MA 1410: Analyse
Uke 40, 2001
http://home.hia.no/~aasvaldl/ma1410_H01

Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

De fleste oppgavene jeg gir i Ma-1410 har odde nummer og det finnes fasitsvar bak i boka. Jeg vil derfor skrive løsningsforslag på bare enkelte utvalgte oppgaver.

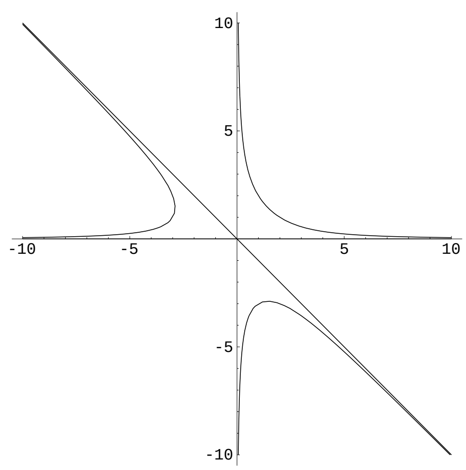
Oppgave § 2.6: 13.
Vi har gitt $F(x,y) = x^2y + xy^2 = 6$. Når oppgaveteksten sier at vi skal bruke implisitt derivasjon, så er det forutsetningen at vi skal betrakte y som en funksjon av x. Noen vil ønske å skrive $y(x)$ i stedet for y. Derivasjon gir (Husk at $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \cdot y'$ ved bruk av kjerneregelen. I Theorem 3 side 188 bruker vi $f(u) = u^2$ og $g(x) = y(x)$.):

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dF}{dx} &= (x^2)' \cdot y + x^2 \cdot y' + (x)' \cdot y^2 + x(y^2)' \\ &= 2xy + x^2y' + y^2 + x(2yy') \quad \text{Her bruker vi kjerneregelen.} \\ &= (2xy + y^2) + y'(x^2 + 2xy). \end{aligned}$$

Vi flytter over til venstre side de to leddene uten y', dividerer med leddet ved siden av y' og får

$$y' = \frac{-(2xy + y^2)}{(x^2 + 2xy)}.$$

Grafen til $F(x,y) = 6$, samt linjene $y = -x$ og $y = 0$.



Figur 1. Grafen til f

Oppgave § 2.6: 47.
Vi har gitt $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 7$. Skjæring med x-aksen når $y = 0$, dvs. når $x^2 + 0 + 0 = 7$. To skjæringspunkt $(\sqrt{7}, 0)$ og $(-\sqrt{7}, 0)$. Derivasjon som i oppgave 13 gir

$$y' = \frac{-(2x + y)}{(x + 2y)}.$$

Vi får $y'(\pm\sqrt{7}) = -2$, så de to tangentene er parallelle. (Grafen er en ellipse som ligger skjevt.)

Oppgave § 2.6: 55.
Vi har gitt $F(x,y) = x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ og et punkt på kurven $(1,1)$. Vi starter med å regne ut stigningstallet til tangenten i det gitte punktet. Derivasjon som i oppgave 2.6: 13 gir

$$0 = \frac{dF}{dx} = 2x + (2y + 2xy') - 3(2yy').$$

Dette gir

$$y' = \frac{(x+y)}{(3y-x)}.$$

Innsatt $x = 1$ og $y = 1$ gir $y' = \frac{1+1}{3-1} = 1$. Så tangenten har stigningstall 1. Linjer som er normal til tangenten (dvs. skjærer tangenten rettvinklet) har stigningstall $-1/y' = -1$. Normal til kurven i $(1,1)$ blir linja

$$y = -(x-1) + 1 = -x + 2.$$

Vi skal finne ut hvor denne normalen skjærer kurven. Da tar vi $y = -x + 2$ og setter inn i $F(x,y) = 0$ og får

$$0 = x^2 + 2x(-x+2) - 3(-x+2)^2 = -4x^2 + 16x - 12 = -4(x-1)(x-3).$$

Når $x = 1$ får vi $y = -x + 2 = 1$, og når $x = 3$ får vi $y = -3 + 2 = -1$. Normalen skjærer kurven i 2 punkt $(1,1)$ og $(3,-1)$.

