Emne: MA 1410: Analyse
Uke 47, 2000

Matematikken er skrevet i LaTeX og konvertert til PDF-format.
Grafikken er laget i Mathematica med Postscript format.

Eksamen 15.08.1991: 2 La $f(x,y) = x + y^2$. Nivåkurvene er $x = c - y^2$, som er parabler som er åpne mot venstre. Vi skal studere $f(x,y)$ over kurven gitt ved $g(x,y) = 4x^2 + y^2 = 4$.

(a) Lagrange sier at vi skal sette $\bigtriangledown f = \lambda \cdot \bigtriangledown g$. Dette kan skrives som

$$1 = \lambda \cdot 8y, \quad \text{og} \quad 2y = \lambda 2y.$$

Fra den siste likninga får vi $y = 0$ eller $\lambda = 1$. $y = 0$ innsatt i $g(x,y) = 4$ gie $x = \pm 1$. $\lambda = 1$ innsatt i den første likninga gir $x = 1/8$, som innsatt i $g(x,y) = 4$ gir $y = \pm\sqrt{63}/4$.

Vi får $f(1,0) = 1$ som blir relativt minimum.

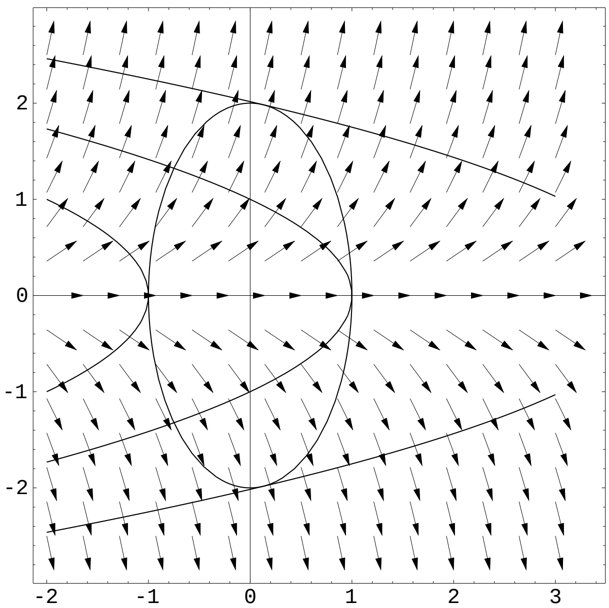
Vi får $f(-1,0) = -1$ som blir absolutt minimum.

Vi får $f(1/8, \pm\sqrt{63}/4) = 65/16$ som må bli maksimum.

Kurven $g(x,y) = 4$ er lukket og begrenset og f er kontinuerlig. Da må f oppnå maksimum og minimum i punktene vi har funnet.

Alternativt, hvis vi vil unngå å bruke Lagrange, kan vi fra $g(x,y) = 4$ si at $y^2 = 4 - 4x^2$ som innsatt i f gir $F(x) = f(x, 4 - 4x^2) = 4 + x - 4x^2$ med $x \in [-1, 1]$. Derivasjon av F gir $F'(x) = 1 - 8x = 0$ når $x = 1/8$. I tillegg må vi ta hensyn til $F's$ verdier i endepunktene $x = \pm 1$.

(b) Kurven $g(x,y) = 4$ beskriver en ellipse. Nivåkurvene $f(x,y) = c$ er parabler med åpning mot venstre. Figuren under viser nivåkurvene $c = -1, 1, 65/16$ samt gradienten til f i en del punkter.



Eksamen 08.05.1992: 3 Vi har gitt funksjon $f(x,y) = 3ye^3 - y^3 - e^{3x}$.

(a) Vi skal finne hvor de partielle deriverte er lik 0. Vi får

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3ye^x - 3e^{3x},$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3e^x - 3y^2.$$

Vi sette de to partielle deriverte lik 0 og får fra den første likninga at $y = e^{2x}$ slik at $y = e^{2x} = (e^x)^2 = y^4$. Følgelig må $y = 0$ eller $y = 1$. Men $y = 0$ gir ikke 0 i den første likninga, så vi står igjen med bare $y = 1$. Vi finner ett kritisk punkt $(0,1)$.

