Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

De fleste oppgavene jeg gir i Ma-1410 har odde nummer og det finnes fasitsvar bak i boka. Jeg vil derfor skrive løsningsforslag på bare enkelte utvalgte oppgaver.

Implisitte funksjonsteorem.
I § 2.6, side 199, sier forfatterne av boka at i alle eksemplene du møter i denne boka, kan du derivere funksjonen $y(x)$ implisitt. Utgangspunktet er en funksjon av 2 variable $F(x, y)$. For hver x-verdi, vil $F(x, y) = 0$ ha et visst antall y-løsninger. Det kan være 0, 1, 2, eller mange løsninger. Hvis det finnes kun en y-løsning for x-verdiene i et intervall, så kan vi betrakte y som funksjon av x i dette intervallet. Hvis det er flere y-løsninger, men disse har god avstand seg imellom, så vil det også i mange tilfeller være mulig å se på y som en funksjon av x.

Den variable i funksjoner har vi betegnet med x, eller t eller θ. Men det er ingenting i veien for å la den variable hete y, bare vi holder tunga rett i munnen. F.eks. hvis $F(x, y) = x^2 + y^2$, så kan vi se på både x og y som variable, eller vi kan se på en av gangen som variabel. Ser vi på en av gangen som variabel så kan vi derivere med hensyn på den variablen (vi oppfatter da den andre variablen som en konstant) og vi får $\frac{dF}{dx} = 2x$ og $\frac{dF}{dy} = 2y$.

Det finnes et teorem (en setning) som sier at hvis noen krav er oppfylt, så kan vi betrakte y som en funksjon av x slik at $F(x, y) = 0$.

Theorem 0.1. *Anta $F(x, y)$ er en funksjon av 2 variable x og y, og anta $F(a, b) = 0$. Hvis de to deriverte $\frac{dF}{dx}$ og $\frac{dF}{dy}$ begge eksisterer og er kontinuerlige i et rektangel rundt (a, b) og i tillegg $\frac{dF}{dy} \neq 0$ i punktet (a, b), så vil likninga $F(x, y) = 0$ definere y som en funksjon av x i et intervall rundt a, og denne funksjonen blir deriverbar med*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\frac{dF}{dx})}{(\frac{dF}{dy})}.$$

Jeg skal sjekke at betingelsene i teoremet er oppfylt i oppgavene vi skal regne, så dere trenger ikke bekymre dere om den biten. Men i noen oppgaver vil dere bli bedt om å finne den deriverte $\frac{dy}{dx}$.

Når $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, får vi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(\frac{dF}{dx})}{(\frac{dF}{dy})} = -\frac{2x}{2y} = \frac{-x}{y}.$$

I praksis vil vi ofte ikke bruke denne formelen, men derivere direkte $x^2 + y^2(x) - r^2 = 0$ (her har jeg markert at y er en funksjon av x) og få: $2x + 2y(x)y'(x) - 0 = 0$. Denne likninga løser vi med hensyn på y' (og ofte utelater vi den variable slik at svaret blir) $y' = -x/y$.

Oppgave § P.6: 8.
I denne og de to neste oppgavene bør du regne ut (x, y) for noen t-verdier og plotte punktene på et ruteark. Vi har gitt $x(t) = -\sqrt{t}$ og $y(t) = t$ med $t \geq 0$. For $t = 0, 1, 2, 3, 4$ får vi punkter $(x, y) = (0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1.42, 2)$, $(-1.73, 3)$ og $(-2, 4)$.

Kvadrerer vi x ser vi at $y = t = x^2$. Det betyr at den gitte kurven er halvparten av parabelen framstilt av $y = x^2$.

Oppgave § P.6: 13.
Som i oppgaven foran, plott noen (x, y) punkter. Ser du at punktene ligger på en rett linje?

Addisjon av likningene $x = 1 - t$ og $y = 1 + t$ gir $x + y = 2$, dvs. vi har gitt den rette linja $y = -x + 2$.

Oppgave § P.6: 15.
Som i oppgavene foran, plott noen (x, y) punkter. Ser du at punktene ligger på en rett linje?

Vi har gitt $x = t$ og $y = \sqrt{1 - t^2}$ med $-1 \leq t \leq 0$. Kvadrerer vi begge likningene vil vi se at $x^2 + y^2 = 1$. Den kurven vi har gitt er den delen av denne sirkelen som ligger i 2. kvadrant.

Oppgave § 2.1: 13.
a) Vi har gitt $y = x^3 - 4x + 1$. Vi deriverer $y' = 3x^2 - 4$. I punktet $(2, 1)$ får vi stigningstall for kurven $y'(2) = 12 - 4 = 8$. Tangenten i dette punktet blir

$$y = 8(x - 2) + 1 = 8x - 15.$$

b) Vi har $y' = 3x^2 - 4$. Når vi skal finne rekkeviden til stigningstallet, så er det hvilke verdier y' kan ha. Vi ser at y' er minst mulig når $x = 0$, dvs. $y' \geq -4$. y' kan vi få så stor vi ønsker ved å velge x stor. Rekkevidden blir $[-4, \infty)$. (Merk at Theorem 10 side 130 i boka gir at rekkevidden til y' må bli et intervall.)

c) $y' = 8$ er det samme som at $3x^2 - 4 = 8$. Denne likninga har løsninger $x^2 = 4$, dvs. $x = 2$ eller $x = -2$. $y(2) = 1$ og $y(-2) = 1$. Tangenten i $(2, 1)$ regnet vi ut i a). Tangenten i $(-2, 1)$ blir $y = 8(x + 2) + 1 = 8x + 17$.