Denne oppgaven er litt spesiell. Merk at $F(x,y) = (x-y)(x+3y) = 0$, slik at de (x,y) som passer i likninga ligger på 2 linjer $y = x$ og $y = -x/3$. Tegn disse to kurvene sammen med normalen på rutepapir!

Oppgave § 2.7: 24.
La $V(t)$ stå for volumet ved tiden t. Vi har oppgitt at volumet endrer seg med hastighet $V'(t) = 10$ in^3/min. Nedenfor vil $y(t)$ stå for kaffedybden ved tiden t.

a) I kaffekanna (pot) er volumet $V(t)$ =grunnflaten·høyden $= \pi 3^2 y(t)$. Derivasjon gir

$$V'(t) = 10 = 9\pi y'(t)$$

slik at $y'(t) = 10/(9\pi) = 0,3536\ldots$ in/min. ($y'(t)$ er konstant.)

b) I kjeglen (cone) har vi at volumet (geometrien i problemet gir at radius er halve høyden) $V(t)$ =grunnflaten·høyden/3 $= \frac{\pi}{3}(\frac{y(t)}{2})^2 y(t) = \frac{\pi}{12} y^3(t)$. Derivasjon gir

$$V'(t) = 10 = \frac{3\pi}{12} y^2(t) y'(t).$$

Vi får når $y(t) = 5$ at $y'(t) = \frac{40}{15\pi} = 0,509\ldots$ in/min. ($y(t)$ vokser raskest når $y(t)$ er liten.)

Oppgave § 2.7: 31.
I denne oppgavene skal vi bruke at to trekanter er likeformet til å knytte samme funksjonene $x(t)$ og $s(t)$. Vi ser på figuren side 215 at den store trekanten og trekanten fra høyre mot ball-linja har en vinkel felles og begge har en rett vinkel. Dermed kan vi sette: $\frac{x(t)}{50} = \frac{x(t)-30}{50-s(t)}$. Vi multipliserer bort nevnerne og får $x(t)(50 - s(t)) = 50(x(t) - 30)$. Dette gir oss $x(t) = \frac{35\cdot 50}{s(t)} = \frac{1500}{16t^2}$.

Derivasjon (regel 6 side 174) gir

$$x'(t) = -\frac{1500 s'(t)}{s^2(t)} = -\frac{1500}{8t^3}.$$

Innsatt $t = 1/2$ gir $x'(1/2) = -1500$ ft/sek.

(I denne oppgaven er det viktig å ikke bruke opplysningen $t = 1/2$ for tidlig, da vil fort kan havne i et statisk problem i stedet for et dynamisk problem.)

Oppgave 69, side 218.
Vi har gitt $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x-4}$. Derivasjon gir

$$y'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(2x-4)^2}.$$

Vi setter $y' = -3/2$ og får likninga $1 = (2x-4)^2$. Løsningene er $x = 3/2$ og $x = 5/2$, med tilhørende funksjonsverdier $y(3/2) = -1/4$ og $y(5/2) = 9/4$. I to punkter på kurven $(3/2, -1/4)$ og $(5/2, 9/4)$ har tangenten stigningstall $-3/2$.

Oppgave 77, side 219.
Vi har gitt $y = x^2 + C$. Tangenten har stigningstall $y' = 2x$. Linja $y = x$ har stigningstall 1, og vi setter $y' = 1$. Dette gir $x = 1/2$. Dette er eneste mulighet for rett stigningstall for tangenten. Men vi må også ha $x = y = x^2 + C$ i $x = 1/2$, noe som gir $C = 1/4$. Funksjonen blir $y = x^2 + 1/4$.

Oppgave 88, side 219.
Vi har gitt $y(x) = \sin(x - \sin(x))$. Derivasjon gir (bruk kjerneregelen!) $y' = \cos(x - \sin(x))(1 - \cos(x))$. Vi ser at $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$. Det betyr at x-aksen er tangent til grafen i $(0, 0)$.