De andre deriverte blir

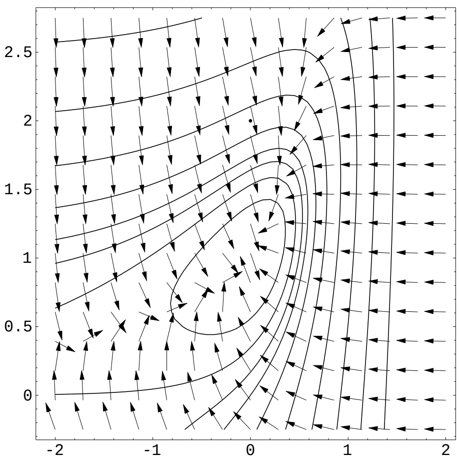
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 3ye^x - 9e^{3x},$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} = 3e^x,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -6y.$$

I punktet $(0,1)$ får vi

$$\frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial x^2} = -9 < 0,$$
$$\frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial xy} = 3,$$
$$\frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial y^2} = -6.$$

Vi får $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6)(-9) - 3^2 = 54 > 0$ og $f_{xx} = -9 < 0$. Punktet $(0,1)$ blir lokalt maksimum.

(b) $\triangledown f(0,2) = 3\vec{i} - 9\vec{j}$. Kula starter å trille i retningen $- \triangledown f(0,2)$.



Eksamen 11.12.1991: 1

Vi har gitt funksjon $f(x) = \begin{cases} x\ln(x^2+1), & \text{for } x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} - 1, & \text{for } x < 0 \end{cases}$.

(a) (i) Vi skal vise at f er kontinuerlig i $x = 0$. $x\ln(x^2+1)$ er kontinuerlig, så når vi tar høyresidig grense, får vi funksjonsverdien $0\ln(0^2+1) = 0$. Vi må vise at også venstresidig grense er lik 0.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Altså er f kontinuerlig i $x = 0$.

(ii) Vi har at f er deriverbar i $x = 0$ og med $f'(0) = 0$ siden:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x^2+1) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x^2+1) = 0,$$

og

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x) - x}{x^2} \\ = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x) - 1}{2x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x) - 0}{2} = 0. \end{aligned}$$

(b) Vi har nå gitt $g(x) = f(x) - 1$ for $x \geq 0$.

(i) g er kontinuerlig på $[0, \infty)$ og $g(0) = -1 < 0$ og $g(2) = 2\ln(5) - 1 > 0$. Ved Skjæringssetningen må g ha minst ett nullpunkt. Derivasjon gir $g'(x) = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} > 0$. Da blir g strengt voksende og kan dermed ha høyst ett nullpunkt.

(ii) La $x_0 = 1$. Vi skal bruke Newtons metode, dvs. vi skal bruke iterasjon av funksjonen $h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Vi får $x_1 = h(x_0) = 1 - \frac{\ln(2)-1}{\ln(2)+1} = 1.181232\ldots$.

(iii) x_1 må være større enn det søkte nullpunktet fordi:

(c)

$$\begin{aligned} &\int_0^2 x\ln(x^2+1)\,dx && \text{delvis integrasjon} \\ =&\frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)\,\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2+1}\,dx && \text{+1 og -1} \\ =&2\ln(5) - \int_0^2 \frac{x((x^2+1)-1)}{x^2+1}\,dx && \text{deler opp brøken} \\ =&2\ln(5) - \int_0^2 x\,dx + \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx \\ =&2\ln(5) - \frac{x^2}{2}\,\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\,\Big|_0^2 \\ =&2\ln(5) - 2 + \ln(5)/2 = \frac{5}{2}\ln(5) - 2. \end{aligned}$$