Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

Om lengde av kurver. Noen få formler der integrasjon brukes for å beregne lengder, arealer og volumer inngår i pensum. Det er meningen at dere skal kjenne til og kunne anvende disse formlene, men det er ingen krav til å kjenne utledningen av formlene. De formlene det gjelder er lengde av funksjonsgrafer $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ og lengde av parameterkurver $L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$, boka side 416 og 419, volum av omdreiningslegemer om x-aksen $V = \int_a^b \pi (f(x))^2\, dx$, boka Example 4 side 396, og overflateareal av omdreiningslegeme om x-aksen $A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Vi vil her se på hvordan formelen for lengde av funksjonsgrafe utledes. Dette er kun for de mest interesserte.

La $y = f(x)$ være deriverbar på et intervall $[a, b]$. Da kan vi spørre om hvor lang grafen er fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$. Vi har en formel for dette som ser slik ut:

$$\text{Lengden } = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Det vi gjør når vi skal vise at dette er rett formel er at vi starter med en partisjon $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ av $[a, b]$. Over hvert intervall $[x_{k-1}, x_k]$ regner vi ut lengden av sekanten fra $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ til $(x_k, f(x_k)))$. Hvis denne lengden er d_k så får vi ved bruk av Pythagoras setning at $d_k^2 = (x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2$. Ved Middelverdisetningen finnes c_k i $[x_{k-1}, x_k]$ slik at $f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})f'(c_k)$. Men da får vi $d_k = \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}(x_k - x_{k-1})$. Riemannsummen av lengdene av sekantene blir

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}(x_k - x_{k-1}).$$

Når vi lar $\|P\| \to 0$, så får vi

$$\text{Lengden } = \lim_{\|P\| \to 0} S_P = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Eksempel: Vi regner ut omkretsen av en sirkel med radius r, $x^2 + y^2 = r^2$. Vi regner ut lengden av øvre halvdel og multipliserer med 2. Øvre halvdel er gitt ved $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, og omkretsen blir $O = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$. Nå er $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$ slik at $\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Nå kan vi integrere:

$$\begin{aligned} \text{Omkretsen } &= 2\int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2r \arcsin(x/r)\Big|_{-r}^{2} \\ &= 2r \arcsin(1)2 = 2r \cdot (\pi/2)2 = 2\pi r. \end{aligned}$$

I PC-øvelse nr. 1 inngikk en parameterkurve $x(t) = t - \sin(t)$ og $y(t) = 1 - \cos(t)$. Lengden av parameterkurver er gitt ved når t går fra a til b:

$$\text{Lengden } = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Setter vi inn for parameterkurven i PC-øvelse nr. 1 og regner ut lengden L når t går fra 0 til 2π, så får vi

$$\mathrm{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(t/2)}\, dt = 8.$$

Volum av omdreiningslegemer. Hvis vi har gitt en funksjon $f(x) \geq 0$ på er intervall $[a, b]$, så kan vi rotere grafen til f om x-aksen. Da får vi et legeme som er rundt og kan se ut som en pære. Når vi skal beregne volumet av dette legemet, så tar vi igjen og parterer intervallet $[a, b]$. I punktene gitt ved partisjonen skjærer vi opp legemet og vi får en rekke tynne skiver (skjær opp en pære og se). Disse skivene er nesten som sylindre med tykkelse $(x_k - x_{k-1})$ og grunnflate $\pi f^2(x)$ (radius blir $f(x)$). Tar vi så Riemannsummene og lar $\|P\| \to 0$, får vi som resultat volumet

$$\text{Volumet } = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx.$$

Øvelse: La $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ og $[a, b] = [-r, r]$. Vi vi roterer grafen til f om x-aksen får vi en kule med radius r. Beregn volumet av kula. Du vil få å regne ut integralet $\int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, dx$.

Regn også ut arealet av overflaten av samme kule.

