**Emne: MA 1410: Analyse**
Uke 46, 2000

**Beskjeder:** Dette er skrevet i LaTeX og konvertert til PDF-format. Grafikken er laget i Mathematica med Postscript format.

**Eksamen 14.12.1988: 2**

(a)

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = x\tan(x) - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$
$$= x\tan(x) + \ln(|\cos(x)|) + C$$

(b) Vi har gitt $y' + \tan(x)y = \frac{x}{\cos(x)}$. Integrerende faktor $v(x)$ blir

$$v(x) = e^{\int \tan(x)\,dx} = e^{-\ln|\cos(x)|} = \frac{1}{|\cos(x)|}.$$

Vi velger $v(x) = 1/\cos(x)$, og får $\int \frac{1}{\cos(x)}\frac{x}{\cos(x)}\,dx = x\tan(x) + \ln|\cos(x)|$. Dermed får vi løsning:

$$y(x) = \cos(x)[x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C].$$

**Eksamen 17.08.1988: 2** Vi har oppgitt $f(x,y) = \frac{x}{x^2+2y^2+3}$.

(a) Partiell derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+2y^2+3) - x\cdot 2x}{(x^2+2y^2+3)^2} = \frac{(-x^2+2y^2+3)}{(x^2+2y^2+3)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+2y^2+3)^2}.$$

(b) Når vi skal finne største og minste verdi til $f(x,y)$ over området avgrenset av $x \geq 0$ og $g(x,y) = x^2 + 2y^2 \leq 4$, må vi se på kritiske punkt i det indre og på mulige ekstremverdier over randa. Merk at over den delen av randa der $x = 0$, der er $f(0,y) = 0$.

Mulige kritiske punkt. Vi har $\bigtriangledown f(x,y) = 0$ hvis og bare hvis $xy = 0$ og $x^2 = 2y^2 + 3$. Fra den siste av disse likningene ser vi at $x \neq 0$. Da må $y = 0$ og $x^2 = 3$. Vi finner ett kritisk punkt $(x,y) = (\sqrt{3}, 0)$. Vi får $f(\sqrt{3},0) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Mulige ektremverdier over randa. Vi bruker Lagrange multiplikator metode, og ser etter løsninger av likninga $\bigtriangledown f(x,y) = \lambda \bigtriangledown g(x,y)$. Dette er det samme som likningene

$$\frac{(-x^2+2y^2+3)}{(x^2+2y^2+3)^2} = \lambda\cdot 2x,$$
$$\frac{-4xy}{(x^2+2y^2+3)^2} = \lambda\cdot 4y.$$

Vi multipliserer en venstre side med høyre side i den andre likninga og omvendt. Deretter forkorter vi $\frac{\lambda}{(x^2+2y^2+3)^2}$, slik at vi får

$$-8x^2y = 4y(-x^2 + 2y^2 + 3).$$

Her er $y = 0$ eller $-2x^2 = -x^2 + 2y^2 + 3$. Den siste likninga gir $2y^2 = -x^2 - 3$. Når vi setter dette inn i $g(x, y) = 4$, får vi $0 = 7$. Dette er umulig slik at vi må ha $y = 0$, og $x = 2$ siden $g(x, y) = 4$. Vi får $f(2, 0) = 2/7 < f(\sqrt{3}, 0)$. Så $f(x, y)$ har maksimum i $(\sqrt{3}, 0)$ og minimum i $(0, y)$.

Merk at vi kunne ha brukt substitusjon $x^2 + 2y^2 = 4$ og fått $f(x, y) = \frac{x}{4+3}$ over randa $g(x, y) = 4$. Her skal $x \in [0, 2]$. Nå er det innlysende at maksimum over randa blir i $x = 2$.

La oss tegne kurven $g(x, y) = 4$, samt nivåkurver til $f(x, y)$ sammen med gradienten til $f$ i en del punkter. Vi har justert lengden til gradientene. Gradientene peker i den retningen der $f(x, y)$ vokser raskest. Merk at gradientene peker mot punktet $(\sqrt{3}, 0)$.