Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

De fleste oppgavene jeg gir i Ma-1410 har odde nummer og det finnes fasitsvar bak i boka. Jeg vil derfor skrive løsningsforslag på bare enkelte utvalgte oppgaver.

Oppgave § 6.1: 7.
Vi har gitt $y = y(t) = t(\ln(t))^2$. Ved derivasjonen må vi bruke både produktregelen og kjerneregelen.

$$y' = 1 \cdot (\ln(t))^2 + t \cdot 2\ln(t) \cdot \frac{1}{t} = (\ln(t))^2 + 2\ln(t).$$

Oppgave § 6.1: 19.
$y(t) = \frac{1+\ln(t)}{1-\ln(t)}$. Ved derivasjonen bruker vi kvotientregelen.

$$y' = \frac{(1-\ln(t)) \cdot \frac{1}{t} - (1+\ln(t)) \cdot (\frac{-1}{t})}{(1-\ln(t))^2} = \frac{(2/t)}{(1-\ln(t))^2} = \frac{2}{t(1-\ln(t))^2}.$$

Oppgave § 6.1: 23.
Vi skal nå bruke fundamentalteoremet sammen med kjerneregelen. Når $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, så er $F'(x) = f(x)$. Fundamentalteoremet gir oss at

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = F(t)\,\Big|_{h(x)}^{g(x)} = F(g(x)) - F(h(x)),$$

og ved derivasjon får vi

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}(F(g(x)) - F(h(x))) = F'(g(x)) \cdot g'(x) - F'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Nå anvender vi dette på tilfellet med $g(x) = x^2$, $h(x) = x^2/2$ og $f(t) = \ln(\sqrt{t})$. Vi får

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2/2}^{x^2} \ln(\sqrt{t})\,dt = \ln(\sqrt{x^2}) \cdot 2x - \ln(\sqrt{x^2/2}) \cdot x = \frac{x}{2}(\ln(x^4) - \ln(x^2/2)) = \frac{x}{2}\ln(2x^2).$$

Oppgave § 6.1: 34.

$$\int_2^{16} \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}\,dx \qquad \text{Substitusjon: } u = g(x) = \ln(x)$$

$$= \int_{\ln(2)}^{4\ln(2)} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du \qquad \text{Vi får: } du = \frac{dx}{x},\ g(2) = \ln(2),\ \text{og } g(16) = 4\ln(2)$$

$$= \sqrt{u}\,\Big|_{\ln(2)}^{4\ln(2)} = \sqrt{\ln(2)}.$$

Oppgave § 6.2: 13.
Vi har gitt $y(x) = \int_0^{\ln(x)} \sin(e^t)\,dt$. Derivasjon som i oppgave 6.1: 23 gir.

$$y' = \sin(e^{\ln(x)}) \cdot (\ln(x))' = \sin(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Oppgave § 6.2: 53.

$$\int_1^2 \frac{2^{\ln(x)}}{x}\,dx \qquad \text{Substitusjon: } u = \ln(x) \text{ gir } du = \frac{dx}{x}$$

$$= \int_0^{\ln(2)} 2^u\,du = \frac{2^u}{\ln(2)}\Big|_0^{\ln(2)} \qquad g(1) = 0 \text{ og } g(2) = \ln(2)$$

$$= \frac{2^{\ln(2)} - 2^0}{\ln(2)} = \frac{2^{\ln(2)} - 1}{\ln(2)}.$$

Oppgave § 6.2: 59.
Når $y' = e^t \sin(e^t - 2)$ og $y(\ln(2)) = 0$ så får vi ved substitusjonen $u = e^t - 2$, $du = e^t\,dt$ i integrasjon

$$y(x) = C + \int e^t \sin(e^t - 2)\,dt = C + \int \sin(u)\,du = C - \cos(u) = C - \cos(e^t - 2),$$

og $0 = y(\ln(2)) = C - \cos(0) = C - 1$. Dermed får vi $C = 1$ og

$$y(t) = 1 - \cos(e^t - 2).$$

Oppgave § 6.2: 63.
Gitt $f(x) = e^x - 2x$ på intervallet $[0, 1]$. Vi har verdier i endepunktene $f(0) = 1$ og $f(1) = e - 2 = 0,71...$. Derivasjon gir

$$f'(x) = e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2).$$

$f(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - 2\ln(2) = 2 - 2\ln(2) = 0,6..$ Maksimumsverdien er 1 i $x = 0$. Minimumsverdien er $2 - 2\ln(2)$ i $x = \ln(2)$.

Oppgave § 6.3: 8.
Gitt $y = \arctan(\ln(x))$. Derivasjon med bruk av kjerneregelen gir

$$y' = \frac{1/x}{1 + \ln^2(x)} = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))}.$$

Oppgave § 6.3: 23.

$$\int \frac{y}{\sqrt{1 - y^4}}\,dy \qquad \text{Substitusjon: } u = y^2 \text{ gir } du = 2y\,dy$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{1 - u^2}}\,du$$

$$= \frac{\arcsin(u)}{2} + C = \frac{\arcsin(y^2)}{2} + C.$$

Oppgave § 6.3: 53.
a) Når en funksjon $f(x)$ definert over et intervall $[a, b]$ roteres om x-aksen, vil den avgrense et legeme som i tverrsnitt rettvinklet på x-aksen består av sirkler med radius $f(x)$. Arealet av disse sirklene blir $g(x) = \pi f^2(x)$. Denne g-funksjonen beregner vi Riemann integralet til, og resultatet blir volumet av legemet.

$$V = \int_{-1}^{1} \pi f^2(x)\,dx.$$

Vi har oppgitt at $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$, og da får vi

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi \arctan(x)\,\Big|_{-1}^{1} = \pi(\arctan(1) - \arctan(-1)) = \pi(\pi/4 - (-\pi/4)) = \pi^2/2.$$

b) Slik jeg forstår oppgaveteksten, skal vi lage oss kvadrater med tverrsnittareal $(2f(x))^2$ og integrere fra -1 til 1. Dvs. vi skal beregne

$$V = \int_{-1}^{1} 4f^2(x)\,dx = 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 4\arctan(x)\,\Big|_{-1}^{1} = 4\cdot\pi/2 = 2\pi.$$

Oppgave § 6.3: 56.

Vi skal beregne $\pi = 3,141592...$ ved bruk av likninga

$$\pi = 4\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Vi velger å se på hvor nøyaktig resultat vi får når vi bruker Simpson's metode med $n = 4$. Da blir $h = 1/4$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$ og $x_4 = 1$. Vi får $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 16/17$, $f(x_2) = 16/20$, $f(x_3) = 16/25$ og $f(x_4) = 1/2$. Så summerer vi

$$\begin{aligned} S =& 4\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \\ =& \frac{4}{12}(1 + \frac{4\cdot 16}{17} + \frac{2\cdot 16}{20} + \frac{4\cdot 16}{25} + \frac{1}{2}) = 3,141568.... \end{aligned}$$