Oppgave § 3.1: 29.
Vi har gitt $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Derivasjon gir $f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$. Fortegnsdiagram for f' gir at $f(x)$ vokser i $[-1, 1]$, og avtar i intervallene $(-\infty, -1]$ og $[1, \infty)$. Vi får også at $f(x)$ har lokalt maksimumspunkt i $x = 1$ og $f(1) = 1/2$. $f(x)$ har lokalt minimumspunkt i $x = -1$ og $f(-1) = -1/2$.

f er voksende på $[-1, 1]$ og avtagende på $[1, \infty)$, så $f(1) \geq f(x)$ for alle x i $[-1, \infty)$. f er avtagende på $(-\infty, -1]$ og $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, slik at $f(1) > f(x)$ for alle x i $(-\infty, -1]$. Dette viser at $f(1)$ er absolutt maksimumsverdi. Tilsvarende blir $f(-1)$ absolutt minimumsverdi.

Oppgave § 3.1: 47.
La x og y være katetene i trekanten. Da er $5^2 = x^2 + y^2$ og arealet av trekanten er $A = \frac{1}{2}xy = (1/2)x\sqrt{25 - x^2}$. $A(0) = A(5) = 0$ - minimumsverdien. Derivasjon gir $A'(x) = \frac{(25-2x^2)}{2\sqrt{25-x^2}}$, som gir kritisk punkt $x = 5/\sqrt{2}$. Maksimum må eksistere (kontinuerlig funksjon på lukket, begrenset intervall) og vi har bare ett kritisk punkt. Da må $A(x)$ ha maksimum for $x = 5/\sqrt{2}$, og $A(5/\sqrt{2}) = 25/4$.

Oppgave § 3.1: 49.
Vi har gitt

$$s(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0.$$

Når $s(t)$ oppnår sitt maksimum må $s'(t) = 0$. Derivasjon gir $s'(t) = -gt + v_0$, slik at $s'(t) = 0$ medfører at $t = v_0/g$. Største høyde blir $s(v_0/g) = \frac{v_0^2}{2g} + s_0$.

Oppgave § 3.2: 3.
$s(t) = \sqrt{t(1-t)}$. Denne funksjonen er kontinuerlig i $[0, 1]$, deriverbar i $(0, 1)$ og $s(0) = s(1) = 0$. Ved Rolle's setning har $s'(t) = 0$ løsning i $(0, 1)$. (t=1/2.)

Oppgave § 3.2: 4.
$f(\theta)$ er ikke kontinuerlig på $[-\pi, 0]$.

Oppgave § 3.2: 14.
Vi har gitt $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x$. Ved Corollary 1 side 240 får vi at $g(x) = \frac{-1}{x} + x^2 + C$. $(-1,)$ skal ligge på grafen så vi må ha $-1 = g(-1) = 2 + C$, dvs. $C = -1$. Da får vi $g(x) = \frac{-1}{x} + x^2 - 1$.

Oppgave § 3.2: 21.
Når $a = 32$ og $v'(t) = a = 32$, blir $v(t) = 32t + C_1$. $20 = v(0) = 0 + C_1$ gir $v(t) = 32t + 20$. Så bruker vi at $s'(t) = v(t)$ og da må $s(t) = (1/2)g32t^2 + 20t + C_2$. $5 = s(0) = 0 + 0 + C_2$ gir $s(t) = (1/2)32t^2 + 20t + 5 = 16t^2 + 20t + 5$.

Oppgave § 3.2: 31.
$T(0) = -19$ og $T(14) = 100$. Dette gir $\frac{T(14)-T(0)}{14-0} = 8,5$. Ved middelverdisetningen må vi ha $T'(c) = 8,5$ for en t i $(0, 14)$.

Oppgave § 3.2: 35.
Når $f(x) = 1/x$ får vi $f'(x) = -1/x^2$. Middelverdisetningen gir at det finnes c i (a, b) slik at

$$-\frac{1}{c^2} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{(a - b)}{ab(b - a)} = \frac{-1}{ab}.$$

Det følger at $c = \sqrt{ab}$.