Variabelskifte i bestemte integraler. Det er ikke rett fram å “se” hva som skjer når vi foretar et variabelskifte i et bestemt integral. Anta $g(x)$ er deriverbar på et intervall $I = [a, b]$, og for å gjøre ting noe enklere antar vi at g er voksende. Da blir rekkevidden til g intervallet $D = [g(a), g(b)]$. På D er f definert og vi antar også f er deriverbar. Vi starter med partisjon $P_I = \{x_0, x_1, x_2, .., x_n\}$ av I. For $k = 0, 1, 2, ..n$ la $u_k = g(x_k)$. Da får vi en partisjon $P_D = \{u_0, u_1, ..., u_n\}$ av D. Ved Middelverdisetningen kan vi skrive

$$u_k - u_{k-1} = (x_k - x_{k-1})g'(d_k)$$

der d_k ligger i intervallet $[x_{k-1}, x_k]$. La $c_k = g(d_k)$. Da får vi

$$f(c_k)(u_k - u_{k-1}) = f(g(d_k))g'(d_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Vi ser at rektanglet med lengde $(u_k - u_{k-1})$ og høyde $f(c_k)$ har samme areal som rektanglet med bredde $(x_k - x_{k-1})$ og høyde $f(g(d_k))g'(d_k)$. Hvis f.eks. $g'(d_k) = 2$, så kompenserer vi en halvering av intervallbredden med en dobling av høyden på rektanglet, $(x_k - x_{k-1})$ er halvparten av $(u_k - u_{k-1})$, og $f(g(d_k))g'(d_k)$ er dobbelt så stor som $f(c_k)$.

Litt om polynomer. I Example 6 side 559 i boka bruker vi at når to polynomer er like, så må polynomene ha samme grad og ha like koeffisienter. Dette kan begrunnes som følger.

Anta $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ og $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$ er like, dvs. $p(x) = q(x)$ for alle x. Vi setter $x = 0$ og får $a_0 = p(0) = q(0) = b_0$. Deretter deriverer vi begge sider av $p(x) = q(x)$ og får $p'(x) = q'(x)$. Setter vi nå $x = 0$, så får vi $a_1 = p'(0) = q'(0) = b_1$. Ny derivasjon og innsetting av $x = 0$ gir $2a_2 = p''(0) = q''(0) = 2b_2$ osv.

Oppgave § 6.4: 7.
Vi har gitt **separabel** differensiallikning $y' = e^{x-y} = e^x e^{-y}$. Vi multipliserer begge sider med e^y og får $e^y y' = e^x$. Integrasjon med hensyn på x og deretter variabelskifte til y som variabel på venstre side gir

$$e^y = \int e^y\, dy = \int e^y y'\, dx = \int e^x\, dx = e^x + C.$$

Så tar vi ln() på begge sider og får

$$y = y(x) = \ln(e^x + C).$$

Oppgave § 6.4: 13.
Vi har gitt $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$. Vi separerer de variable ved å flytte $\sqrt{1-y^2}$ over på venstre side, og får $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}y' = 2x$. Nå integrerer vi som i oppgaven foran, og får:

$$\arcsin(y) = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Så tar vi sin() av begge sider og får:

$$y = y(x) = \sin(x^2 + C).$$

Oppgave § 6.4: 33.
Se informasjon om Crater Lake på web-sida: http://www.crater-lake.com/

C_{14} har halveringstid på 5700 år. k i vår modell bli $k = \frac{\ln(2)}{5700}$. Vi har oppgitt at

$$y(t) = 0.445\, y_0 = y_0 e^{-\frac{t\ \ln(2)}{5700}}.$$

Vi forkorter y_0 og tar ln() av begge sider. Da får vi

$$-\ln(0.445) = \frac{t\ \ln(2)}{5700},$$

slik at

$$t = \frac{-\ln(0.445)\cdot 5700}{\ln(2)} = 6658 \text{ år}.$$

Oppgave § 6.4: 34.

$$y(t) = p\, y_0 = y_0 e^{-\frac{t\ \ln(2)}{5700}},$$

gir at

$$t = \frac{-\ln(p)\cdot 5700}{\ln(2)}.$$

Setter vi inn $p = 0.17$, får vi $t = 14571$ år.
Setter vi inn $p = 0.18$, får vi $t = 14101$ år.
Setter vi inn $p = 0.16$, får vi $t = 15069$ år.
Vi ser at en liten målefeil i p, kan gi store utslag i tiden.

