oppgave 10.3: 41
Linje ax + by = c. Stigningstallet er -a/b, og retningen blir : **T** = 1 **i** - a/b **j**. Tar vi skalerproduktet med **v** = a **i** + b **j**, får vi **T*v** = 1*a -(a/b)*b = 0.

Oppgave 10.5: 23
Et plan Ax + By + Cz = D går gjennom punktene (1,1,-1), (2,0,2) og (0,-2,1). Vi skal beregne A, B, C og D.
Vi setter de tre punktene inn i likninga for planet og får:

A + B - C = D | -2
2A + 2C = D | 1
-2B + C = D | | -1
Likning 1 og 2 gir :
-2B + 4C = -D | 1
Fra 3. og 4. likning får vi:
3C = -2D.
C = -(2/3)D, settes inn i likning 2 og 3 og vi får:
2A - (4/3)D = D, og
-2B -(2/3)D = D.
Dette gir oss: A = (7/6)D og B = -(5/6)D. Vi velger D = 6 og får:
7x - 5y - 4z = 6.

Oppgave 10.5: 25
P_0 = (2,4,5) og linje: x = 5 + t, y = 1 + 3t og z = 4t. Retningsvektor **n** = 1 **i** + 3 **j** + 4 **k** for linja er

normalvektor for planet. Planet blir:

$1(x-2) + 3(y-4) + 4(z-5) = 0$, slik at $x + 3y + 4z = 2+12+20 = 34$.

Oppgave 10.5: 42

Punkt $Q_0 = (2,2,3)$ og Plan: $2x + y + 2z = 4$. Normalvektor for planet: $\mathbf{n} = 2\,\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$.

Velg et punkt i planet, f.eks. $P = (1,0,1)$. Ved formel i margen side 826, får vi avstand fra punkt til planet:

$d = |\mathbf{PQ_0} * \mathbf{n}/|\mathbf{n}|| = |1*2+1*2+2*2|/3 = 8/3$.

Oppgave 10.5: 54

Linje: $x = 2$, $y = 3+2t$ og $z = -2-2t$. Plan: $6x + 3y - 4z = -12$. Vi setter punkt på linja inn i formelen for planet: $-12 = 6*2 + 3*(3+2t) -4*(-2-2t) = 29 +14t$, så $t=-41/14$. Vi sette denne t-verdien inn i formelen for linja og får skjæringspunkt $(2,-20/7,27/7)$.

Oppgave 11.1: 8

$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (t2+1)\,\mathbf{j}$. Derivasjon gir hastigheten $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$. Ny derivasjon gir akselerasjonen $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\,\mathbf{j}$.

Oppgave 12.1: 2

$f(x,y) = \sqrt{y-x}$.

a) D_f: f er definert når $y \geq x$.

b) Rekkeviden for f blir lik rekkevidden for rotfunksjonen, dvs. $[0,\infty)$.

c) $f(x,y) = c$ er det samme som at $y = x+c^2$, dvs. nivå-kurvene er rette linjer.

d) Randa (boundary) til D_f er linja $y=x$. (Se på figur.)

e) D_f er lukket da randpunktene er med i D_f.

f) D_f er ubegrenset, omfatter halve xy-planet.

Oppgave 12.2: 27

a) $f(x,y) = \sin(x+y)$. Kontinuerlig over alt.

b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Kontinuerlig der den er definert, dvs. for $x^2+y^2>0$.

Oppgave 12.2: 28

a) $f(x,y) = (x+y)/(x-y)$. Kontinuerlig der nevneren er ulik 0, dvs. for $x \neq y$.

b) $f(x,y) = y/(x^2+1)$. Kontinuerlig over alt.