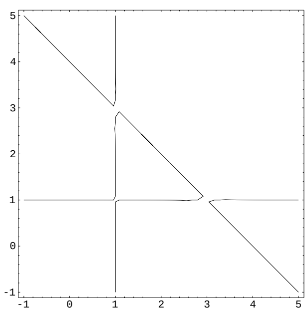
Emne: MA 1410: Analyse
Uke 49, 2000

Løsningsforslag for eksamensoppgavene i Ma 1410 fra 09.12.1999 finner du på **Eksamen1999.pdf**.

Eksamen 07.05.1991: 2 (Fra Kap-12 samlingen) Vi har gitt funksjon $f(x,y) = (x-1)(y-1)(4-x-y)$.

(a) Vi finner nivåkurvene ved å sette $f(x,y) = 0$. Vi får 3 kurver $(x-1) = 0$,$(y-1) = 0$ og $(4-x-y) = 0$. Dette gir 3 rette linjer $x = 1$, $y = 1$ og $y = 4-x$. Disse linjene deler xy-planet inn i 7 delområder. Vi kan teste fortegnet i hvert av disse områdene ved å beregne en funksjonsverdi i hvert område. f er negativ i punktene $(2,0)$,$(0,2)$ og $(3,3)$.



(b) Partiell derivasjon av f gir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y-1)[1\cdot(4-x-y)+(x-1)\cdot(-1)] = (y-1)(5-2x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x-1)(5-x-2y).$$

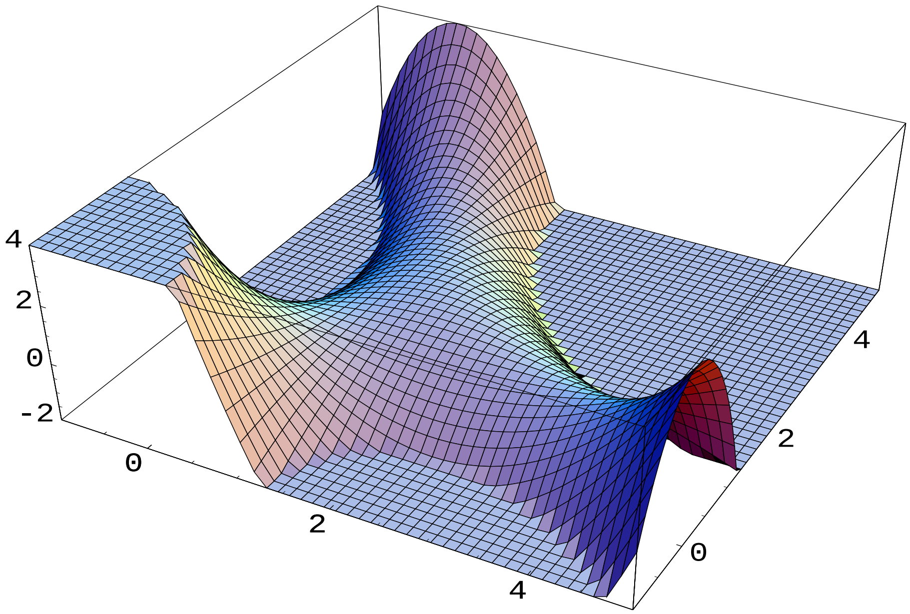
Når vi løser likningene $(y-1) = 0$ eller $(5-2x-y) = 0$ samtidig som $(x-1) = 0$ eller $(5-x-2y) = 0$ så får vi løsningene $(1,1)$,$(1,3)$,$(3,1)$ og $(5/3,5/3)$. De annen-ordens partielle deriverte blir

$$f_{xx} = 2-2y, \quad f_{xy} = 6-2x-2y, \quad f_{yy} = 2-2x.$$

I $(1,1)$ får vi $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = 0^2-2^2 = -4 < 0$ - dette blir sadelpunkt.
I $(1,3)$ får vi $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = 2\cdot(0)-(-2)^2 = -4 < 0$ - dette blir sadelpunkt.
I $(3,1)$ får vi $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = 2\cdot(0)-(-2)^2 = -4 < 0$ - dette blir sadelpunkt.
I $(5/3,5/3)$ får vi $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2 = (-4/3)^2-(-2/3)^2 = 4/3 > 0$. Da $f_{xx} < 0$ i dette punktet har vi her et lokalt maksimumspunkt.

(c) Da $f(x,y) = 0$ i alle randpunktene til det oppgitte området, må maksimum bli $f(5/3,5/3) = 8/27$.

Grafen til $f(x, y)$:



Eksamen 15.12.1993: 5 Vi skal løse to differensiallikninger. Den første er lineær og den andre er homogen.

