MA 1410: Analyse
Uke 48, 2001
http://home.hia.no/~aasvaldl/ma1410_H01

Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

Oppgave § 8.7: 11.
Vi har $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. $f(0) = 1$.
Derivasjon gir $f'(x) = \sinh(x)$ og $f'(0) = 0$.
Videre derivasjoner gir alternerende $f^{(k)}(0) = 1$ for k partall og $f^{(k)}(0) = 0$ for k oddetall. Da blir MacLaurin/Taylor rekka

$$1 + x^2/2! + x^4/4! + ...$$

Alternativt: Vi har (se tabell side 679) at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Denne formelen gjelder for alle x, og vi han erstatte x med $-x$ slik at

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}.$$

Hvis vi nå summerer så får vi (husk $x^{2n} + (-x)^{2n} = 2x^{2n}$ og $x^{2n+1} + (-x)^{2n+1} = 0$)

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

Oppgave § 8.7: 12.
Vi har $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Som ovenfor får vi $f^{(k)}(0) = 1$ for k oddetall og $f^{(k)}(0) = 0$ for k partall, og MacLaurin/Taylor rekke

$$x + x^3/3! + x^5/5! + ...$$

Oppgave § 8.7: 15.
Vi har gitt $f(x) = x^3 - 2x + 4$ og $a = 2$. $f(2) = 8$.
Derivasjon gir $f'(x) = 3x^2 - 2$ og $f'(2) = 10$.
Ny derivasjon gir $f''(x) = 6x$ og $f''(2) = 12$.
Tredje gangs derivasjon gir $f'''(x) = 6$ og $f'''(2) = 6$.
Nå får vi (siden den fjerde deriverte er lik 0, blir restleddet lik 0 og)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k = 8 + \frac{10}{1!}(x-2) + \frac{12}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^2 = 8 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

Eksamen desember 1999: 5.
Vi har gitt en funksjon $g(x) = 1 - x^2$ over intervallet $[-1, 1]$.

(a) Beregn volumet V av omdreiningslegemet som framkommer når grafen til g roteres om x-aksen, $V = \pi \int_{-1}^{1} g^2(x)\,dx$.

(b) Overflatearealet av omdreiningslegemet er gitt ved $S = 2\pi \int_{-1}^{1} g(x)\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx$. Beregn dette integralet numerisk ved bruk av Simpsons formel når antallet delintervaller er $n = 4$.

Forslag til løsning:

(a) Vi setter inn i formelen som er oppgitt og integrerer.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (1-2x^2+x^4) \, dx \\ &= \pi(x - 2x^3/3 + x^5/5) \Big|_{-1}^{1} \\ &= 2\pi(1 - 2/3 + 1/5) = 16\pi/15. \end{aligned}$$

(b) Når vi setter inn for $g(x) = 1 - x^2$ får vi

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\sqrt{1+4x^2} \, dx.$$

Vi skal bruke $n = 4$. Da blir $h = 2/4 = 1/2$, og $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$ og $x_4 = 1$. Tilsvarende y-verdier blir (husk at vi skal sette x_i inn i $2\pi(1-x^2)\sqrt{1+4x^2}$ for å få y_i): $y_0 = y_4 = 0$, $y_1 = y_3 = 2\pi\frac{3\sqrt{2}}{4}$ og $y_2 = 2\pi$. Simpsons formel for tilnærmet verdi av integralet gir

$$S \approx \frac{1}{2 \cdot 3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = \pi(2\sqrt{2} + 2/3).$$

Vi får $S \approx 10,98$, mens nøyaktig svar er $\frac{\pi}{16}(14\sqrt{2} + 17\ln(2+\sqrt{5})) \approx 10,9655$.

Eksamen desember 2000: 1.

La a være et reelt tall og betrakt polynom $p(x) = x^3 - 3ax - 1$.

(a) La $a \leq 0$. Vis at $p(x)$ er strengt voksende over $(-\infty, \infty)$.
Vis at likninga $x^3 - x - 1 = 0$ har en og bare en løsning.
Beregn denne løsningen ved bruk av Newtons metode. Du kan starte med $x_0 = 1$ og foreta 2 iterasjoner.

