Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

Eksamen 08.05.1992: 3.
noindent $f(x, y) = 3ye^x - y^3 - e^{3x}$.

(a) Vis at f har ett og bare ett stasjonært punkt og klassifiser dette.
(b) Punktet $P = (0, 2, -3)$ ligger på flaten $z = f(x, y)$.
En kule holdes i ro i P. Den slippes og begynner å trille. Hvilken retning triller den i startøyeblikket? (xy-planet er vannrett.)

Forslag til løsning:
Vi har gitt funksjon $f(x, y) = 3ye^3 - y^3 - e^{3x}$.

(a) Vi skal finne hvor de partielle deriverte er lik 0. Vi får

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3ye^x - 3e^{3x},$$
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3e^x - 3y^2.$$

Vi sette de to partielle deriverte lik 0 og får fra den første likninga at $y = e^{2x}$ slik at $y = e^{2x} = (e^x)^2 = y^4$. Følgelig må $y = 0$ eller $y = 1$. Men $y = 0$ gir ikke 0 i den første likninga, så vi står igjen med bare $y = 1$. Vi finner ett kritisk punkt $(0, 1)$.

De andre deriverte blir

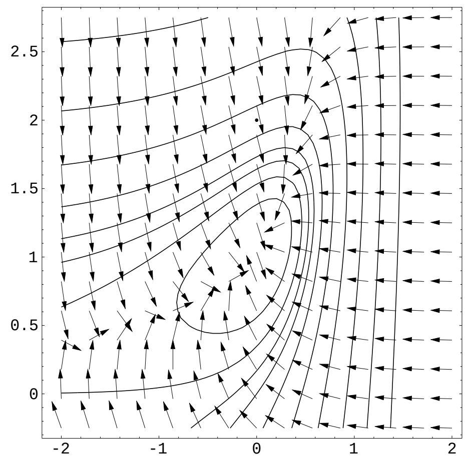
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 3ye^x - 9e^{3x},$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial xy} = 3e^x,$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -6y.$$

I punktet $(0, 1)$ får vi

$$\frac{\partial^2 f(0, 1)}{\partial x^2} = -9 < 0,$$
$$\frac{\partial^2 f(0, 1)}{\partial xy} = 3,$$
$$\frac{\partial^2 f(0, 1)}{\partial y^2} = -6.$$

Vi får $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6)(-9) - 3^2 = 54 > 0$ og $f_{xx} = -9 < 0$. Punktet $(0, 1)$ blir lokalt maksimum.

(b) $\bigtriangledown f(0, 2) = 3\vec{i} - 9\vec{j}$. Kula starter å trille i retningen $-\bigtriangledown f(0, 2)$.



FIGUR 1. Grafen til f med gradientretninger og nivåkurver

Eksamen 11.12.1996: 1.
Beregn integralene:

(a)
$$\int \frac{x^2+x+2}{x(x+1)^2}\,dx.$$

(b)
$$\int x\,\arctan(x^2)\,dx.$$

(c)
$$\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(2x)}\,dx.$$

(d)
$$\int \sqrt{4x-x^2-2}\,dx.$$

Forslag til løsning:

(a) Vi skal beregne
$$\int \frac{x^2+x+2}{x(x+1)^2}\,dx.$$
Vi må starte med delbrøkoppspalting.
$$\frac{x^2+x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$
Vi multipliserer begge sider med $x(x+1)^2$ og får:
$$A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = x^2+x+2.$$
Vi setter nå $x=0$ og får $A=2$.
Vi setter $x=-1$ og får $C=-2$.

Vi står igjen med $Bx + Bx^2 = x^2 + x + 2 - A(x+1)^2 - Cx = -x^2 - x$ slik at $B = -1$. Nå kan vi foreta integrasjonen

$$\int \frac{x^2+x+2}{x(x+1)^2}\,dx = \int (\frac{2}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2})\,dx = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C.$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\int x \arctan(x^2)\,dx && \text{Substitusjon: } u = x^2,\ du = 2x\,dx \\
=&\int (1/2)\arctan(u)\,du && \text{Delvis integrasjon: } 1 \cdot \arctan(u) \\
=&\frac{u}{2}\arctan(u) - (1/2)\int \frac{u}{1+u^2}\,du \\
=&\frac{u}{2}\arctan(u) - \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + C \\
=&\frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C.
\end{aligned}$$

(c) I dette integralet må vi starte med et par omskrivinger. Denne typen omskrivinger var vektlagt noe sterkere for noen år siden.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(2x)}\,dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)-\sin^2(x)}\,dx \\
=&\int \frac{1-\cos^2(x)}{2\cos^2(x)}\,dx = (1/2)\int (\frac{1}{\cos^2(x)} - 1)\,dx \\
=&(1/2)\tan(x) - (x/2) + C
\end{aligned}$$

(d) Først en omskriving $x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$.

$$\int \sqrt{4x - x^2 - 2}\,dx = \int \sqrt{2 - (x-2)^2}\,dx.$$

Eksamen 11.08.1992: 5.
La $f(x) = \int_1^x (e^t + te^t)\ln(t)\,dt, \quad x \in [1, \infty)$.

(a) Begrunn at det finnes nøyaktig en $x_0 \in [1, \infty)$ slik at $f(x_0) = e$.
(b) Finn et enklere uttrykk for $f(x)$ ved hjelp av delvis integrasjon, og gjør et anslag for x_0 ved å utføre 2 iterasjoner av Newtons metode.

Forslag til løsning:

(a) Vi starter med å derivere f (se Fundamentalteoremet for Calculus).

$$f'(x) = (e^x + xe^x)\ln(x).$$

Vi ser at $f'(x) > 0$ i intervallet $(1, \infty)$. Da er funksjonen (strengt) voksende, og det kan eksistere høyst en løsning av likninga $f(x) = e$.

$f(x) = 0$ har minst en løsning fordi: $f(1) = 0$, og

$$f(x) \geq \int_1^x (1+0)\ln(t)\,dt = (x\ln(x) - x) \to \infty \text{ når } x \to \infty.$$

Ved Skjæringssetningen (Intermediate Value Theorem), må likninga $f(x) = e$ ha minst en løsning i intervallet $(1, \infty)$.

(b) Celvis integrasjon gir

$$f(x) = \int_1^x e^t \ln(t)\, dt + e^t \cdot t \ln(t) \Big|_1^x - \int_1^x e^t(\ln(t)+1)\, dt = e^t t \ln(t) \Big|_1^x - \int_1^x e^t\, dt.$$

Vi får

$$f(x) = xe^x \ln(x) - e^t \Big|_1^x = xe^x \ln(x) - e^x + 1.$$

La $x_0 = 2$ og la

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{xe^x \ln(x) - e^x + 1}{(e^x + xe^x)\ln(x)} = \frac{(1 + x^2 \ln(x)) - e^{-x}}{(1+x)\ln(x)}.$$

Vi får $x_1 = h(x_0) = 1,749149...$ og $x_2 = h(x_1) = 1,6505....$