Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag

EKSAMEN

Emnekode:	**MA 1410**
Emnenavn:	**Analyse**
Dato:	04. desember 2001
Varighet:	09.00 - 14.00
Antall sider inklusivt forside:	2
Tillatte hjelpemidler:	Alle, også alfanumerisk kalkulator.
Merknader:	Nynorskteksten er identisk med originalteksten med hensyn til setningsbygging og ordvalg med disse unntakene: løsning = løysing løs = løys beregn = rekn ut begrunn = grunngi

---

Eksamen 084.12.2001: 1.

(a) La $a > 0$. Beregn integralet

$$h(a) = \int_0^a \frac{(a-t)}{(1+a-t)^2}\,dt.$$

(b) Begrunn at likninga

$$\ln(1+x) - \frac{1+2x}{1+x} = 0$$

har en og bare en løsning i intervallet $(0, \infty)$.
Bruk Newtons metode med 1 iterasjon for å finne en tilnærmet verdi for løsningen av likninga. Du kan bruke $x_0 = 5$.

(c) Beregn grenseverdiene

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right),$$

og

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin(t)\,dt}{x}.$$

Forslag til løsning:

2 (a) Ved delbrøkoppspalting, eller ved å addere og subtrahere 1, får vi:

$$h(a) = \int_0^a \frac{(a-t)}{(1+a-t)^2}\,dt = \int_0^a \frac{(1+a-t)-1}{(1+a-t)^2}\,dt$$
$$= \int_0^a \left(\frac{1}{(1+a-t)} - \frac{1}{(1+a-t)^2}\right) dx = \left(-\ln(1+a-t) - \frac{1}{(1+a-t)}\right)\Bigg|_0^a$$
$$= (-\ln(1)-1) - \left(-\ln(1+a) - \frac{1}{1+a}\right) = \ln(1+a) - \frac{a}{1+a}.$$

Alternativt, det er mulig å foreta en substitusjon av typen $u = 1+a-t$.

(b) Vi har at $h(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) - \frac{1+2x}{1+x} = 0$.

La $g(x) = \ln(1+x) - \frac{1+2x}{1+x} = 0$. Vi har $g(0) = -1 < 0$ og $g(7) = 3\ln(2) - 15/8 = 2,1.. - 1,9.. > 0$. Da g er kontinuerlig, må $g(x) = 0$ ha minst en løsning i intervallet $(0,7)$ ved Skjæringssetningen.

Derivasjon gir

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(1+x)-(1+2x)}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}.$$

Vi ser at $g'(x) > 0$ for $x > 0$. Da kan likninga $g(x) = 0$ ikke ha mer enn en løsning.

Sett $gn(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = \ln(1+x) - 2 + 1/(1+x)$. Vi får med $x_0 = 5$ at $x_1 = gn(x_0) = 5,299...$

(c) I denne oppgaven foretar vi en omskriving slik at vi kan bruke L'Hôpitals regel.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln(x) - (x-1)}{(x-1)\ln(x)} = \frac{"0"}{0}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+\ln(x)-1}{\ln(x) + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln(x)}{x\ln(x)+(x-1)} = \frac{"0"}{0}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+\ln(x)}{1+\ln(x)+1} = \frac{1}{2}.$$

Den neste bruker også L'Hôpitals regel, men bygger på Fundamenalteoremet og kjerneregelen.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin(t)\,dt}{x} = \frac{"0"}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \qquad \text{Bruk gjerne L'Hôpital en gang til.}$$

Eksamen 04.12.2001: 2.

(a) Beregn integralet

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 10x + 2}{x^2 - 4x + 8}\,dx.$$

(b) La $a > 0$. Sirkelen med sentrum i $(0,-a)$ og radius $\sqrt{2}a$ skjærer x-aksen i punktene $(-a,0)$ og $(a,0)$. Vi har at $y = \sqrt{2a^2 - x^2} - a$ når $y \geq 0$.

Beregn lengden av sirkelbuen fra $(-a,0)$ til $(a,0)$ der $y \geq 0$ ved bruk av formelen

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Forslag til løsning:

(a) Først må vi foreta en polynomdivisjon som gir
$$\frac{x^3-4x^2+10x+2}{x^2-4x+8} = x + \frac{2x+2}{x^2-4x+8}.$$
Nå kan vi integrere. Merk omskrivingen $2x+2 = (2x-4)+6$ for å få integrasjonen til å gå lett.
$$\int \frac{x^3-4x^2+10x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \int (x + \frac{2x+2}{x^2-4x+8})\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + \int (\frac{(2x-4)+6}{x^2-4x+8})\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4x+8) + \int \frac{6}{(x-2)^2+4}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + \ln(x^2-4x+8) + 3\arctan(\frac{x-2}{2}) + C.$$