(b) La $a > 0$. Vis at $p(x) = 0$ har 3 ulike løsninger hvis og bare hvis $a > \sqrt[3]{1/4}$.

Forslag til løsning:

(a) Derivasjon gir $p'(x) = 3x^2 - 3a$. For $a < 0$, blir $p'(x) > 0$ for alle x, så $p(x)$ er strengt voksende. For $a = 0$ er $p(x)$ strengt voksende på $(-\infty, 0)$ og på $(0, \infty)$, og da blir $p(x)$ strengt voksende på $(-\infty, \infty)$.

Når vi skal bruke Newtons metode for å beregne løsningen av $x^3 - x - 1 = 0$, skal vi foreta en iterasjon. La oss sette $x_{n+1} = h(x_n)$ der $x_0 = 1$ og

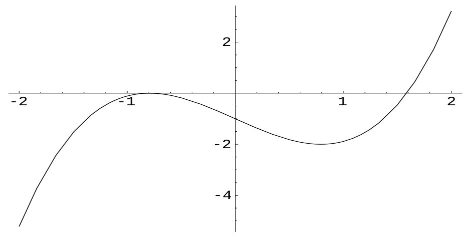
$$h(x) = x - \frac{x^3 - x - 1}{3x^2 - 1} = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 - 1}.$$

Vi får $x_1 = h(x_0) = 3/2$ og $x_2 = h(x_1) = 31/23$.

At likninga $p(x) = 0$ (med $3a = 1$) har minst en løsning ser vi ved å regne ut et par verdier, f.eks. $p(0) = -1 < 0$ og $p(2) = 5 > 0$ og ved Skjæringssetningen må det finnes minst ett nullpunkt. Fra (b) får vi at denne likninga ikke kan ha flere enn 1 løsning.

(b) Vi skal la $a > 0$. Vi har $p'(x) = 0$ når $x = \pm\sqrt{a}$. $p''(x) = 6x$, så p er konkav på $(-\infty, 0)$ og konveks på $(0, \infty)$. Vi får at p har lokalt maksimum i $x = -\sqrt{a}$, med verdi $p(-\sqrt{a}) = -a^{3/2} + 3aa^{1/2} - 1 = 2a\sqrt{a} - 1$. Og vi får at p har lokalt minimum i $x = \sqrt{a}$ med verdi $p(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} - 1$. Merk at siden $a > 0$ så er $p(\sqrt{a}) < 0$ alltid. Men da vil p ha tre nullpunkt hvis og bare hvis $p(-\sqrt{a}) > 0$, noe som er oppfylt når $a > (1/4)^{1/3}$.

Grafen til $p(x)$ når $a = (1/4)^{1/3}$. (Dette er grensetilfellet mellom 1 og 3 nullpunkter for p.)



FIGUR 1. Grafen til f

Eksamen desember 1991: 2.
Beregn grenseverdiene:

(a)
$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2x^2+1}{(x^2+1)x^2}\,dx.$$

(b)
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_1^x \ln(t)\,dt}{(x-1)^2}.$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} [n\,\ln(2n-1) - \frac{n}{2}\,\ln(4n^2)].$$

Forslag til løsning:

(a) Vi har
$$\frac{2x^2+1}{(x^2+1)x^2} = \frac{x^2+(x^2+1)}{(x^2+1)x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}.$$
Nå kan vi integrere
$$\int_1^b \frac{2x^2+1}{(x^2+1)x^2}\,dx = \int_1^b (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1})\,dx = (\frac{-1}{x} + \arctan(x))\Bigg|_1^b = 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{b} + \arctan(b),$$
og ved å ta grensen får vi
$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2x^2+1}{(x^2+1)x^2}\,dx = 1 - \pi/4 - 0 + \pi/2 = 1 + \pi/4.$$

