Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

De fleste oppgavene jeg gir i Ma-1410 har odde nummer og det finnes fasitsvar bak i boka. Jeg vil derfor skrive løsningsforslag på bare enkelte utvalgte oppgaver.

Oppgave § 4.1: 16.
Vi får

$$\int (\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}})\, dx = \int ((1/2)x^{1/2} + 2x^{-1/2})\, dx = (1/3)x^{3/2} + 4x^{1/2} + C.$$

Oppgave § 4.1: 19.

$$\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}\, dx = \int (t^{-1/2} + t^{-3/2})\, dx = 2t^{1/2} - 2t^{-1/2} + C = 2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C.$$

Oppgave § 4.1: 31.
Deriver høyre side, og du får at (c) er rett svar.

Oppgave § 4.1: 36.
Når $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x$, får vi $y(x) = \int (1/x^2 + x)\, dx = -1/x + x^2/2 + C$. Vi har startverdi $1 = y(2) = -1/2 + 2^2/2 + C$ slik at $C = -1/2$. Dermed får vi løsning:

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Oppgave § 4.2: 1.
I denne oppgaven skal vi bruke substitusjon. Substitusjon er i hovedsak å kunne lese kjerneregelen baklengs.

$$\begin{aligned}
&\int x\sin(2x^2)\, dx && \text{Substitusjon: } u = g(x) = 2x^2 \\
=&\int \frac{1}{4} 4x\sin(2x^2)\, dx && du = 4x\, dx \\
=&\int \frac{1}{4}\sin(u)\, du && \\
=&\frac{-1}{4}\cos(u) + C && \\
=&\frac{-1}{4}\cos(2x^2) + C. &&
\end{aligned}$$

Oppgave § 4.2: 17.

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{Substitusjon: } u = g(x) = 1+\sqrt{x}$$

$$= \int 2\Big(\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)(1+\sqrt{x})^3\,dx \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int 2u^3\,du$$

$$= \frac{u^4}{2} + C = \frac{(1+\sqrt{x})^4}{2} + C.$$

Oppgave § 4.2: 20.

$$\int \sin^5(x/3)\cos(x/3)\,dx \qquad \text{Substitusjon: } u = g(x) = \sin(x/3)$$

$$= \int 3u^5\,du = \frac{u^6}{2} + C \qquad du = \frac{\cos(x/3)}{3}\,dx$$

$$= \frac{\sin^6(x/3)}{2} + C.$$

Oppgave § 4.4: 11.
Vi ser at i denne oppgaven må vi ha $f(c_k) = c_k^2$. Men da må $f(x) = x^2$. Vi får dermed

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_P = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 8/3.$$

Oppgave § 4.5: 12.
Vi bruker formel 1 side 315 og teorem 3 side 358.

$$\int_4^9 \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\,du = \int_4^9 (u^{1/2}-1)\,du = \Big(\frac{2}{3}u^{3/2} - u\Big)\Big|_4^9$$
$$= (27\cdot 2/3 - 9) - (8\cdot 2/3 - 4) = 23/3.$$

Oppgave § 4.5: 16.
a)
b) Vi skal regne ut $\frac{d}{dx}\int_1^{\sin(x)} 3t^2\,dx$. Her er det en fordel å gjøre ting abstrakt. La $f(t)$ være en kontinuerlig funksjon og sett $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Da sier fundamentalteoremet side 354 at F er deriverbar og at $F'(x) = f(x)$. Hvis vi nå bytter ut øvre grense x med en funksjon $g(x)$, så får vi $F(g(x)) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$, og derivasjon gir

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Med $g(x) = \sin(x)$ og $f(t) = 3t^2$, får vi

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\sin(x)} 3t^2\,dx = 3\sin^2(x)\cos(x).$$

Oppgave § 4.5: 37.
Vi beregner arealet under $y = 2$ og arealet under $y = 1 + \cos(x)$, og tar differansen.

$$\int_0^\pi [2 - (1 + \cos(x))]\, dx = \int_0^\pi (1 - \cos(x)\, dx$$
$$= (x - \sin(x))\Big|_0^\pi = (\pi - \sin(\pi)) - (0 - \sin(0)) = \pi.$$

Oppgave § 4.6: 6.
a) Vi bruker substitusjon $u = g(x) = x^2 + 1$. Da får vi $du = g'(x)\, dx = 2x\, dx$. Videre er $g(0) = 1$ og $g(\sqrt{3}) = 4$. Dermed får vi:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int_{g(0)=1}^{g(\sqrt{3})=4} \frac{2}{\sqrt{u}}\, du$$
$$= 4\sqrt{u}\Big|_1^4 = 4(\sqrt{4} - \sqrt{1} = 4.$$

b) Samme substitusjon som under a) gir:

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int_4^4 \frac{2}{\sqrt{u}}\, du = 0.$$

Vi har her beregnet to areal, ett på hver side av y-aksen. Disse er like store, men arealet til venstre for y-aksen ligger under x-alsen og kommer ut med negativt fortegn.

Oppgave § 4.6: 27.
a)
b) $y = 2x - x^2 = x(2 - x)$ skifter fortegn i $x = 2$. Når vi skal beregne arealet avgrenset av f, må vi sette:

$$\int_0^3 |f(x)|\, dx = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\, dx$$
$$= (x^2 - x^3/3)\Big|_0^2 + (x^3/3 - x^2)\Big|_2^3 = 8/3.$$