MA 1410: Analyse
Utvalgte eksamensoppgaver i **Mat 1**.

Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

(Flere oppgaver kommer her.)

Eksamen 14.12.1988: 2.

(a) Vis ved integrasjon at
$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C.$$

(b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen
$$\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = x.$$

Eksamen 11.12.1991: 1.
La
$$f(x) = \begin{cases} x\,\ln(x^2+1), & \text{for } x \geq 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} - 1, & \text{for } x < 0 \end{cases}.$$

(a) (i) Vis at f er kontinuerlig i $x = 0$.
(ii) Avgjør om f er deriverbar i $x = 0$.

(b) La g være definert ved
$$g(x) = f(x) - 1 \quad \text{for} \quad x \geq 0.$$

(i) Begrunn at g har ett og bare ett nullpunkt.
(ii) La startverdien være 1 (dvs. $x_0 = 1$), og finn et anslag for nullpunktet ved å utføre en iterasjon av Newtons metode (dvs. beregn x_1).
(iii) Avgjør og begrunn (uten å utføre flere iterasjoner!) om x_1 er større eller mindre enn det søkte nullpunktet.

(c) Beregn integralet
$$\int_0^2 f(x)\,dx.$$

Eksamen 11.12.1991: 2.
Beregn grenseverdiene:

(a)
$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2x^2+1}{(x^2+1)x^2}\,dx.$$

(b)
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_1^x \ln(t)\,dt}{(x-1)^2}.$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} [n\,\ln(2n-1) - \frac{n}{2}\,\ln(4n^2)].$$

Eksamen 11.12.1991: 3.
Avgjør (og begrunn) konvergens/divergens:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}.$$
(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+\ln^2(n)}.$$
(c) For hvilke x-verdier konvergerer rekka:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}(x+1)^n.$$

Eksamen 11.12.1991: 4.
Løs differensiallikningene:

(a)
$$(1+x^2)dy - 2xydx = 0 \quad \text{Hint: Separabel.}$$
(b)
$$x\frac{dy}{dx} + y = \cos(2x).$$
(c) (Ikke aktuell.)

Eksamen 11.08.1992: 1.
La
$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)}.$$
(a) Vis at
$$f'(x) = \frac{(x-1)(5x+7)}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$
(b) Finn lokale maksimums- og minimums-punkter, og de tilhørende maksimums- og minimums-verdiene.
(c) Finn eventuelle asymptoter og skisser grafen.
(d) Beregn ved integrasjon $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Eksamen 11.08.1992: 2.
Avgjør (med begrunnelse) om følgende grenser eksisterer, og finn i så fall grensen.

(a)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{e^x} \ln(t)\,dt}{x(x-1)}.$$
(b)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2+n}.$$
(c)
$$\lim_{b\to\infty} \int_{\pi/2}^{b} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx.$$

Eksamen 11.08.1992: 3.
Avgjør (med begrunnelse) om følgende rekker konvergerer eller divergerer.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^2+3n}.$$

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln^2(n)}.$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

(e) Avgjør for hvilke verdier av x rekka konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+x^n}$.

Eksamen 11.08.1992: 4.
Løs følgende differensiallikninger.

(a) $\cos^2(x)\sin(x)\,(y^2+1)dx - (\cos^3(x)+1)dy = 0.$
(b) $x^3\,dy + 4x^2y\,dx = \ln(x)\,dx.$

Eksamen 15.12.1993: 5.
Løs differensiallikningene

(a)

$$e^x\,\frac{dy}{dx} + e^x y = 2x.$$

(b) NB! Homogen likning, ikke pensum i Ma1410.

$$(2x^2-y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$$

Eksamen 11.08.1992: 5.
La $f(x) = \int_1^x (e^t + te^t)\,\ln(t)\,dt, \quad x \in [1,\infty).$

(a) Begrunn at det finnes nøyaktig en $x_0 \in [1,\infty)$ slik at $f(x_0) = e$.
(b) Finn et enklere uttrykk for $f(x)$ ved hjelp av delvis integrasjon, og gjør et anslag for x_0 ved å utføre 2 iterasjoner av Newtons metode.

Eksamen 04.12.1995: 5.
Løs differensiallikningene

(a)

$$y' - x\ln(x)e^{-y} = 0.$$

(b)

$$y' - \tan(x)\,y = \frac{e^x}{\cos(x)} \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Eksamen 11.12.1996: 1.
Beregn integralene:

(a)

$$\int \frac{x^2+x+2}{x(x+1)^2}\,dx.$$

(b)

$$\int x \ \arctan(x^2)\, dx.$$

(c)

$$\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(2x)}\, dx.$$

(d)

$$\int \sqrt{4x - x^2 - 2}\, dx.$$

Eksamen 11.12.1996: 5.
Beregn følgende grenseverdi:

$$\lim_{x\to\infty} [\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 5} - x].$$