Oppgave § 6.5: 3.
Nå er vi over på lineære differensiallikninger. Disse løses ved å sette de på normal form og deretter følge oppskriften side 501 i boka.

Vi har gitt $xy' + 3y = \frac{\sin(x)}{x^2}$ og $x > 0$. Vi starter med å dividere med x, og likninga er nå på normalform

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin(x)}{x^3}.$$

Vi ser at $P(x) = \frac{3}{x}$ og $Q(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$. $\int P(x)\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln(x)$ slik at den integrerende faktoren blir $v(x) = e^{3\ln(x)} = x^3$.

$\int v(x)Q(x)\,dx = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$, og løsningen blir

$$y(x) = \frac{1}{x^3}(C - \cos(x)) = \frac{C - \cos(x)}{x^3}.$$

Oppgave § 6.5: 9.
Vi har gitt

$$xy' - y = 2x\ln(x),$$

som har normalform

$$y' - \frac{1}{x}y = 2\ln(x).$$

$\int P(x)\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx = -\ln|x|$ slik at $v(x) = e^{-\ln|x|} = 1/|x|$. Vi skal ha en integrende faktor, og velger $v(x) = 1/x$. Videre får vi

$$\int v(x)Q(x)\,dx = \int \frac{2\ln(x)}{x}\,dx = (\ln(x))^2 + C.$$

(Bruk substitusjonen $u = \ln(x)$.) Dermed får vi løsningene

$$y(x) = x[C + \ln^2(x)].$$

(Å tegne integralkurvene er en del av Obligatorisk PC-øvelse nr. 2.)

Oppgave § 6.5: 20.
Vi har gitt $y' + xy = x$ med startverdi $y(0) = -6$. $v(x) = e^{\int x\,dx} = e^{x^2/2}$. Og

$$\int v(x)Q(x)\,dx = \int e^{x^2/2}x\,dx = e^{x^2/2} + C.$$

(Bruk substitusjonen $u = x^2/2$.) Generell løsning blir

$$y(x) = e^{-x^2/2}[C + e^{x^2/2}] = 1 + \frac{C}{e^{x^2/2}}.$$

Innsetting av startverdi gir $-6 = y(0) = 1 + C/1$ slik at $C = -7$. Den søkte løsningen er

$$y(x) = 1 - \frac{7}{e^{x^2/2}}.$$

(Integralkurvene er tegnet i tillegget til fila Oblig2_PC.mcd)

Oppgave § 6.7: 16.
Når $y(t) = t^2\tanh(1/t)$ får vi ved derivasjon (husk å bruke kjerneregelen)

$$y'(t) = 2t\tanh(1/t) + t^2\frac{-1/t^2}{\cosh^2(1/t)} = 2t\tanh(1/t) - \frac{1}{\cosh^2(1/t)}.$$

Oppgave § 6.7: 57.

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{\cosh(\ln(t))}{t}\,dt && \text{Substitusjon: } u = \ln(t)\\
=&\int_0^{\ln(2)} \cosh(u)\,du && du = dt/t,\ u(1) = 0,\ u(2) = \ln(2)\\
=&\sinh(u)\Big|_0^{\ln(2)} = \sinh(\ln(2)) - 0 &&\\
=&\frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - 1/2}{2} = \frac{3}{4}. &&
\end{aligned}$$

Oppgave § 6.7: 73.

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}\,dx \qquad \text{Substitusjon: } u = \sin(x)$$
$$= \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = 0. \qquad du = \cos(x)dx,\ u(0) = 0,\ u(\pi) = 0.$$

Oppgave § 6.7: 80.

$$A = \int_0^b \frac{\cosh(ax)}{a}\,dx = \frac{\sinh(ax)}{a^2} \qquad \text{Se side 522.}$$
$$= \frac{\sinh(ab)}{a^2}$$

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\frac{\cosh(ax)}{a}\right)^2}\,dx = \qquad \frac{d}{dx}\frac{\cosh(ax)}{a} = \sinh(ax)$$
$$= \int_0^b \sqrt{1+\sinh^2(ax)}\,dx = \int_0^b \cosh(ax)\,dx$$
$$= \frac{\sinh(ax)}{a}\Big|_0^b = \frac{\sinh(ab)}{a}.$$

Vi ser at $S = aA$.