
Oppgave § 11.1: 7.
$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.
a) Definisjonsområde D: f er definert når nevneren er $\neq 0$ og det under rottegnet er ≥ 0, dvs. når $16 - x^2 - y^2 > 0$, dvs. inni sirkelen gitt ved $x^2 + y^2 = 4^2$.
b) Rekkevidden til f blir $[1/4, \infty)$. Vi har at $f(x,y) > 0$ alltid og

$$f(x,y) \geq 1/4 \Leftrightarrow \sqrt{16 - x^2 - y^2} \leq 4 \Leftrightarrow 16 - x^2 - y^2 < 4^2.$$

c) Nivåkurvene $f(x,y) = 1/c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16 - c^2$, dvs. sirkler med sentrum i origo.
d) Randa til D er sirkelen $x^2 + y^2 = 4^2$. (tegn figur!)
e) D er åpent. (x^2+y^2 er en kontinuerlig funksjon og da blir mengen av (x,y) som oppfyller $x^2 + y^2 < 16$ en åpen mengde.)
f) D er begrenset. (Den ligger inne en stor sirkel.)

Oppgave § 11.2: 29.
a)
b) La $g(x,y) = \frac{x+y}{2+\cos(x)}$. $2+\cos(x) \neq 0$ og alle biter som inngår i uttrykket er kontinuerlige. Da blir g kontinuerlig i hele planet.

Oppgave § 11.2: 30.
a) La $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2} = \frac{x^2+y^2}{(x-2)(x-1)}$. g er kontinuerlig over alt unntatt langs de to vertikale linjene $x = 1$ og $x = 2$.
b) $g(x,y) = \frac{1}{x^2-y}$. Vi har 0 i nevneren langs kurven $x^2 - y = 0$ (parabel). g er en rasjonal funksjon og er dermed kontinuerlig over alt der nevneren er $\neq 0$, dvs. over alt utenfor parabelen $y = x^2$.

Oppgave § 11.3: 16.
$f(x,y) = e^{xy}\ln(y)$. De to partielle deriverte blir:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = \frac{d}{dx} f(x,y) =& y e^{xy} \ln(y), \\ f_y(x,y) = \frac{d}{dy} f(x,y) =& x e^{xy} \ln(y) + e^{xy}/y. \end{aligned}$$

Oppgave § 11.3: 17.
$f(x,y) = \sin^2(x - 3y)$. De partielle deriverte blir:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = \frac{d}{dx} f(x,y) =& 2\sin(x-3y) \cdot \cos(x-3y), \\ f_y(x,y) = \frac{d}{dy} f(x,y) =& 2\sin(x-3y) \cdot \cos(x-3y) \cdot (-3). \end{aligned}$$

Oppgave § 11.3: 19.
$f(x,y) = x^y = e^{y\cdot\ln(x)}$. De partielle deriverte blir:

$$f_x(x,y) = \frac{d}{dx}f(x,y) = x^y(y/x) = yx^{y-1},$$
$$f_y(x,y) = \frac{d}{dy}f(x,y) = x^y \cdot \ln(x).$$

NB! Disse partielle deriverte inneholder derivasjonsreglene for x^n og a^x.

Oppgave § 11.4: 1.
Vi har gitt $w = f(x,y) = x^2 + y^2$ og parameterkurve $\vec{r}(t) =< \cos(t), \sin(t) >$. Derivasjonsregelen er

$$\frac{dw}{dt} = \nabla f \cdot \vec{r}\,'(t).$$

$\nabla f =< 2x, 2y >$ og $\vec{r}\,'(t) =< -\sin(t), \cos(t) >$. Nå setter vi inn, og får

$$\frac{dw}{dt} = \nabla f\cdot\vec{r}\,'(t) = (2x)(-\sin(t))+(2y)(\cos(t)) = (2\cos(t))(-\sin(t))+(2\sin(t))(\cos(t)) = 0.$$

Dvs. ∇f står ortogonalt (normalt) på $\vec{r}\,'(t)$.

Oppgave § 11.5: 9.
$f(x,y) = 2xy - 3y^2$, punkt $P_0(5,5)$ og vektor $\vec{A} =< 4, 3 >$.
Enhetsvektor i $\vec{A}$ blir $\vec{u} = \vec{A}/|\vec{A}| =< 4, 3 > /5 =< 4/5, 3/5 >$.
Gradienten til f er $\nabla f =< 2y, 2x - 6y >$.
Gradienten til f i punktet P_0 blir $(\nabla f)_{P_0} =< 10, -20 >$.
Nå tar vi (dot-) skalarproduktet med retningsvektoren $\vec{u}$ og får

$$(D_{\vec{u}}f)_{P_0} = 10 \cdot 4/5 + (-20) \cdot 3/5 = -4.$$

Oppgave § 11.5: 19.
$f(x,y,z) = \frac{x}{y} - yz$ og punkt $P_0(4,1,1)$. Vi beregner gradienten til f:

$$\nabla f =< f_x, f_y, f_z >=< 1/y, -x/y^2 - z, -y > .$$

Vi setter inn P_0 og får

$$(\nabla f)_{P_0} =< 1, -4 - 1, -1 >=< 1, -5, -1 > .$$

Lengden av denne vektoren er $|(\nabla f)_{P_0}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{3}$. Enhetsvektor i gradientretningen blir $\vec{u} =< \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{-5}{3\sqrt{3}}, \frac{-1}{3\sqrt{3}} >$.

