Emne: MA 1410: Analyse
Uke 48, 2000

Matematikken er skrevet i LaTeX og konvertert til PDF-format.
Grafikken er laget i Mathematica med Postscript format.

Eksamen 05.12.1983: 3

(a) Gitt rekke $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{n^3+n^2}$. Denne rekka divergerer siden $\frac{n^3}{n^3+n^2} \to 1$ når $n \to \infty$.

(b) Gitt rekke $\sum_{n=0}^{\infty}(x-\pi/2)^2\sin(x)^n$. Når $x=\pi/2$ er alle ledd lik 0 og rekka konvergerer. For $x \neq \pi/2$, så er $\sum_{n=0}^{\infty}(x-\pi/2)^2(\sin(x))^n = (x-\pi/2)^2\sum_{n=0}^{\infty}(\sin(x))^n$. Dermed ser vi at det er spørsmål om en geometrisk rekke konvergerer. Rekka konvergerer når $|\sin(x)| < 1$, dvs. for $x \neq k\pi/2$ for k oddetall ulik 1.

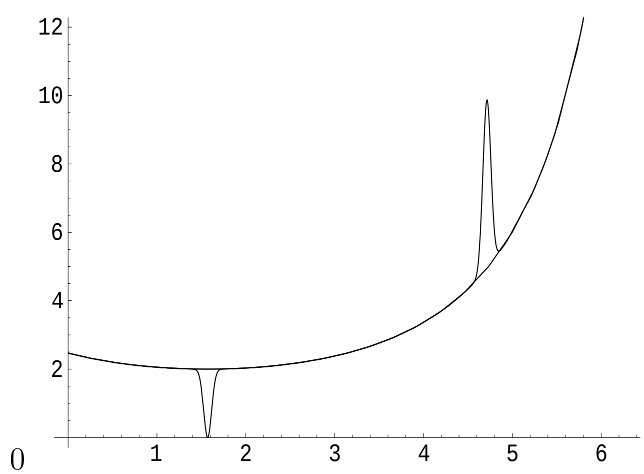
(c) Siden det er en kamuflert geometrisk rekke får vi $s(\pi/2) = 0$ og for andre $x \in [0,\pi]$ blir

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x-\pi/2)^2\sin(x)^n = (x-\pi/2)^2\frac{1}{1-\sin(x)}.$$

$s(x)$ er ikke kontinuerlig i $x=\pi/2$ siden

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{(x-\pi/2)^2}{1-\sin(x)} = \frac{"0"}{0} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{2(x-\pi/2)}{-\cos(x)} = \frac{"0"}{0} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{\sin(x)} = 2 \neq s(\pi/2).$$

La oss se hvordan grafen til $s(x)$ ser ut sammen med grafen til summen av 500 ledd $\sum_{n=0}^{500}(x-\pi/2)^2\sin(x)^n$. ($s(x)$ er den glatte delen)



Eksamen 05.12.1983: 4

(a) Vi har gitt en første ordens differensiallikning som er både separabel og lineær. Vi løser den som en lineær likning.

$$(1) \quad x\frac{du}{dx} + (x-1)u = 0.$$

Sett $v(x) = e^{\int \frac{(x-1)}{x}\,dx} = e^{x-\ln(x)} = \frac{e^x}{x}$. Da blir løsningen

$$u(x) = \frac{Cx}{e^x} = Cxe^{-x}.$$

(b) Nå har vi gitt

$$(2) \quad x\frac{dy}{dx} + (x-1)y = x^2.$$

Dette er en lineær likning med $P(x) = 1 - 1/x$ og $Q(x) = x$. Vi fant $v(x) = e^x/x$ i (a), og da får vi $\int v(x)Q(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$. Løsningen blir

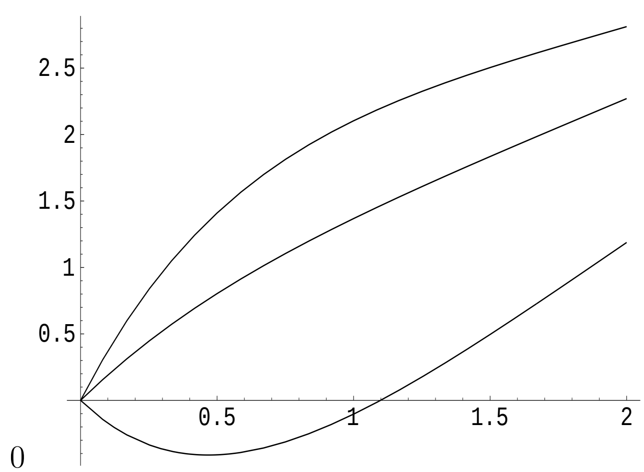
$$y(x) = xe^{-x}[C + e^x] = x + Cxe^{-x}.$$

(c) Vi skal la $b > 0$ og sette $A(b) = \int_0^b xe^{-x}\,dx$. Delvis integrasjon gir

$$A(b) = -xe^{-x}\mid_0^b + \int_0^b e^{-x}\,dx = (-x-1)e^{-x}\mid_0^b = 1 - (1+b)e^{-b}.$$

Vi får $\lim_{b\to\infty} A(b) = 1$.