(a) Vi har gitt $e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = 2x$. Vi dividerer med e^x for å få likninga på normal form.

$$y' + y = 2xe^{-x}.$$

Vi ser at $P(x) = 1$ of $Q(x) = 2xe^{-x}$. Vi innfører hjelpestørrelsen (kalt integrerende faktor) $v(x) = e^{\int 1\, dx} = e^x$. Videre får vi $\int v(x)Q(x)\, dx = \int 2x\, dx = x^2$. Løsningen blir

$$y(x) = e^{-x}[x^2 + C].$$

(b) Vi skriver likninga

$$0 = y' + \frac{2x^2 - y^2}{xy} = y' + (\frac{2x}{y} - \frac{y}{x}).$$

Som vanlig for homogene likninger setter vi $y(x) = x \cdot v(x)$. Derivasjon gir $y' = v + xv'$ som innsatt i likninga gir

$$0 = v + xv' + (\frac{2}{v} - v).$$

Nå har vi fått en separabel likning $vv' = -2/x$. Integrasjon gir $v^2/2 = \int v\, dv = \int -2/x\, dx = -\ln(x^2) + C$. Vi bytter ut v med y/x og får

$$y^2 = 2x^2[C - \ln(x^2)].$$

Eksamen 11.08.1992: 1

Vi har gitt funksjon $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)}$.

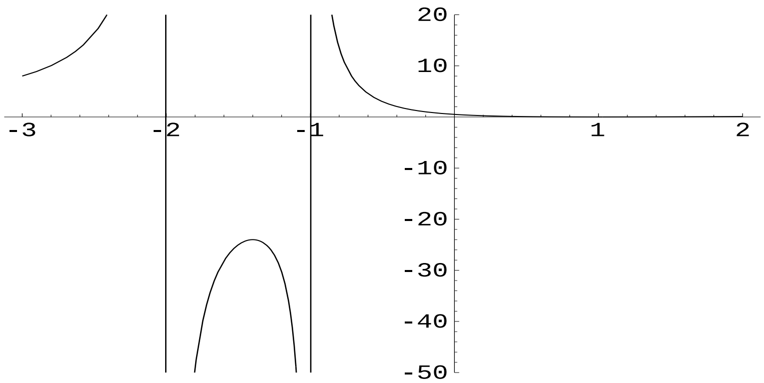
(a) Derivasjon gir

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x+2)2(x-1) - (x-1)^2[(x+1)+(x+2)]}{(x+1)^2(x+2)^2}$$
$$= \frac{(x-1)(5x+7)}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$

(b) Vi setter $f'(x) = 0$ og får to løsninger $x = 1$ og $x = -7/5$. Funksjonsverdiene i disse punktene blir $f(1) = 0$ og $f(-7/5) = -24$. I $x = 1$ har $f(x)$ dobbelt nullpunkt. Det betyr at f ikke kan skifte fortegn her, så $x = 1$ må være et lokali minimumspunkt. I $x = -7/5$ skifter f' fortegn fra positiv til negativ, så dette punktet er et lokalt maksimumspunkt.

(c) Siden nevneren i definisjonen av f er 0 i $x = -1$ og i $x = -2$ blir dette to vertikale asymptoter. Vi får at $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, så linja $y = 1$ er en horisontal asymptote.

Grafen til f ser slik ut:



(d) Først foretar vi en delbrøkoppspalting.

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$$
$$\Updownarrow$$
$$(x-1)^2 = A(x+2) + B(x+1).$$

Vi setter $x = -1$ og får $A = 4$. Vi setter $x = -2$ og får $B = -9$.

Nå kan vi integrere.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{4}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{-9}{x+2}\,dx$$
$$= 4\ln(x+1)\Big|_0^1 - 9\ln(x+2)\Big|_0^1$$
$$= 4\ln(2) - 9 + \ln(3) + 9\ln(2) = 15\ln(2) - 9\ln(3).$$

Eksamen 28.11.1992: 1

(a) Vi foretar delbrøkoppspaling og får:

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-5)}\,dx = \int \frac{-1}{3(x-2)}\,dx + \int \frac{1}{3(x-5)}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}(\ln|x-5| - \ln|x-2|) + C = \frac{1}{3}\ln|\frac{x-5}{x-2}| + C.$$

(b) Vi ser at: $\frac{d}{dx}(4x^2-4x-3) = 8x-4 = 4(2x-1)$.

$$\int \frac{2x-1}{4x^2-4x-3}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x^2-4x-3| + C.$$

(c)

$$\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2\sqrt{1-(x-1/2)^2}}\,dx \quad \text{Substitusjon: } u = g(x) = x - 1/2$$
$$= \int \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{\arcsin(u)}{2} + C$$
$$= \frac{\arcsin(x-1/2)}{2} + C.$$

(d) I denne oppgaven har nevnerern ingen nullpunkt. Da skriver vi om telleren slik at vi får: Telleren = deriverte av nevneren + en konstant.

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+5}\,dx$$
$$= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{-2}{4[(\frac{x+1}{2})^2+1]}\,dx$$
$$= \ln(x^2+2x+5) - \arctan(\frac{x+1}{2}) + C.$$