

Eksamensoppgaver i MA1410: Analyse

Dato: Høsten 2001

Merknader: **Oppgaver i MA1410: Analyse tidligere gitt i MAT 5.**

Dette er oppgaver til kapitlene 10 og 11 i vår utgave av Calculus boka.
Noen punkter i oppgavene er utenfor pensum i MA 1410, og er ikke tatt med her.

kritisk punkt = stasjonært punkt

OPPGAVE 17.08.1988: 2.

La $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 2y^2 + 3}$.

- (1) Finn $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- (2) Finn største og minste verdi til f når $x \geq 0$ og $x^2 + 2y^2 \leq 4$.

OPPGAVE 26.05.1990: 1.

Gitt $f(x, y) = \sqrt{xy + 2x - 2y}$.

- (a) Bestem definisjonsområdet til $f(x, y)$ og lag en skisse av det.
Finn de stasjonære (kritiske) punktene til $f(x, y)$ og funksjonsverdiene i disse punktene.
- (b) Avgjør typen til de stasjonære punktene.
- (c) Bruk Lagranges metode til å vise at

$$\begin{aligned} \text{minimum av } g(x, y) &= (x - 1)^2 + y^2 \\ \text{når } h(x, y) &= xy + 2x - 2y = 0 \end{aligned}$$

har løsninger som ligger på snittet av hyperblene

$$(y + 1)^2 - (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{3}{4} \quad \text{og} \quad y = \frac{2x}{2 - x}.$$

Tegn grafene til disse hyperblene og angi tilnærmete verdier for skjæringspunktene.

ØPPGAVE 07.05.1991: 2.

La $f(x, y) = (x - 1)(y - 1)(4 - x - y)$.

- (a) Finn nivåkurvene $f(x, y) = 0$, og angi i et xy -diagram hvor $f(x, y) > 0$ og hvor $f(x, y) < 0$.
- (b) Bestem stasjonære punkter for $f(x, y)$, og avgjør deres type.
- (c) Bestem største verdi av $f(x, y)$ i det området av 1. kvadrant der $x + y \leq 4$.
- (d) (Ikke aktuell i MA 1410.)

ØPPGAVE 15.08.1991: 2.

La $f(x, y) = x + y^2$.

- (a) Bruk Lagranges metode til å finne største og minste verdi av $f(x, y)$ når $4x^2 + y^2 = 4$.
- (b) Skisser nivåkurver for f , og forklar grafisk maks/min-problemet fra punkt a).

ØPPGAVE 15.08.1991: 5.

Gitt funksjonen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy^2}{x^2 - y^2} & \text{når } y^2 \neq x^2 \\ 0 & \text{når } x^2 = y^2 \end{cases}$$

- (a) Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- (b) Avgjør om f er kontinuerlig i $(0, 0)$.

ØPPGAVE 08.05.1992: 2.

Finn maksimum av $f(x, y) = x^2y^3$ når $x^2 + 2y^2 = 10$ ved å bruke Lagranges metode.

ØPPGAVE 08.05.1992: 3.

$f(x, y) = 3ye^x - y^3 - e^{3x}$.

- (a) Vis at f har ett og bare ett stasjonært punkt og klassifiser dette.
- (b) Punktet $P = (0, 2, -3)$ ligger på flaten $z = f(x, y)$.

En kule holdes i ro i P . Den slippes og begynner å trille. Hvilken retning triller den i startøyeblikket? (xy -planet er vannrett.)

OPPGAVE 14.08.1992: 2.

$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}.$$

- (a) Beregn de partielle deriverte av 1. orden.
 Finn den retningsderiverte i retningen $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ i punktet $(1, 1)$.
- (b) Finn maksimum til $f(x, y)$ når $x^2 + y^2 \leq 9$.
 Har $f(x, y)$ globalt maksimum på \mathbb{R}^2 ?
- (c) (Ikke aktuell i MA1410.)

OPPGAVE 22.05.1993: 2.

$$\text{La } f(x, y) = x^2 - 2x^2y + y^2.$$

- (a) Bruk Lagranges metode til å maksimere, minimere $f(x, y)$ når $x^2 + y^2 = k^2$.
- (b) Vis at ∇f i punktet $(\frac{k\sqrt{6}}{3}, \frac{k\sqrt{6}}{3})$ er parallell med linjen $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.
 Finn en vektor i planet som står ortogonalt på f 's nivåkurve gjennom dette punktet.

OPPGAVE 09.08.1993: 4.

$$\text{La } f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}.$$

- (a) Finn nivåkurvene $f(x, y) = 0$ og angi i et diagram hvor $f(x, y) > 0$ og hvor $f(x, y) < 0$.
- (b) Finn de partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.
 Punktet $(0, 0)$ er et kritisk punkt (stasjonært punkt) til $f(x, y)$.
 Klassifiser dette punktet.
- (c) La k være et reelt tall > 0 .
 Finn største og minste verdi til $f(x, y)$ under bibetingelsen $x^2 + y^2 = k^2$.

OPPGAVE 04.05.1994: 2.

$$\text{La } f(x, y) = (x^2 + 4y^2 - 4)(1 - x^2 - y^2).$$

- (a) Finn nivåkurvene $f(x, y) = 0$.
 Hva slags kurver blir dette?
 Angi i et diagram hvor $f(x, y) > 0$ og hvor $f(x, y) < 0$.
- (b) Bestem de stasjonære (kritiske) punktene til $f(x, y)$ og klassifiser dem.

- ⁴ (c) $f(x, y)$ antar en absolutt maksimumsverdi og en absolutt minimumsverdi når $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

Bestem disse verdiene.

OPPGAVE 20.05.1995: 2.

$$f(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

- (a) Finn de stasjonære punktene til $f(x, y)$.
Klassifiser det stasjonære punktet $(0, 0)$.
- (b) Finn den minste verdien $f(x, y)$ kan ha når $x^2 + y^2 \leq 1$.
- (c) (Ikke aktuell for Ma 1410.)

OPPGAVE 16.05.1995: 3.

Finn de stasjonære punktene til $f(x, y) = xy(1 - x^2 - 2y^2)$.

OPPGAVE 10.05.1996: 2.

$$f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4.$$

- (a) Regn ut de partielle deriverte av 1. og 2. orden og finn de stasjonære punktene.
- (b) Karakteriser de stasjonære punktene $(1, 1)$ og $(0, 0)$.