(b) Vi har $y = \sqrt{2a^2-x^2} - a$ slik at $1+(y')^2 = 1 + (\frac{-x}{\sqrt{2a^2-x^2}})^2 = \frac{2a^2}{2a^2-x^2}$. Vi får lengde av kurve:
$$L = \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2-x^2}}\,dx \qquad \text{Substitusjon: } x = \sqrt{2}a\,u,\ dx = \sqrt{2}a\,du$$
$$= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{2a^2}{\sqrt{2}a\sqrt{1-u^2}}\,du \qquad \text{Grensene blir: } x = a \Rightarrow u = 1/\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}a\arcsin(u)\Big|_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi a}{\sqrt{2}} \qquad .$$

Eksamen 04.12.2001: 3.

(a) Løs differensiallikninga på $(-\infty,\infty)$
$$y' - y = 2xe^x \quad \text{med startverdi} \quad y(1) = 0.$$

(b) Løs differensiallikninga på $(0,\infty)$
$$x\,y' = \sqrt{1+y^2}.$$

Forslag til løsning:

(a) Likninga er lineær med $P(x) = -1$ og $Q(x) = 2xe^x$. Vi får integrerende faktor
$$v(x) = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}.$$
Løsningene blir
$$y(x) = e^x[C + \int v(x)Q(x)\,dx] = e^x[C + \int 2x\,dx] = e^x[C + x^2].$$
Når vi setter $x = 1$ og $y = 0$, får vi $0 = y(1) = e[C+1]$ slik at $C = -1$. Den søkte løsningen er
$$y(x) = e^x(x^2-1).$$

(b) Likninga er separabel $\frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{x}$. Vi integrerer begge sider og får

$$\int \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \operatorname{arcsinh}(y) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C.$$

Vi tar sinh() på begge sider og får

$$y(x) = \sinh(\ln(x) + C) = \frac{x^2C' - 1}{2C'x}.$$

Eksamen 04.12.2001: 4.

Vi har gitt funksjon $f(x,y) = xe^{-2y}$.

(a) Beregn tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet $P_0(1,0,1)$, og den retningsderiverte av $f(x,y)$ i punktet $(1,0)$ i retningen $\vec{v} =< 2,1 >$.
Hvilken retning har tangentlinja til nivåkurven til $f(x,y) = 1$ i punktet $(1,0)$?

(b) Finn maksimum og minimum til $f(x,y)$ over sirkelen $x^2+y^2 = 3/2$. Bruk Lagranges metode.

Forslag til løsning:

(a) Vi ser at $f(1,0) = 1$ slik at P_0 ligger på flaten til f. Lengden $|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ slik at enhetsvektor i $\vec{v}$-retningen blir $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} =< 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5} >$.

De partielt deriverte til f er:

$$f_x = \frac{d}{dx}f(x,y) = e^{-2y}, \text{ slik at } f_x(1,0) = 1$$

og

$$f_y = \frac{d}{dy}f(x,y) = -2xe^{-2y} \text{ slik at } f_y(1,0) = -2.$$

Vi får $(\nabla f)_{P_0} =< 1,-2 >$. Tangentplanet blir:

$$1(x-1) - 2(y-0) - (z-1) = 0 \quad \text{eller} \quad x - 2y - z = 0.$$

Den retningsderiverte i $\vec{u}$-retningen blir

$$(D_{\vec{u}}f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \vec{u} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.$$

$(\nabla f)_{P_0}$ er normal på $\vec{v}$, og samtidig normal på tangenten til nivåkurven i P_0. Men da må tangentretningen til nivåkurven til f i P_0 være $\vec{v}$-retningen.

(b) Vi skal nå løse likningene

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{og} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 3/2 = 0.$$

$$f_x = \lambda g_x \Leftrightarrow e^{-2y} = \lambda 2x$$
$$f_y = \lambda g_y \Leftrightarrow -2xe^{-2y} = \lambda 2y.$$

Vi ser at $\lambda \neq 0$, og vi får

$$e^{-2y}\lambda 2y = -2xe^{-2y}\lambda 2x.$$

Ved å dividere bort $2\lambda e^{-2y}$, får vi

$$y = -2x^2.$$

Innsetting i $g(x,y) = 0$ gir

$$3/2 = x^2 + y^2 = y^2 - y/2.$$

Vi får annen-grads likning

$$2y^2 - y - 3 = 0.$$

Løsningene er $y = 3/2$ og $y = -1$. $y = 3/2$ går ikke sammen med $y = -2x^2$, så vi står igjen med $y = -1$ og $x = \pm\sqrt{2}/2$.

Vi får $f(\sqrt{2}/2, -1) = \sqrt{2}e^2/2$ som maksimumsverdi og $f(-\sqrt{2}/2, -1) = -\sqrt{2}e^2/2$ som minimumsverdi.