Oppgave § 11.5: 37.
$z = f(x,y) = \sqrt{y-x}$ og punkt $P_0(1,2,1)$. Funksjonen er definert for $y - x \geq 0$, dvs. over linja $y = x$. P_0 ligger over denne linja.
Gradienten til f er $\nabla f =< \frac{-1}{\sqrt{y-x}}, \frac{1}{\sqrt{y-x}} >$. Vi setter inn koordinatene til P_0 og får $(\nabla f)_{P_0} =< -1/2, 1/2 >$.
Tangentplanet til flaten $z = f(x,y)$ blir

$$-\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-2) - (z-1) = 0 \text{ dvs. } -x + y - 2z = -1.$$

Oppgave § 11.5: 42.
$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ og punkt $P_0(-1,2)$. Vi skal finne tangentlinja til nivåkurven $f(x,y) = 7$. Gradienten til f er $\nabla f =< 2x - y, -x + 2y >$. Vi setter inn P_0's koordinater

og får normalvektor til tangenten $\vec{n} = (\nabla f)_{P_0} =< -2-2, 1+4 >=< -4, 5 >$. Tangentlinja blir

$$-4(x-(-1)) + 5(y-2) = 0 \text{ dvs. } -4x + 5y = 14.$$

Eksamen desember 1999: 6.

(a) Gitt en funksjon $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$.
Finn de eller det kritiske punkt til $f(x,y)$ og finn typen (lokale maksimums- eller minimumspunkt eller sadelpunkt) til de eller det kritiske punkt.
(b) Finn ekstremverdiene til $f(x,y)$ langs linja $g(x,y) = 6x + 3y - 50 = 0$ ved bruk av Lagranges metode.
(c) Finn tangentlinja til nivåkurven til $f(x,y)$ gjennom punktet $(13/3, 8)$.

Forslag til løsning:
(a) Vi har gitt $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$. Partiell derivasjon gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y,$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x - 7.$$

Vi setter begge de partielle deriverte lik 0 og får 2 likninger med 2 ukjente

$$\begin{aligned} 4x - \ \ y &= 0 \\ -x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

Likningssystemet har løsning $x = 1$ og $y = 4$. Så vi får et kritisk/stasjonært punkt $(1,4)$. Funksjonsverdien er $f(1,4) = -14$. De annen-ordens partielle deriverte er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1,$$

slik at

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 = 8 - 1 = 7 > 0.$$

Annen-derivert testen forteller oss at $(1,4)$ er et lokalt minimumspunkt. (Det er egentlig absolutt minimum.)
(b) Vi har gitt $f(x,y)$ som ovenfor, og dessuten en bibetingelse $g(x,y) = 6x + 3y - 50 = 0$. $g(x,y) = 0$ beskriver en rett linje. Gradientene til f og g er

$$\nabla f(x,y) = (4x - y)\vec{i} + (2y - x - y)\vec{j},$$

og

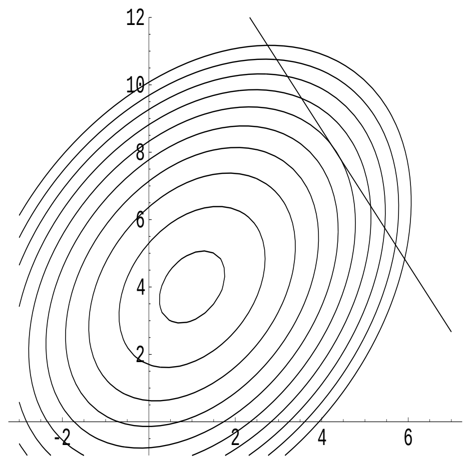
$$\nabla g(x,y) = 6\vec{i} + 3\vec{j}.$$

Vi skal bruke Lagranges metode og starter med likninga $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, dvs. $4x - y = 6\lambda$ og $2y - x - 7 = 3\lambda$. Vi multipliserer siste likning med 2 og setter likningene lik hverandre. Da får vi $6\lambda = 4x - y = 4y - 2x - 14$. Herav følger at $6x = 5y - 14$. Vi setter dette inn i $g(x,y) = 0$, og får $0 = (5y - 14) + 3y - 50$. Da blir $y = 8$, som igjen innsatt i $g(x,8) = 0$ gir $x = 13/3$. Lagranges metode gir ett punkt, som kan være lokalt eller absolutt minimum eller maksimum. (Ved å la $x \to \infty$, kan vi se at punktet $(13/3, 8)$ er et absolutt/globalt minimum.)

