
Oppgave § 7.3: 22.
Først skal vi delbrøkoppspalte (se Eksempel 5 side 558 i boka).

$$\frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

(Graden i tellerne er 1 mindre enn graden i nevnerne.) Vi multipliserer teller og nevner på begge sider med $t(t^2+1)$ og får

$$3t^2+t+4 = A(t^2+1) + (Bt+C)t = (A+B)t^2 + Ct + A.$$

Når to polynom er like. må de ha de like koeffisienter. Dermed får vi

$$3 = A+B, \quad 1 = C, \quad 4 = A,$$

som gir $A = 4$, $C = 1$ og $B = -1$.

Nå kan vi starte integrasjonen.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{t} + \frac{-t+1}{t^2+1}\right) dt \qquad \text{Siste brøk splittes.}$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{t} + \frac{-t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= \left(4\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t)\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \left(4\ln(\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\ln(4) + \arctan(\sqrt{3})\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\ln(2) + \arctan(1)\right)$$

$$= 2\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{12}.$$

Litt om delbrøkoppspalting. For å forstå fullt ut hvorfor ting ser ut som de gjør når vi foretar delbrøkoppspalting, trenger vi et videregående kurs i algebra. Vi vil her se på et enkelt tilfelle.

La $\frac{p(x)}{(x-a)q(x)}$ være en rasjonal funksjon med $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$. La oss skrive

$$\frac{p(x)}{(x-a)q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Finnes det alltid A og polynom $r(x)$ med $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} q$ slik at denne likninga er oppfylt? Den siste likninga er ekvivalent med likninga (multipliser med $(x-a)q(x)$)

$$p(x) = Aq(x) + (x-a)r(x).$$

Nå setter vi $x = a$ og får $p(a) = Aq(a) + 0$, dvs. $A = p(a)/q(a)$. Da ser vi at

$$r(x) = \frac{p(x) - \frac{p(a)}{q(a)}q(x)}{(x-a)}.$$

Siden telleren blir null i $x = a$, vil divisjonen gå opp og $r(x)$ blir et polynom med $\operatorname{grad} r \le \operatorname{grad} p - 1$.

I oppgaven ovenfor er $a = 0$, $p(x) = 3x^2 + x + 4$ og $q(x) = x^2 + 1$. Da får vi $A = p(0)/q(0) = 4/1 = 4$.

Oppgave § 9.1: 12.

Oppgave § 9.1: 47.

Oppgave § 9.2: 11.
Vi har $A(-1, 0)$, $B(2, 1)$ og $C(1, -2)$. Vektorene mellom hjørnene blir $\vec{AB} =< 3, 1 >$, $\vec{AC} =< 2, -2 >$ og $\vec{BC} =< -1, -3 >$. Ved formelen side 729 får vi

$$\cos(\angle A) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{2 \cdot 3 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{8}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Dermed får vi $\angle A = 63, 43...^\circ$.

Tilsvarende får vi

$$\cos(\angle B) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} = \frac{-\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|-\vec{AB}||\vec{BC}|} = \frac{3}{5},$$

og

$$\cos(\angle C) = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}||\vec{CB}|} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

slik at $\angle B = 53, 13...^\circ$ og $\angle C = \angle A$.

Oppgave § 9.2: 13.
De to diagonalene er ortogonale hvis og bare hvis

$$0 = (\vec{v_1} + \vec{v_2}) \cdot (\vec{v_1} - \vec{v_2}) = |\vec{v_1}|^2 - |\vec{v_2}|^2 \Leftrightarrow |\vec{v_1}|^2 = |\vec{v_2}|^2,$$

dvs. de to vektorene har samme lengde.

Oppgave § 9.2: 43.
Gitt to linjer $3x - 4y = 3$ og $x - y = 7$. Fra oppgave 9.2: 25 (forelest) har vi at vektorene $< 3, -4 >$ og $< 1, -1 >$ er normale til linjene. Vinkelen θ mellom linjene blir dermed lik vinkelen mellom disse normalene.

$$\cos(\theta) = \frac{< 3, -4 > \cdot < 1, -1 >}{| < 3, -4 > || < 1, -1 > |} = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Vi får $\theta = \arccos(\frac{7}{5\sqrt{2}}) = 8, 13..^\circ$.

(Alternativt kan vi regne ut de to stigningstallene og ta differansen.) Ved å se på de to formlene for linjene som to likninger med to ukjente, kan vi løse likningssystemet. Da får vi $x = 25$ og $y = 18$, så linjene skjærer hverandre i $(25, 18)$.

