**MA 1410: Analyse**
Uke 38, 2001
http://home.hia.no/˜aasvaldl/ma1410_H01

**Høgskolen i Agder**
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

---

De fleste oppgavene jeg gir i Ma-1410 har odde nummer og det finnes fasitsvar bak i boka. Jeg vil derfor skrive løsningsforslag på bare enkelte utvalgte oppgaver.

**Oppgave § P.5: 27.**
Fra figuren side 56 ser vi at $\tan(\beta) = 3/x$ og $\tan(\alpha + \beta) = (3 + 12)/x$. (Vi bruker

$\beta$ som navn på vinkelen der det står Wall.) Vi bruker nå invers funksjon til tan(), her kalt arctan(), men på din kalkulator kalt $\tan^{-1}()$, og får $\beta = \arctan(3/x)$ og $\alpha + \beta = \arctan(15/x)$. Tar vi differansen, får vi

$$\alpha = (\alpha + \beta) - \beta = \arctan(15/x) - \arctan(3/x).$$

Tilsynelatende er dette et annet svar enn det oppgaven oppgir. Men svarene er ekvivalente. Vi har nemlig at $a = \arctan(b)$ kan skrives som $b = \tan(a)$. Snur vi opp ned på teller og nevner, får vi $\frac{1}{b} = \cot(a)$. Tar vi her $\cot^{-1}()$, får vi

$$\cot^{-1}(\frac{1}{b}) = a = \arctan(b).$$

Vi ser nå at vi kan skrive

$$\alpha = \cot^{-1}(\frac{x}{15}) - \cot^{-1}(\frac{x}{3}).$$

**Oppgave § P.5: 37.**
(a) Fra cosinus-setningen får vi med $a = 2$, $b = 3$ og $\angle C = 60°$,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C) = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3\cos(60) = 4 + 9 - 12 \cdot (1/2) = 7.$$

Det følger at $c = \sqrt{7} = 2,64575\ldots$.

**Oppgave § P.5: 43.**
$\tan(x) = 2,5$. Vi anvender den inverse funksjonen til tan(), arctan(), og får

$$x = \arctan(2,5) = \tan^{-1}(2,5).$$

Lommekalkulatoren min sier at $x = 1,1902899\ldots$ radianer, eller $x = 1,1902899\ldots \cdot \frac{180}{2\pi} = 34,099\ldots$ grader. Siden tan() er periodisk med periode $\pi$, finnes det en annen løsning $x = 1,1902899\ldots + 3.1415\ldots = 4,33188\ldots$.

**Oppgave Side 81: 24.**
Vi har gitt $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ med $c \neq 0$ og $ad - bc \neq$.

(1) Først vil vi vise at $f$ er 1-1 (one-to-one). Vi vil vise at $f(x) = f(t) \Rightarrow x = t$. Dette er en ekvivalent med definisjonen av 1-1 side 32.

$$f(x) = f(t) \Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{at+b}{ct+d}.$$

Vi multipliserer begge sider med de to nevnerne og får $(ax+b)(ct+d) = (at+b)(cx+d)$, som gir når vi multipliserer ut begge produktene

$$acxt + adx + bct + bd = acxt + adt + bcx + bd.$$

Herav følger at $(ad-bc)x = (ad-bc)t$. $(ad-bc) \neq 0$, og dermed må $x = t$.

(2) Vi setter $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Vi multipliserer med nevneren og får $ycx + yd = ax + b$. Vi samler ledd med $x$ på en side og de andre leddene på motsatt side av likhetstegnet. Dermed får vi $x(cy-a) = (b-dy)$. Divisjon med $(cy-a)$ gir

$$x = f^{-1}(y) = \frac{b-dy}{cy-a}.$$

(3) Vertikal asymptote for $f$ når vi har 0 i nevneren, dvs. for $cx+d=0$. Dette blir den vertikale linja $x = -d/c$.

Horisontal asymptote

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+b/x}{c+d/x} = \frac{a}{c}.$$

(4) Analogt, vertikal asymptote $x = a/c$ og horisontal asymptote $y = -d/c$.

