Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

Eksamen 15.08.1991: 2.
La $f(x,y) = x + y^2$.

(a) Bruk Lagranges metode til å finne største og minste verdi av $f(x,y)$ når $4x^2+y^2 = 4$.
(b) Skisser nivåkurver for f, og forklar grafisk maks/min-problemet fra punkt a).

Forslag til løsning:
Eksamen 15.08.1991: 2 La $f(x,y) = x+y^2$. Nivåkurvene er $x = c-y^2$, som er parabler som er åpne mot venstre. Vi skal studere $f(x,y)$ over kurven gitt ved $g(x,y) = 4x^2+y^2 = 4$.

(a) Lagrange sier at vi skal sette $\bigtriangledown f = \lambda \cdot \bigtriangledown g$. Dette kan skrives som

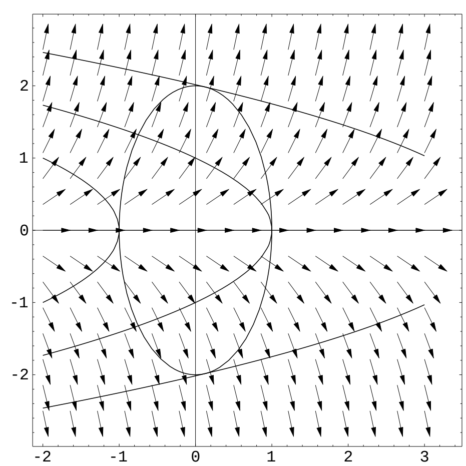
$$1 = \lambda \cdot 8y, \quad \text{og} \quad 2y = \lambda 2y.$$

Fra den siste likninga får vi $y = 0$ eller $\lambda = 1$. $y = 0$ innsatt i $g(x,y) = 4$ gie $x = \pm 1$. $\lambda = 1$ innsatt i den første likninga gir $x = 1/8$, som innsatt i $g(x,y) = 4$ gir $y = \pm\sqrt{63}/4$.

Vi får $f(1,0) = 1$ som blir relativt minimum.
Vi får $f(-1,0) = -1$ som blir absolutt minimum.
Vi får $f(1/8, \pm\sqrt{63}/4) = 65/16$ som må bli maksimum.
Kurven $g(x,y) = 4$ er lukket og begrenset og f er kontinuerlig. Da må f oppnå maksimum og minimum i punktene vi har funnet.

Alternativt, hvis vi vil unngå å bruke Lagrange, kan vi fra $g(x,y) = 4$ si at $y^2 = 4-4x^2$ som innsatt i f gir $F(x) = f(x, 4-4x^2) = 4+x-4x^2$ med $x \in [-1,1]$. Derivasjon av F gir $F'(x) = 1 - 8x = 0$ når $x = 1/8$. I tillegg må vi ta hensyn til $F's$ verdier i endepunktene $x = \pm 1$.

(b) Kurven $g(x,y) = 4$ beskriver en ellipse. Nivåkurvene $f(x,y) = c$ er parabler med åpning mot venstre. Figuren under viser nivåkurvene $c = -1, 1, 65/16$ samt gradienten til f i en del punkter.



Figur 1. Grafisk

Eksamen 22.02.2000: 5.

(a) Vis at likninga $(x+1)\ln(x) = 1$ har nøyaktig en løsning.
Finn tilnærmet verdi for denne løsningen ved Newtons metode. (Det er nok med 2 iterasjoner.)

(b) La $a > 1$. Beregn integralet $\int_0^\infty \frac{a^x}{(1+a^x)^2}\, dx$.

