
Eksamen 17.08.1988: 2.
La

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 2y^2 + 3}.$$

(1) Finn $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.
(2) Finn største og minste verdi til f når $x \geq 0$ og $x^2 + 2y^2 \leq 4$.

Forslag til løsning:
Vi har oppgitt

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 2y^2 + 3}.$$

(a) Partiell derivasjon gir

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + 2y^2 + 3) - x \cdot 2x}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2} = \frac{(-x^2 + 2y^2 + 3)}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2},$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2}.$$

(b) Når vi skal finne største og minste verdi til $f(x, y)$ over området avgrenset av $x \geq 0$ og $g(x, y) = x^2 + 2y^2 \leq 4$, må vi se på kritiske punkt i det indre og på mulige ekstremverdier over randa. Merk at over den delen av randa der $x = 0$, der er $f(0, y) = 0$.

Mulige kritiske punkt. Vi har $\bigtriangledown f(x, y) = 0$ hvis og bare hvis $xy = 0$ og $x^2 = 2y^2 + 3$. Fra den siste av disse likningene ser vi at $x \neq 0$. Da må $y = 0$ og $x^2 = 3$. Vi finner ett kritisk punkt $(x, y) = (\sqrt{3}, 0)$. Vi får $f(\sqrt{3}, 0) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Mulige ektremverdier over randa. Vi bruker Lagrange multiplikator metode, og ser etter løsninger av likninga $\bigtriangledown f(x, y) = \lambda \bigtriangledown g(x, y)$. Dette er det samme som likningene

$$\frac{(-x^2 + 2y^2 + 3)}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2} = \lambda \cdot 2x,$$
$$\frac{-4xy}{(x^2 + 2y^2 + 3)^2} = \lambda \cdot 4y.$$

Vi multipliserer en venstre side med høyre side i den andre likninga og omvendt. Deretter forkorter vi $\frac{\lambda}{(x^2+2y^2+3)^2}$, slik at vi får

$$-8x^2y = 4y(-x^2 + 2y^2 + 3).$$

Her er $y = 0$ eller $-2x^2 = -x^2 + 2y^2 + 3$. Den siste likninga gir $2y^2 = -x^2 - 3$. Når vi setter dette inn i $g(x, y) = 4$, får vi $0 = 7$. Dette er umulig slik at vi må ha $y = 0$, og $x = 2$ siden $g(x, y) = 4$. Vi får $f(2, 0) = 2/7 < f(\sqrt{3}, 0)$. Så $f(x, y)$ har maksimum i $(\sqrt{3}, 0)$ og minimum i $(0, y)$.

Merk at vi kunne ha brukt substitusjon $x^2 + 2y^2 = 4$ og fått $f(x, y) = \frac{x}{4+3}$ over randa $g(x, y) = 4$. Her skal $x \in [0, 2]$. Nå er det innlysende at maksimum over randa blir i $x = 2$.

Eksamen 14.12.1988: 2.

(a) Vis ved integrasjon at

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C.$$

(b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$\cos(x)\,y' + \sin(x)\,y = x.$$

Forslag til løsning:

(a) Vi bruker delvis integrasjon. La $g(x) = 0$ og $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Da er $f(x) = \tan(x)$ og vi får

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = x\tan(x) - \int \tan(x)\,dx = x\tan(x) - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx.$$

Så bruker vi at $(\cos(x))' = -\sin(x)$ og at $\int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx = \ln|h(x)|$.

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C.$$

(b) Likninga er en lineær likning

$$y' + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}y = \frac{x}{\cos(x)}.$$

Vi ser at $P(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ og $Q(x) = \frac{x}{\cos(x)}$. Integrerende faktor blir

$$v(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\ln|\cos(x)|} = \frac{1}{|\cos(x)|}.$$

Det er nok å finne en integrerende faktor og vi velger $v(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Neste integrasjon

$$\int v(x)Q(x)\,dx = \int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx = x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C.$$

Løsningen blir

$$y(x) = \frac{1}{v(x)}[x\tan(x) + \ln|\cos(x)| + C] = x\,\sin(x) + \cos(x)\ln|\cos(x)| + C\cos(x).$$

Eksamen 11.08.1992:1.

La

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)}.$$

(a) Vis at

$$f'(x) = \frac{(x-1)(5x+7)}{(x+1)^2(x+2)^2}.$$

(b) Finn lokale maksimums- og minimums-punkter, og de tilhørende maksimums- og minimums-verdiene.

(c) Finn eventuelle asymptoter og skisser grafen.

(d) Beregn ved integrasjon $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Forslag til løsning:

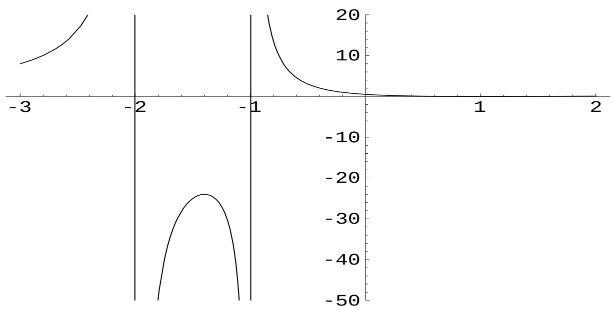
Vi har gitt funksjon $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)}$.

(a) Derivasjon gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)(x+2)2(x-1) - (x-1)^2[(x+1)+(x+2)]}{(x+1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{(x-1)(5x+7)}{(x+1)^2(x+2)^2}. \end{aligned}$$

(b) Vi setter $f'(x) = 0$ og får to løsninger $x = 1$ og $x = -7/5$. Funksjonsverdiene i disse punktene blir $f(1) = 0$ og $f(-7/5) = -24$. I $x = 1$ har $f(x)$ dobbelt nullpunkt. Det betyr at f ikke vil/kan skifte fortegn her, så $x = 1$ må være et lokalt minimumspunkt. I $x = -7/5$ skifter f' fortegn fra positiv til negativ, så dette punktet er et lokalt maksimumspunkt.

(c) Siden nevneren i definisjonen av f er 0 i $x = -1$ og i $x = -2$ blir dette to vertikale asymptoter. Vi får at $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, så linja $y = 1$ er en horisontal asymptote.



Figur 1. Grafen til f

(d) Først foretar vi en delbrøkoppspalting. Vi har

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+2)} = 1 + \frac{-5x-1}{(x+1)(x+2)}.$$

$$\frac{-5x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$\Updownarrow$$

$$-5x - 1 = A(x+2) + B(x+1).$$

Vi setter $x = -1$ og får $A = 4$. Vi setter $x = -2$ og får $B = -9$.

Nå kan vi integrere.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \frac{4}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{-9}{x+2}\,dx \\ &= x\Big|_0^1 + 4\ln(x+1)\Big|_0^1 - 9\ln(x+2)\Big|_0^1 \\ &= 1 + 4\ln(2) - 9\ln(3) + 9\ln(2) = 1 + 13\ln(2) - 9\ln(3). \end{aligned}$$