(b)
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_1^x \ln(t)\,dt}{(x-1)^2} && \text{Får "0/0", og bruker L'Hôpitals regel} \\ =&\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{2(x-1)} && \text{Får "0/0", og bruker L'Hôpitals regel} \\ =&\lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) Vi har $\frac{1}{2}\ln(4n^2) = \ln(4n^2)^{1/2} = \ln(2n)$ slik at

$$\lim_{n\to\infty}[n\ \ln(2n-1) - \frac{n}{2}\ \ln(4n^2)] = \lim_{n\to\infty} n\ \ln(\frac{2n-1}{2n}) = \text{"}\infty\cdot 0\text{"}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\frac{2n-1}{2n})}{1/n} = \text{"}0/0\text{"} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(2n-1)} - \frac{2}{2n}}{-1/n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{-2n(2n-1)} = -\frac{1}{2}.$$

Alternativt: Se boka, Example 8 side 582. Vi har ved argumentasjonen i Ex. 8 at

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = e^a.$$

Nedenfor lar vi $a = -1$ og erstatter x med $2n$.

$$\lim_{n\to\infty}[n\ \ln(2n-1) - \frac{n}{2}\ \ln(4n^2)] = \lim_{n\to\infty} n\ \ln(\frac{2n-1}{2n})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln(1-\frac{1}{2n})^n = \ln(\lim_{n\to\infty}\sqrt{(1-\frac{1}{2n})^{2n}}) = \ln(\sqrt{e^{-1}}) = -\frac{1}{2}.$$

Eksamen desember 1991: 3.

Avgjør (og begrunn) konvergens/divergens:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+\ln^2(n)}.$$

(c) For hvilke x-verdier konvergerer rekka:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}(x+1)^n.$$

Forslag til løsning:

(a) La $a_n = \frac{n^2+1}{2^n}$. Vi bruker forholdskriteriet (boka side 646)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n((n+1)^2+1)}{2^{n+1}(n^2+1)} = \frac{(1+2/n+2/n^2)}{2(1+1/n^2)} \to \frac{1}{2} \text{ når } n\to\infty.$$

Grenseverdien eksisterer og er mindre enn 1. Da får vi konvergens.

(b) La $a_n = \frac{n}{n^2+\ln^2(n)}$ og velg $b_n = 1/n$. Vi skal sammenligne de to rekkene.

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n^2+\ln^2(n)}{n^2} = 1 + (\frac{\ln(n)}{n})^2 \to 1+0 = 1 \text{ når } n\to\infty.$$

$\sum_n b_n$ divergerer og da må $\sum_n a_n$ divergere (se boka side 644).

(c) Ved rotkriteriet får vi

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(x+1)^n}{2^n n}\right|} = \frac{|x+1|}{2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{|x+1|}{2} \text{ når } n \to \infty.$$

Vi får konvergens akkurat når $\frac{|x+1|}{2} < 1$, dvs. når $|x+1| < 2$ eller $-3 < x < 1$.
(Når $x = 1$ får vi divergens, og når $x = -3$ får vi den alternerende harmoniske rekka som konvergerer.)

Eksamen desember 1991: 4.
Løs differensiallikningene:

(a)

$$(1+x^2)dy - 2xydx = 0 \quad \text{Hint: Separabel.}$$

(b)

$$x\frac{dy}{dx} + y = \cos(2x).$$

(c) (Ikke aktuell.)

Forslag til løsning:

(a) Likninga er separabel og vi får

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx,$$

slik at $\ln|y| = \ln(1+x^2) + C$. Nå anvender vi e^x på begge sider og får

$$y = y(x) = \pm e^{\ln(1+x^2)+C} = \pm e^C e^{\ln(1+x^2)} = C'(1+x^2).$$

(b) Likninga er lineær med $P(x) = 1/x$ og $Q(x) = \frac{\cos(2x)}{x}$. Vi får integrerende faktor

$$v(x) = e^{\int 1/x\,dx} = e^{\ln(x)} = x,$$

og

$$\int v(x)Q(x)\,dx = \int x\frac{\cos(2x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Dette gir løsning

$$y(x) = \frac{1}{x}[C + \frac{\sin(2x)}{2}] = \frac{C}{x} + \frac{\sin(2x)}{2x}.$$

(c) -