Oppgave § 9.3: 9.
Vi har gitt posisjonsvektor $\vec{r}(t) =< 2\cos(t), \sin(t) >$ og vi skal finne vinkelen mellom hastighetsvektoren og akselerasjonsvektoren. Derivasjon git hastighetsvektor

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) =< -2\sin(t), \cos(t) >,$$

og akselerasjonsvektor

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) =< -2\cos(t), -\sin(t) > .$$

Innsatt $t = \pi/4$ får vi $\vec{v}(\pi/4) =< -\sqrt{2}, \sqrt{2}/2 >$ og $\vec{a}(\pi/4) =< \sqrt{2}, -\sqrt{2}/2 >$. Vinkelen θ mellom vektorene blir

$$\cos(\theta) = \frac{2 - 1/2}{\sqrt{5/2}\sqrt{5/2}} = \frac{3}{5}.$$

Dette gir $\theta = \arccos(3/5) = 53,13..^\circ$.

Oppgave § 9.3: 32.
Vi har gitt

$$\vec{r_1}(t) =< t-3, (t-3)^2 >,$$

og

$$\vec{r_2}(t) =< 3t/2 - 4, 3t/2 - 2 > .$$

a) Partiklene kolliderer hvis de er på samme sted til samme tid, dvs. hvis likninga $\vec{r_1}(t) = \vec{r_2}(t)$ har løsning. Denne likninga er egentlig to likninger

$$t - 3 = \frac{3t}{2} - 4$$
$$(t-3)^2 = \frac{3t}{2} - 2$$

Vi kan skrive likningene som $2t - 6 = 3t - 8$ og $t^2 - 6t + 9 = 3t/2 - 2$, som kan skrives som $t = 2$ og $2(t-2)(t-11/2) = 0$. Dette viser at $\vec{r_1}(2) = \vec{r_2}(2)$.
b) Retningene til partiklene ved kollisjonen er $\vec{r_1}\,'(2) =< 1, -2 >$ og $\vec{r_2}\,'(2) =< 3/2, 3/2 >$.
Tegn de to vektorene ut fra kollisjonspunktet $\vec{r_1}(2) =< -1, 1 >$. (De to kurvene partiklene følger er en parabel $y = x^2$ og en rett linje $y = x + 2$.)

Oppgave § 10.1: 47.
Svar $A(4, -3, -5)$. $\vec{AB} =< 1, 4, -2 >$ fås ved å ta B's koordinater og trekke fra A's koordinater.

Oppgave § 10.1: 54.
Svar $(x-0)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 5^2$.

Oppgave § 10.2: 1.
Vi har gitt $\vec{v} =< 2, -4, \sqrt{5} >$ og $\vec{u} =< -2, 4, -\sqrt{5} >$. Formelen side 797 gir

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|} = \frac{2(-2) + (-4)4 + \sqrt{5}(-\sqrt{5})}{5 \cdot 5} = -1.$$

Det betyr at $\theta = \pi$. Vi får videre

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = (\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}||\vec{v}|})\vec{v} = -\vec{v} = \vec{u}.$$

Oppgave § 10.3: 19.
Linja $x = 5 + t$, $y = 1 + 3t$ og $z = 4t$ har retningen $\vec{n} =< 1, 3, 4 >$. Punkt $P_0(2, 4, 5)$. Linja gjennom P_0 rettvinklet på linja blir planet med normalvektor $\vec{n}$, dvs.

$$1(x-2) + 3(y-4) + 4(z-5) = 0.$$

Oppgave § 10.3: 33.
Vi bruker formel fra oppgave 10.3: 31. Punkt $S(0, 1, 1)$ og plan $4y + 3z = -12$. Normalvektoren til planet er $\vec{n} =< 0, 4, 3 >$. Vi velger et punkt i planet f.eks. $P(0, -3, 0)$. Vektoren $\vec{PS} =< 0, -4, -1 >$ skal nå brukes til å beregne avstanden. Avstanden fra S til planet blir

$$d = |\vec{PS} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}| = |\frac{(0 \cdot 0 + 4(-4) + 3(-1))}{5}| = \frac{19}{5}.$$

På forelesningen har jeg vist at avstanden fra et punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ til et plan $Ax + By + Cz = D$ er $d = \frac{(Ax_0+By_0+Cz_0)-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Positivt fortegn viser at P ligger på den sida som $\vec{n} =< A, B, C >$ peker mot.

Oppgave § 10.3: 41.
Linje $x = 1 - t$, $y = 3t$ og $z = 1 + t$ og plan $2x - y + 3z = 6$. Vi setter linja inn i planet

$$2(1 - t) - (3t) + 3(1 + t) = 6,$$

og får skjæring når $t = -1/2$. Skjæringspunktet blir (setter $t = -1/2$ inn i formelen for linja) $(3/2, -3/2, 1/2)$.

