MA 1410: Analyse
Uke 41, 2001
http://home.hia.no/~aasvaldl/ma1410_H01

Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

Oppgave § 3.3: 13.
Vi har gitt $f'(x) = (x-1)(x+2)$. $f'(x) = 0$ for $x = 1$ og $x = -2$.

Fortegnsdiagram for f' gir at f er voksende i $(-\infty, -2]$ og i $[1, \infty)$. f er avtagende i $[-2, 1]$.

f har lokalt maksimumspunkt i $x = -2$ og lokalt minimumspunkt i $x = 1$.

Oppgave § 3.3: 39.
Gitt $y = (4/5)x^5 + 16x^2 - 25$. Vi deriverer to ganger

$$y' = 4x^4 + 32x = 4x(x^3 + 8) = 4x(x+2)(x^2 - 2x + 4),$$

og

$$y'' = 16x^3 - 32 = 16(x - \sqrt[3]{2})(x + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}).$$

Fortegnsdiagram gir at y er voksende i $(-\infty, -2]$ og i $[0, \infty)$, og at f er avtagende i $[-2, 0]$.

Fortegnsdiagram gir at f er konveks (konkav opp) i $[\sqrt[3]{2}, \infty)$ og konkav i $(-\infty, \sqrt[3]{2}]$.

Oppgave § 3.3:55.
Vi har gitt $x > 0$, $f(1) = 0$ og $f'(x) = 1/x$. Hva kan vi si om f?

$f'(x) > 0$ gir at f er voksende på $(0, \infty)$.

Derivasjon gir $f''(x) = -1/x^2 < 0$. Dette viser at f er konkav på $(0, \infty)$.

Oppgave § 3.4:4.
Vi har gitt $y' = y^2 - 2y = y(y-2)$. Dette er en autonom differensiallikning. Vi har to likevektsløsninger gitt ved $y(x) = 0$ og $y(x) = 2$. Fortegnsdiagram for y' gir at $y(x) = 0$ er stabil løsning og $y(x) = 2$ er ustabil løsning.

Derivasjon gir $y'' = y'(y-2) + y(y'-0) = y'(2y-2) = 2y(y-1)(y-2)$. Løsningene er konvekse når $0 < y(x) \le 1$ og når $2 < y(x) < \infty$). Løsningene er konkave når $(-\infty < y(x) < 0$ og når $1 \le y(x) < 2$.

Oppgave § 3.5: 3.
To punkter $A(1, 0)$ og $B(0, 1)$. Ved å studere geometrien til figuren ser vi at linja gjennom A og B er $y = -x + 1$.

a) Et punkt P mellom A og B har y-koordinat lik $y = -x + 1$.

b) Areal av rektangel: $A(x) = 2x(-x+1) = 2x - 2x^2$.

c) $A'(x) = 2 - 4x = 0$ når $x = 1/2$. $A(1/2) = 1/2$, $A(0) = 0 = A(1)$. Arealet er størst når $x = 1/2$. ($A(x)$ er kontinuerlig på lukket og begrenset intervall $[0, 1]$, og da eksisterer maksimumsverdi.)

Oppgave § 3.5: 27.
Vi har $r^2 + h^2 = 3$. Volumet er $V(h) = \pi r^2 h/3 = (\pi/3)h(3-h^2) = (\pi/3)(3h - h^3)$. Vi har $V(0) = 0 = V(\sqrt{3})$.

Derivasjon gir $V'(h) = \pi(1-h^2) = 0$ når $h = 1$. Maksimum $V(1) = (\pi/3)(3-1) = 2\pi/3$, og for denne h er $r = \sqrt{2}$.

Oppgave § 3.5: 40.
Du kan argumentere som i eksemplet med Snell's lov og bruke at $c_1 = c_2$. Det letteste er

å speile ett av punktene, f.eks. A til A' og deretter bruke at korteste vei fra A' til B er den rette linja. Studer så vinklene.

Oppgave § 3.5: 56.
Vi har $f(x) = 3 + 4\cos(x) + \cos(2x)$. Derivasjon gir

$$f'(x) = -4\sin(x) - 2\sin(2x) = -4\sin(x) - 2(2\sin(x)\cos(x)) = -4\sin(x)(1 + \cos(x)).$$

Vi ser at $f'(x) = 0$ når $\sin(x) = 0$, dvs. $x = 0$ eller $x = \pi$. $f(0) = 8$ og $f(\pi) = 0$.

Alternativt, ved formel (4) side 49, kan vi skrive $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ (bruk $A = B = x$) slik at

$$f(x) = 3+4\cos(x)+\cos(2x) = 3+4\cos(x)+2\cos^2(x)-1 = 2(\cos^2(x)+2\cos(x)+1) = 2(\cos(x)+1)^2.$$

Nå ser vi ar $f(x) \geq 0$ for alle x.

Oppgave § 3.5: 59.
Avstanden fra $(3/2, 0)$ til (x, y) er gitt ved $d = \sqrt{(x-3/2)^2 + (y-0)^2}$. Når (x, y) ligger på grafen til $y = \sqrt{x}$ får vi $d = \sqrt{(x-3/2)^2 + x}$. d og d^2 har samme minimum (gjelder for positive funksjoner), så vi vil heller finne minimum til $f(x) = d^2 = (x-3/2)^2 + x$.

$$f'(x) = 2(x - 3/2) + 1 = 2x - 2 = 2(x - 1).$$

Ved å se på fortegnet til f' ser vi at f har minimum når $x = 1$. $f(1) = 1/4 + 1 = 5/4$ og $d_{\min} = \sqrt{5}/2$.

Oppgave § 3.7: 5.
$f(x) = x^4 - 2$. Funksjonen

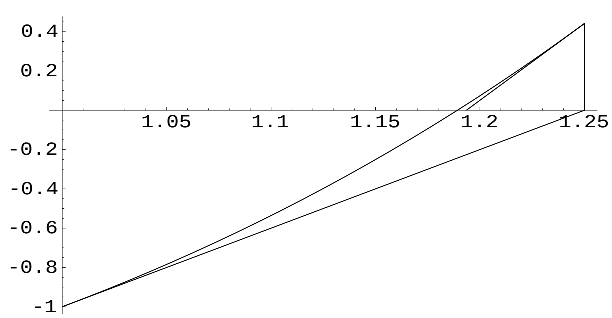
$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^4 - 2}{4x^3} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2x^3}.$$

$x_0 = 1$ gir $x_1 = h(x_0) = 5/4$ og $x_2 = h(x_1) = 2387/2000 = 1,1935....$ (Nøyaktig svar: $\sqrt[4]{2} = 1,1892....$)

Oppgave § 3.7: 23.
Vi har $f(x) = x^3 + 2x - 4$. Vi har $f(1) = 1 + 2 - 4 = -1 < 0$ og $f(2) = 8 + 4 - 4 = 8 > 0$. Da må f ha et nullpunkt i inervallet $(1, 2)$. Vi setter

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 + 2x - 4}{3x^2 + 2} = \frac{2x^3 + 4}{3x^2 + 2}.$$

Startverdi $x_0 = 1$ gir videre $x_1 = h(x_0) = 6/5 = 1,2$ og $x_2 = h(x_1) = 1,1797...$
(Kontroll: $f(x_2) = f(1,1797) = 0,001179..$)



Figur 1. Grafen til f(x) og tangentene i oppgave 3.7: 5.