Forslag til løsning:

(a) For $0 < x \leq 1$ er $\ln(x) \leq 0$, så likninga kan ikke ha noen løsning der. La $f(x) = (x+1)\ln(x) - 1$.
$f(1) = -1 < 0$, og $f(e) = (e+1) - 1 > 0$, så likninga $f(x) = 0$ har minst en løsning i intervallet $(1, e)$ ved Skjæringssetningen.
Da $f'(x) = \ln(x) + \frac{(x+1)}{x} > 0$ i $(1, \infty)$, kan likninga $f(x) = 0$ ha høyst en løsning.
La $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x+1)\ln(x)-1}{\ln(x)+1+1/x}$, og la $x_0 = 2$. Vi får $x_1 = h(x_0) = 1.508...$ og $x_2 = h(x_1) = 1.493....$

(b) Vi substituerer med $u = 1 + a^x$. Da blir $du = \ln(a)a^x dx$.

$$\int \frac{a^x}{(1+a^x)^2}\, dx = \int \frac{1}{\ln(a)\, u^2}\, du = \frac{-1}{\ln(a)\, u} = \frac{-1}{\ln(a)(1+a^x)}.$$

Nå kan vi beregne det uekte integralet

$$\int_0^\infty \frac{a^x}{(1+a^x)^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{\ln(a)(1+a^x)}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2\ln(a)} - \frac{1}{\ln(a)\,(1+a^b)}\right) = \frac{1}{2\ln(a)}.$$

Eksamen 13.12.2000: 3.

(a) Beregn integralet

$$\int \frac{25}{x^2(5-x)}\, dx.$$

(b) Vis ved integrasjon at

(i)
$$\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx = \frac{-1}{x}\big((\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 2\big) + C.$$

Beregn integralet

(ii)
$$\pi \int_1^\infty \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx.$$

(Dette er volumet av et omdreiningslegeme.)

(c) Beregn integralet

(i)
$$\int_0^{\pi/3} \frac{1+\tan^2(x)}{2+\tan(x)}\, dx.$$

La

(ii)
$$F(x) = \int_0^{x^2} \cosh(t)\, dt.$$

Begrunn at $F'(x) = 2x\cosh(x^2)$.

Forslag til løsning:

(a) Vi må starte med delbrøkoppspalting.

$$\frac{25}{x^2(5-x)} = \frac{A}{5-x} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}.$$

Vi multipliserer bort nevneren $x^2(5-x)$ og får

$$25 = A(x^2 + Bx(5-x) + C(5-x).$$

Setter vi $x = 0$, får vi $C = 5$. Setter vi $x = 5$ får vi $A = 1$. Men nå har vi fått

$$25 = x^2 + 5Bx - Bx^2 + 25 - 5x,$$

og vi ser at $B = 1$. Integrasjon gir

$$\begin{aligned}\int \frac{25}{x^2(5-x)}\,dx &= \int \frac{1}{5-x}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{5}{x^2}\,dx \\ &= -\ln|5-x| + \ln|x| - 5/x + C.\end{aligned}$$

(b) Vi bruker substitusjonen $u = g(x) = \ln(x)$ og får $du = dx/x$, og får ved et par delvis integrasjoner

$$\begin{aligned}\int (\frac{\ln(x)}{x})^2\,dx &= \int u^2 e^{-u}\,du \\ &= -u^2e^{-u} - 2ue^{-u} - 2e^{-u} = -e^{-u}(u^2 + 2u + 2) \\ &= \frac{-1}{x}((\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 2.)\end{aligned}$$

For å beregne integralet (ii) må vi først beregne

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)^2 + 2\ln(x) + 2}{x} = \frac{"\infty"}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)/x + 2/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(\ln(x) + 1)}{x} = \frac{"\infty"}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2/x}{1} = 0.\end{aligned}$$

Nå får vi

$$\int_1^\infty \pi(\frac{\ln(x)}{x})^2\,dx = 0 + \pi\cdot\frac{1}{1}(\ln(1)^2 + 2\ln(1) + 2) = 2\pi.$$

(c) I (i) er telleren den deriverte av nevneren. Da får vi

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1+\tan^2(x)}{2+\tan(x)}\,dx = \ln(2+\tan(x))\Big|_0^{\pi/3} = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(2) = \ln(1+\sqrt{3}/2).$$

I (ii) får vi ved bruk av kjerneregelen (kjernen er x^2) og Fundamentalteoremet at

$$F'(x) = \frac{d}{dx}x^2 \cdot \cosh(x^2) = 2x\,\cosh(x^2).$$