Oppgave § 2.1: 33.
Vi har gitt $y = 2x^2 - 13x + 5$. Vi deriverer $y' = 4x - 13$. Den deriverte er lik -1 når $4x - 13 = -1$, dvs. for $x = 3$. $y(3) = -16$. Tangenten i $(3, -16)$ blir

$$y = -(x - 3) - 16 = -x - 13.$$

Oppgave § 2.3: 6.
a) Vi har gitt $y = (1 + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x} + 1)$. Vi deriverer ved bruk av produktregelen.

$$\begin{aligned} y' =& (x + \frac{1}{x})'(x - \frac{1}{x} + 1) + (x + \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x} + 1)' \\ =& (1 - \frac{1}{x^2})(x - \frac{1}{x} + 1) + (x + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{x^2} + 0) \\ =& 1 + 2x - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

b) Hvis vi multipliserer ut parentesene får vi

$$y = x + x^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Derivasjon av denne summen gir

$$y' = 1 + 2x - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}.$$

(Husk at den deriverte av x^n er nx^{n-1}. Når $n = -1$, gir dette $\frac{d}{dx}(1/x) = -1/x^2$, og når $n = -2$ får vi $\frac{d}{dx}(1/x^2) = -2/x^3$.)

Oppgave § 2.3: 11.
Vi har gitt $f(s) = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$. Vi har $\frac{d}{ds}\sqrt{s} = \frac{1}{2\sqrt{s}}$. Vi bruker dette sammen med kvotientregelen:

$$f'(s) = \frac{(\sqrt{s}+1)\frac{1}{2\sqrt{s}} - (\sqrt{s}-1)\frac{1}{2\sqrt{s}}}{(\sqrt{s}+1)^2} = \frac{\sqrt{s}+1-\sqrt{s}+1}{2\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}.$$

Oppgave § 2.3: 23.
Vi har gitt at $y = ax^2+bx+c$. Punktet $(1,2)$ ligger på grafen til y betyr at $2 = a1+b1+c$. Tangenten i origo er $y = x$ betyr at $(0,0)$ ligger på grafen og at $y'(0) = 1$. Innsatt $(0,0)$ gir $0 = a0+b0+c$, dvs. $c = 0$. Derivasjon gir $y'(x) = 2ax+b$. Innsatt $(0,0)$ gir $1 = y'(0) = b$. Da følger at $a = 1$ og $y(x) = x^2+x$.

Oppgave § 2.4: 8.
Vi har gitt $y = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$. Vi deriverer og bruker kvotientregelen.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-\sin(x))(1+\sin(x)) - \cos(x)\cos(x)}{(1+\sin(x))^2} \\ &= \frac{-\sin(x) - \sin^2(x) - \cos^2(x)}{(1+\sin(x))^2} = \frac{-1}{1+\sin(x)}. \end{aligned}$$

Oppgave § 2.4: 18.
Vi har gitt $r = \theta\sin(\theta) + \cos(\theta)$. Her er r en funksjon av θ. Derivasjon med bruk av produktregelen gir:

$$r' = \sin(\theta) + \theta\cos(\theta) - \sin(\theta) = \theta\cos(\theta).$$

Oppgave § 2.4: 35.
Vi har gitt $y = \tan(x)$ med $-\pi/2 < x < \pi/2$. Derivasjon gir $y' = 1+\tan^2(x)$. Tangenten er parallell med linja $y = 2x$ når tangenten har samme stigningstall som linja, dvs. når $y' = 2$. Vi ser at $y' = 2$ når $\tan(x) = \pm 1$. Denne siste likninga har løsningene $x = \pm\pi/4$. (Se boka sidene 46 og 54.) De to punktene der tangenten er parallell med linja $y = 2x$ blir $(-\pi/4, -1)$ og $(\pi/4, 1)$.

Oppgave § 2.5: 12.
Vi har gitt $f(u) = u^5+1$ og et punkt $x = 1$ samt $u = g(x) = \sqrt{x}$. Vi får $g(1) = 1$. Derivasjon gir $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ som innsatt $x = 1$ gir $g'(1) = 1/2$. Derivasjon av f gir $f'(u) = 5u^4$. Vi setter inn $u = g(1) = 1$ og får $f'(1) = 5$. Dette gir

$$(f \circ g)'(1) = 5/2.$$

Oppgave § 2.5: 13.
Vi har gitt $y = \sin^3(x)$. Her har vi indre funksjon $g(x) = \sin(x)$ og ytre funksjon $f(u) = u^3$. Vi får $f' = 3u^2$ og $g' = \cos(x)$. Dette gir oss:

$$y' = f'(g(x))g'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x).$$

Oppgave § 2.5: 15.
Vi hat gitt $q = \sqrt{2r-r^2}$. Her har vi en indre funksjon $g(r) = 2r-r^2$ og en ytre funksjon $f(u) = \sqrt{u}$. Vi har $f' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, og $g' = 2-2r$. Dermed får vi

$$q' = f'(g(r))g'(r) = \frac{1}{2\sqrt{2r-r^2}}(2-2r) = \frac{(1-r)}{\sqrt{2r-r^2}}.$$