Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

Noen av oppgavene denne uken vil nok være vanskelige. Flere av oppvanene inneholder både omskrivinger og substitusjoner.

Et par formler som dere bør se opp for er disse:

$$\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ og } \int f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx.$$

Prøv med $a = 2$ og $b = 3$, og $f(x) = g(x) = x$, og dere vil se at høyre og venstre side ikke er like.

Oppgave § 7.1: 30.

$$\begin{aligned} &\int \frac{2}{x\sqrt{1-4\ln^2(x)}}\, dx && \text{Substitusjon: } u = 2\ln(x),\ du = \frac{2}{x}\, dx \\ =&\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\ =&\arcsin(u) + C = \arcsin(2\ln(x)) + C. \end{aligned}$$

Oppgave § 7.1: 33.

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx && \text{Multipliserer teller og nevner med } e^x \\ =&\int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}\, dx && \text{Substitusjon: } u = e^x,\ du = e^x\, dx \\ =&\int \frac{1}{u^2+1}\, du \\ =&\arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C. \end{aligned}$$

Oppgave § 7.1: 49.

$$\begin{aligned} &\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{2x^3}{x^2-1}\, dx && \text{Foretar polynomdivisjon.} \\ =&\int_{\sqrt{2}}^{3} (2x + \frac{2x}{x^2-1})\, dx && \text{Substitusjon: } u = x^2 - 1,\ du = 2x\, dx \\ =&(x^2 + \ln|x^2-1|)\Big|_{\sqrt{2}}^{3} = 7 + \ln(8). \end{aligned}$$

Oppgave § 7.1: 69.
Husk at

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2(y)}\, dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos(y)}\, dy \\
=& \ln|\frac{1}{\cos(y)} + \tan(y)| \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
=& \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1) = 2\ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}
$$

Oppgave § 7.2: 7.

$$
\begin{aligned}
&\int \arctan(y)\, dy = \int 1 \cdot \arctan(y)\, dy \\
=& y \cdot \arctan(y) - \int \frac{y}{1+y^2}\, dy = y \cdot \arctan(y) - (1/2)\ln(1+y^2) + C.
\end{aligned}
$$

Oppgave § 7.2: 13.

$$
\begin{aligned}
&\int (x^2-5x)e^x\, dx = (x^2-5x)e^x - \int (2x-5)e^x\, dx \qquad \text{Delvis integrasjon.} \\
=& (x^2-5x)e^x - (2x-5)e^x + \int (2)e^x\, dx = \\
=& (x^2-5x)e^x - (2x-5)e^x + 2e^x + C = (x^2-7x+7)e^x + C.
\end{aligned}
$$

Oppgave § 7.2: 26.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx = x \cdot \sqrt[3/2]{1-x}(-2/3) \Big|_0^1 + \int_0^1 (2/3) \sqrt[3/2]{1-x}\, dx \\
=& -\frac{2x}{3} \sqrt[3/2]{1-x} \Big|_0^1 - \frac{4}{15} \sqrt[5/2]{1-x} \Big|_0^1 \\
=& (0-0) - (0-4/15) = \frac{4}{15}.
\end{aligned}
$$

Oppgave § 7.3: 3.
Vi skal her foreta en delbrøkoppspalting. Vi skriver

$$
\frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2}.
$$

Vi multipliserer begge sider med $(x+1)^2$, og får:

$$
x+4 = 1 \cdot x + 4 = A(x+1) + B = Ax + (A+B).
$$

To polynom som er like må ha samme koeffisienter, så vi får $A = 1$ og $A + B = 4$, dvs. $B = 3$.

$$
\frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2}.
$$

Oppgave § 7.3: 35.

$$\int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}\,dt = \int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx \qquad \text{Substitusjon: } x=f(t)=e^t,\ dx=e^t dt$$
$$= \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int \Big(\frac{1}{(x+1)} + \frac{-1}{(x+2)}\Big)\,dx \qquad \text{Delbrøkoppspalting gir.}$$
$$= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C = \ln\Big(\frac{e^t+1}{e^t+2}\Big) + C.$$

Hvis du foretar delbrøkoppspalting før substitusjonen, så får du

$$\frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2} = \frac{A}{e^t+2} + \frac{B}{e^t+1},$$

slik at

$$e^t = (A+B)e^t + (A+2B).$$

Da må $A+B=1$ og $A+2B=0$, slik at $A=2$ og $B=-1$. Altså er

$$\frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2} = \frac{2}{e^t+2} + \frac{-1}{e^t+1}.$$

Ved substitusjonen $e^t=u$, $dt=du/u$, kan vi integrere $\int \frac{a}{e^t+a}\,dt = \ln(\frac{e^t}{e^t+a}) + C$. Vi ser at denne måten å løse oppgaven, medfører en ekstra omgang med delbrøkoppspalting.

Oppgave § 7.6: 9.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{e^t-t-1} = \frac{"0"}{0} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin(t)}{e^t-1} = \frac{"0"}{0} = \lim_{t\to 0}\frac{-\cos(t)}{e^t} = -1.$$

Oppgave § 7.6: 19.

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln(x)-\ln(\sin(x))) = \lim_{x\to 0^+}\ln\Big(\frac{x}{\sin(x)}\Big) = \ln(1) = 0.$$

Oppgave § 7.6: 35.

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\ln(t)\Big|_x^{2x} = \lim_{x\to\infty}\ln\Big(\frac{2x}{x}\Big) = \ln(2).$$

Oppgave § 7.7: 17.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx \qquad \text{Substitusjon: } u=g(x)=\sqrt{x},\ 2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^{\sqrt{b}}\frac{2}{1+u^2}\,du \qquad \text{Nye grenser: } g(0)=0,\ g(b)=\sqrt{b}$$
$$= \lim_{b\to\infty} 2\arctan(x)\Big|_0^{\sqrt{b}} \qquad \text{Vi skulle hatt en grense } a\to 0^+, \text{men denne}$$
$$= \lim_{b\to\infty} 2\arctan(\sqrt{b}) = \pi. \qquad \text{sløyfes siden nevneren ikke kan bli 0 nå.}$$

Oppgave § 7.7: 55.
Vi skal finne ut om følgende integral konvergerer eller divergerer:

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos(x)}{x}\,dx.$$

Vi har at $3 \geq 2+\cos(x) \geq 1$. Ved Theorem 3 side 594 får vi at det gitte integralet konvergerer hvis og bare hvis integralet av $\frac{1}{x}$ konvergerer.

$$\infty = \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos(x)}{x}\,dx \leq \int_{\pi}^{\infty} \frac{3}{x}\,dx = \infty.$$

Vi får divergens.