**Oppgave § 1.3: 54.**

Når vi setter $x = \frac{1}{t}$ ser vi at $x \to \infty \Leftrightarrow t \to 0^+$. Dermed kan vi bruke dette variabelskiftet og få:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin(1/x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$

I matematikk foretar vi ofte omskrivinger av uttrykk. Vi legger til og trekker fra uttrykk, vi multipliserer og dividerer med uttrykk og noen ganger foretar vi bytte av variabel.

**Oppgave § 1.3: 59.**

Vi foretar en polynomdivisjon og får

$$y = (-x+1) + (\frac{-5}{x+1}).$$

Vi leser ut av denne formelen at funksjonen har en skrå asymptote $y = -x+1$ og en vertikal asymptote $x = -1$.

**Oppgave § 1.4: 20.**

Vi har gitt funksjon $y = \sqrt[4]{3x-1}$. Øverst side 128 står det at $\sqrt[4]{\ }$ er en kontinuerlig funksjon og også polynomer er kontinuerlige. Ved Theorem 9 side 129 blir $y = y(x)$ kontinuerlig der den er definert. Så problemet i denne oppgaven er egentlig å finne ut hvor funksjonen er definert. Fjerde-rot kan vi bare beregne for positive tall, så vi må ha $3x - 1 \geq 0$, dvs. $y$ er definert og er kontinuerlig på $[\frac{1}{3}, \infty)$.

**Oppgave § 1.4: 26.**
I denne oppgaven skal vi bruke Theorem 10 side 130. La $f(x) = \cos(x) - x$. Da er $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$ og $f$ er kontinuerlig. Ved toremet finnes $c$ i intervallet $(0, \pi/2)$ slik at $f(c) = 0$. Da er $\cos(c) = c$.

**Oppgave § 1.4: 51.**
Hvis du har grafisk lommekalkulator, så tegn grafene til de to funksjonene $y = x$ og $y = \cos(x)$, og bruk trace-funksjonen på kalkulatoren for å finne hvor grafene skjærer hverandre. Alternativt, tegn de to grafene over mindre og mindre intervall.

**Oppgave § 1.5: 12.**
Vi har gitt punkt $P(8, 3)$ og funksjon $f(x) = \sqrt{x+1}$. Stigningstallet $m$ for tangenten beregnes slik:

$$\frac{f(8+h) - f(8)}{h} = \frac{\sqrt{9+h}\sqrt{9}}{h} = \frac{(\sqrt{9+h} - 3)(\sqrt{9+h} + 3)}{h(\sqrt{9+h} + 3)}$$
$$\frac{(9+h) - 9}{h(\sqrt{9+h} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3} \to \frac{1}{6} \quad \text{når } h \to 0.$$

Dermed har vi fått $m = 1/6$, og tangenten blir $y = (1/6)(x-8) + 3 = \frac{x}{6} + \frac{5}{3}$.

**Oppgave § 1.5: 17.**
Vi har gitt $y = f(x) = 1/(x-1)$. Vi skal beregne stigningstallet for tangenten $m$ i et punkt $x$, og deretter løse likninga $m = -1$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h-1} - \frac{1}{x-1}}{h} = \frac{(x-1) - (x+h-1)}{h(x-1)(x+h-1)}$$
$$\frac{-1}{(x-1)(x+h-1)} \to \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

Det betyr at vi skal løse likninga $-1 = m = \frac{-1}{(x-1)^2}$. Løsningene er $x = 0, 2$. $f(0) = -1$ og $f(2) = 1$. Tangentene:

- (0,-1)    y=-(x-0)-1=-x-1.
- (2,1)    y=-(x-2)+1=-x+3.

**Oppgave § 1.5: 21.**
La $A(r) = \pi r^2$ - arealet av en disk med radius $r$. Veksthastigheten for $A(r)$ er

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{A(r+h) - A(r)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\pi(r+h)^2 - \pi r^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\pi(r^2 + 2rh + h^2 - r^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \pi(2r+h) = 2\pi r.$$

Vi ser at når vi deriverer arealet får vi omkretsen. Hvis du deriverer volumet av en kule, hva får du da?