(c) $\nabla f(x, y)$ er normal til (står vinkelrett på) tangentlinja til $g(x, y) = 0$. Men $g(x, y) = 0$ er en rett linje, og er dermed sin egen tangentlinje. Derfor er tangenten til nivåkurven til $f(x, y) = f(13/3, 8) = 80/9$ lik linja $g(x, y) = 6x + 3y - 50 = 0$.

Alternativt, har vi tangentlinja gitt ved $\nabla f(13/3, 8) \cdot (x - 13/3, y - 8) = 0$, dvs. $(28/3, 14/3) \cdot (x - 13/3, y - 8) = 0$. Litt regning gir $6x + 3y - 50 = 0$.

La oss se på noen nivåkurver og linja gitt ved $g(x, y) = 0$.



FIGUR 1. Grafen til f

Eksamen desember 2000: 4.

Gitt funksjonen $g(x, y) = x + y^2$. Nivåkurvene til g er parabler med åpning mot venstre.

(a) La $P_0 = (x_0, y_0)$ være et punkt på en nivå-kurve $g(x, y) = c$.
Finn en formel for tangenten til denne nivå-kurven gjennom punktet P_0 og vis at tangentlinja skjærer x-aksen og y-aksen i punktene $(x, 0)$ og $(0, y)$ der

$$x = x_0 + 2y_0^2, \quad y = \frac{x_0 + 2y_0^2}{2y_0}.$$

(b) La
$$f(x,y) = \frac{(x+2y^2)^2}{4y}.$$
$f(x,y)$ har et minimum når $g(x,y)=3$. Kan du gi en geometrisk begrunnelse for det?
Finn minimum av $f(x,y)$ når $g(x,y)=3$ ved bruk av Lagranges metode.

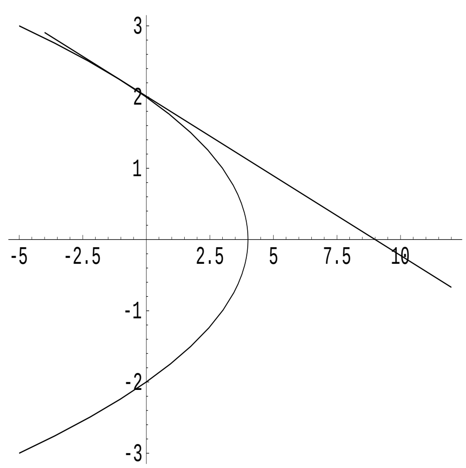
Forslag til løsning:

(a) Derivasjon av $x+y^2=c$ med hensyn på x gir $1+2yy'=0$ slik at vi får $y'=-1/2y$. (Likninga $g(x,y)=c$ definerer y som en deriverbar funksjon i x. Alternativt kan vi bruke at $\bigtriangledown g$ er normalen til tangentlinja.) Tangentlinja blir $y=y_0-\frac{-1}{2y_0}(x-x_0)$. Sett etter tur $y=0$ og $x=0$ og formlene kommer ut.

(b) Vi skal løse likningene $g(x,y)=c$ og $\bigtriangledown f = \lambda \cdot \bigtriangledown g$. Gradientlikninga gir oss
$$\frac{2(x+2y^2)}{4y} = \lambda \cdot 1 \qquad \text{(partiell derivert med hensyn på } x\text{)}$$
$$\frac{(x+2y^2)(6y^2-x)}{4y^2} = \lambda \cdot 2y$$
Vi får fra disse likningene at
$$\lambda \cdot 8y^3 = (x+2y^2)(6y^2-x) = 4y^2(x+2y^2).$$
Vi får $(x+2y^2)=0$ eller $6y^2-x=4y^2$. Altså må $2y^2=\pm x$. $2y^2=x$ innsatt i g gir $c=x+y^2=x+x/2$, dvs. $x=2c/3=2$. (x må ha samme fortegn som c.) $2y^2=-x$ innsatt i g gir $c=x+y^2=x-x/2$, dvs. $x=2c=6$. Dette er ikke en løsning siden $x=6$ og samtidig $2y^2=-x<0$. De mulige ekstremverdiene for $f(x,y)$ blir $f(2,\pm 1)=\pm 4$.

Svaret i (b) er ekstremverdien til arealet av trekanten avgrenset av origo og de to skjæringspunktene vi fant i (a).

Grafisk er $f(x,y)$ lik arealet av trekanten avgrenset av x-aksen, y-aksen og tangentlinja gjennom (x,y).



Figur 2. Grafen til f