Eksamen desember 1999: 1.
Definer funksjonen $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{for } x \neq 0 \\ 1, & \text{for } x = 0 \end{cases}$.

(a) Beregn $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.
Beregn $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x}$.

Forslag til løsning:
Begge grensene blir beregnet ved bruk av L'Hôpitals regel. Den første:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \frac{"0"}{0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \frac{"0"}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Før vi starter på den andre grenseberegningen, må vi derivere $f(x)$ utenfor origo. Vi får $f'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$, som innsatt gir:

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3} = \frac{"0"}{0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{3x} = \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

Eksamen desember 1999: 4.

(a) Løs differensiallikninga $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = \arctan(x)$.
(b) Beregn integralet $\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx$.

(c) La $f(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$. Vis at $f'(x) = 0$ har nøyaktig en løsning når $x > 0$.
Bruk Newtons metode til å finne en tilnærmet løsning av $f'(x) = 0$ når $x > 0$. (Du kan velge $x_0 = 0.8$. Det er nok å foreta 2 iterasjoner.)

Forslag til løsning:
(a) Vi har gitt en lineær 1. ordens likning $y' + P(x)y = Q(x)$, der $P(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$ og $Q(x) = \arctan(x)$. Først regner vi ut (merk at $2x = (1 + x^2)'$ slik at substitusjonen $u = 1 + x^2$ fungerer)

$$v(x) = e^{\int P(x)\, dx} = e^{\int \frac{du}{u}} = e^{-\ln(u)} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Deretter skal vi regne ut (merk at vi kan bruke substitusjonen $u = \arctan(x)$ slik at $du = \frac{dx}{1+x^2}$)

$$\int v(x)Q(x)\,dx = \int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\arctan^2(x) + C.$$

Da får vi løsningen

$$y(x) = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx = (1+x^2)(C + \frac{1}{2}\arctan^2(x)).$$

(b) Samme substitusjon som i (a), $u = \arctan(x)$, gir

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\arctan^2(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\arctan^2(b) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

(c) Vi har gitt funksjon $f(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$. Derivasjon gir

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot\frac{1}{(1+x^2)} - 2x\cdot\arctan(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - 2x\arctan(x)}{(1+x^2)^2}.$$

Vi ser at $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{1}{2x}$. (Tips: Tegn grafene til $\frac{1}{2x}$ og $\arctan(x)$.) Vi skal bare se på hva som skjer i intervallet $(0,\infty)$, og der er $\arctan(x)$ strengt voksende og $\frac{1}{2x}$ strengt avtagende. Derfor har likninga $f'(x) = 0$ høyst en løsning. Siden $\frac{1}{2x} > \arctan(x)$ når x er nær 0, og $\frac{1}{2x} < \arctan(x)$ når x blir stor, så finnes minst en løsning.

Vi skal bruke Newtons metode for å finne tilnærmet verdi av løsningen til $f'(x) = 0$, dvs. vi skal finne tilnærmet verdi av løsningen til $1 - 2x\arctan(x) = 0$. Sett $h(x) = 1 - 2x\arctan(x)$ og $g(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}$. Vi er bedt om å sette $x_0 = 0.8$ og regne ut $x_1 = g(x_0)$ og $x_2 = g(x_1)$. $h'(x) = -2\arctan(x) - \frac{2x}{1+x^2}$. Ved å taste inn tallene i lommekalkulatoren, har jeg fått $x_1 = 0.765771$ og $x_2 = 0.765379$.

Litt om polynomer.

La $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$. Vi setter $x = 0$ og får $a_0 = p(0)$. Vi deriverer og får $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ...$ Setter vi nå $x = 0$, får vi $p'(0) = a_1$. Ny derivasjon gir $p''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3x + ...$ Vi setter $x = 0$ og får $2a_2 = p''(0)$.

Mønsteret som framtrer er at $a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$ for alle $k = 0, 1, 2, .., n$. Dermed kan vi skrive ethvert polynom på formen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Når vi skal lage Taylor-polynomer, så imiterer vi denne formelen. Hvis $f(x)$ er mange nok ganger deriverbar, så definerer vi Taylor-polynomet til f i punktet a av grad n som

$$p(n, a, x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Merk at Taylorpolynomet av grad 1 er $p(1, a, x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ dvs. tangentlinja. For svært mange funksjoner får vi at $f(x) = \lim_{n\to\infty} p(n, a, x)$. For eksempel $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$.