MA 1410: Analyse
Uke 36, 2001
http://home.hia.no/~aasvaldl/ma1410_H01

Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

De fleste oppgavene jeg gir i Ma-1410 har odde nummer og det finnes fasitsvar bak i boka. Jeg vil derfor ikke skrive løsningsforslag på mere enn noen utvalgte oppgaver. Denne uken har jeg valgt ut 3 oppgaver som jeg vil gi løsningsforslag på.

Oppgave P.4: 27.

Vi har gitt $y = f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$. Når vi skal finne en formel for den inverse funksjonen vil vi gå fram som i Example 3 side 35. Vi multipliserer begge sider med $x+3$ og får

$$y(x+3) = (2x+1).$$

Så flytter vi alle ledd med x til vestre, og de andre leddene til høyre.

$$yx - 2x = 1 - 3y.$$

På venstre side er x felles faktor, og vi får $x(y-2) = (1-3y)$. Nå dividerer vi med $(y-2)$ og får

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1-3y}{y-2}.$$

Det er vanlig praksis å bytte om på x og y nå, slik at vi får

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{x-2}.$$

Vi kan nå se om $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Vi får:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= \frac{2(\frac{1-3x}{x-2}) + 1}{(\frac{1-3x}{x-2}) + 3} \\ &= \frac{2(1-3x) + 1(x-2)}{(1-3x) + 3(x-2)} = \frac{-5x}{-5} = x.\end{aligned}$$

Kvadratsetningene.

La a og b være reelle tall. Da har vi

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{2}$$

Vi har noen nære slektninger til disse av høyere orden:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \tag{3}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \tag{4}$$

og

$$(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4 \tag{5}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \tag{6}$$

I formlene (2), (4) og (6) har vi konstanter som også dukker opp i Pascals trekant.

Her og nå skal vi se på formlene (1), (3) og (5). Setter vi $a = \sqrt{x}$ og $b = \sqrt{y}$, kan vi skrive

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Dette er en omskriving som kan være nyttig. Tilsvarende kan vi skrive om uttrykk med 3-roten ved bruk av formel (3). Da setter vi $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = a - b$ og multipliserer med et uttrykk (se formel (3)) slik at vi får $a^3 - b^3$.

Oppgave 1.1: 50

Vi bruker formel (1) med $a = \sqrt{x^2 + 7}$ og $b = 4$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2+7} - 4} &= \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x^2+7} + 4)}{(\sqrt{x^2+7} - 4)(\sqrt{x^2+7} + 4)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x^2+7} + 4)}{(x^2+7) - 16} = \lim_{x\to 3} (\sqrt{x^2+7} + 4) = 8.\end{aligned}$$

Polynomdivisjon.

La $P(x)$ og $Q(x)$ være to polynom. (Se Theorem 2 side 100.) Polynom kan divideres omtrent som tall kan divideres. Vi har følgende:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

der $q(x)$ og $r(x)$ er polynom med $\operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} Q(x)$. $q(x)$ kalles kvotienten og $r(x)$ kalles resten. Vi sier at $P(x)$ er **delelig** med $Q(x)$ hvis $r(x) = 0$.

Theorem 0.1. *La $Q(x) = x - a$. Da er $P(x)$ delelig med $Q(x)$ hvis og bare hvis $P(a) = 0$.*

I $Q(x)$ er den høyeste potensen til x lik 1. Det betyr at graden til $Q(x)$ er 1. Ved divisjon blir graden til resten lik 0, dvs. $r(x) = r$ blir en konstant. Vi kan skrive

$$P(x) = q(x)(x - a) + r.$$

Setter vi inn $x = a$ her får vi $P(a) = r$, og det følger at $P(a) = 0$ hvis og bare hvis $r = 0$.

Eksempel. La $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ og la $a = 1$. Vi ser at $P(1) = 0$. Foretar vi divisjonen, får vi

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3).$$

Divisjonen:

$$
\begin{array}{rrrrlr}
(x^3 & -3x^2 & -x & +3) & : (x-1) = (x^2-2x-3) & x^2 = x^3/x \\
-(x^3 & -x^2) & & & & \text{Vi trekker ifra } x^2(x-1) \\
 & (-2x^2 & -x & +3) & & -2x = -2x^2/x \\
 & -(2x^2 & +2x) & & & \text{Vi trekker ifra } -2x(x-1) \\
 & & (-3x & +3) & & -3 = -3x/x \\
 & & -(-3x & +3) & & \text{Vi trekker ifra } -3(x-1) \\
 & & & 0 & & = \text{resten}
\end{array}
$$

Oppgave: Utfør divisjonen $(2x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x + 1)$. Får du rest $r(x) = -1$?

Nullpunkter til polynomer.

Hvis et polynom har grad 1, dvs $P(x) = ax+b$, så har det ett nullpunkt $x = -b/a$.

For polynom av grad 2, $P(x) = ax^2 + bx + c$, finner vi nullpunktene ved formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

For polynom av grad 3 og 4 finnes det også formler (eller algoritmer) for å beregne nullpunktene, men disse formlene er kompliserte. I Ma-1410 skal vi holde oss til enkle polynom som ofte har heltall som noen av nullpunktene. Hvis polynomet har grad 3 eller høyere, så regn ut $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ osv. for å se om 0, 1, -1, osv. er nullpunkt. Når du har funnet et nullpunkt, kan du foreta polynomdivisjon for å redusere graden, og dermed forenkle regningen.

Oppgave 1.1: 49

I regningen nedenfor, hvis vi setter $P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$, så ser vi at $P(-1) = 0$. Vi bruker polynomdivisjon og får $P(x) = (x+1)(x^2-2x-3)$. Annengradspolynomet $(x^2 - 2x - 3)$ faktoriserer vi videre og får $P(x) = (x + 1)^2(x - 3)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{(x^3 - x^2 - 5x - 3)}{(x+1)^2} &= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(x-3)}{(x+1)^2} \\
&\lim_{x\to -1} (x-3) = -4.
\end{aligned}
$$