(d) Vi får $y(0) = 0$ uansett C verdi. Fra (2) får vi $y'(x) = (1-x)y(x) + x$ som innsatt $x = 1$ gir $y'(1) = 1$. Dvs. at alle løsningskurvene skjærer den vertikale linja $x = 1$ under en vinkel der tan() er lik 1, dvs. skjæringsvinkelen må være 45 grader.



Eksamen 15.12.1984: 2

(a) Gitt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2+n^3}}$. Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ med $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergerer. Ved grensesammenligning får vi at $\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{1+n+n^2+n^3} \to 1$ når $n \to \infty$. Dermed må den gitte rekka konvergere.

(b) Gitt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n = \frac{5^n}{(2n+1)!}$. Forholdskriteriet gir at rekka konvergerer siden

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}(2n+3)!}{5^n(2n+1)!} = \frac{5}{(2n+2)(2n+3)} \to 0 \text{ når } n \to \infty.$$

(c) Rekka $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ divergerer siden $\sqrt[n]{n} \to 1$ når $n \to \infty$.

Eksamen 11.12.1985: 4c

(a) -
(b) -
(c) Vi har gitt differensiallikning

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin(x)}{x^2}.$$

Dette er en lineær likning med $P(x) = 2/x$ og $Q(x) = \sin(x)/x^2$. Vi bruker integrerende faktor

$$v(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{\ln(x^2)} = x^2.$$

Siden $\int v(x)Q(x)\,dx = -\cos(x)$, får vi løsning av likninga

$$y(x) = \frac{1}{x^2}(C - \cos(x)).$$

For at $\lim_{x\to 0} y(x)$ skal eksistere, så må $\lim_{x\to 0}(C - \cos(x)) = 0$, dvs. $C = 1$. Med denne C-verdien får vi $\lim_{x\to 0} y(x) =$ "$\frac{0}{0}$" $= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = 1/2$.

Eksamen 12.12.1990: 3

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-1}$ konvergerer siden den geometriske rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konvergerer og vi ved grensesammenligning får 1.

(b) Vi har gitt rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln(n)}}{2^n}$. La oss sette $a_n = \frac{n^{\ln(n)}}{2^n}$. Siden funksjonen $\ln(x)$ vokser meget sakte, er det grunn til å tro at rekka konvergerer. Det er ikke lett å se hvordan vi skal gå fram her, men la oss prøve.

$2^n = \sqrt{2}^n \cdot \sqrt{2}^n$. Og $\frac{n^{\ln(n)}}{\sqrt{2}^n} < 1$ hvis og bare hvis $n^{\ln(n)} < \sqrt{2}^n$ som igjen er ekvivalent med (vi tar logaritmen på begge sider) $(\ln(n))^2 < n\ln(\sqrt{2})$ eller omskrevet til $(\ln(n))^2/n < \sqrt{2}$. Denne siste ulikheten er oppfylt for store n. Men da blir $a_n < \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ for store n. Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ er en konvergent geometrisk rekke, så også vår gitte rekke må konvergere.

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n^2+1} - n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Rekka divergerer siden $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer og ved grensesammenligning:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{2} \in (0,\infty).$$

(d) Funksjonen $\tan(x)$ er positiv og monotont voksende på $(0, \pi/2)$ og $\tan(0) = 0$. Når vi setter $x = 1/n$, blir $\tan(1/n)$ monotont avtagende mot 0. Dermed er kriteriet for en alternerende rekke oppfylt og rekka $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \tan(1/n)$ konvergerer.

Eksamen 11.12.1991: 2

(a) Vi kan dele opp

$$\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2+(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}.$$

Nå kan vi integrere

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\,dx &= (\frac{-1}{x} + \arctan(x))\,|_1^b \\ &= 1-\pi/4-1/b+\arctan(b),\end{aligned}$$

og når $b \to \infty$ får vi

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}\,dx = 1-\pi/4-0+\pi/2 = 1+\pi/4.$$

(b) I dette punktet må vi bruke L'Hôpital og Fundamentalteoremet side 333:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x \ln(t)\,dx}{(x-1)^2} = \frac{"0"}{0} = \lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{2(x-1)} &= \frac{"0"}{0} \\ = \lim_{x\to1}\frac{1/x}{2} &= 1/2.\end{aligned}$$

(c) Omskrivinger ved bruk av regnereglene for logaritmen gir

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}[n\ln(2n-1)-(n/2)\ln(4n^2)] \\ &= \lim_{n\to\infty} n\ln(\frac{2n-1}{2n}) = \lim_{n\to\infty}\ln(1-\frac{1}{2n})^n \\ &= \ln(\lim_{n\to\infty}\sqrt{(1-\frac{1}{2n})^{2n}}) = \ln(\sqrt{e^{-1}}) = \ln(e^{-1/2}) = -1/2.\end{aligned}$$