Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag

EKSAMEN

Emnekode:	**MA 1410**
Emnenavn:	**Analyse**
Dato:	13. desember 2000
Varighet:	09.00 - 15.00
Antall sider inklusivt forside:	3
Tillatte hjelpemidler:	Alle, også alfanumerisk kalkulator.
Merknader:	Nynorskteksten er identisk med originalteksten med hensyn til setningsbygging og ordvalg med disse unntakene: løsning = løysing løs = løys beregn = rekn ut begrunn = grunngi

---

OPPGAVE 1.
La a være et reelt tall og betrakt polynom $p(x) = x^3 - 3ax - 1$.

(a) La $a \leq 0$. Vis at $p(x)$ er strengt voksende over $(-\infty, \infty)$.
Vis at likninga $x^3 - x - 1 = 0$ har en og bare en løsning.
Beregn denne løsningen ved bruk av Newtons metode. Du kan starte med $x_0 = 1$ og foreta 2 iterasjoner.

(b) La $a > 0$. Vis at $p(x) = 0$ har 3 ulike løsninger hvis og bare hvis $a > \sqrt[3]{1/4}$.

OPPGAVE 2.

(a) Løs differensiallikninga

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\arctan(x)}{x}$$

over intervallet $(0, \infty)$.

(b) Løs differensiallikninga

$$y' = 3y^2. \tag{1}$$

Betrakt er punkt (x, y) på en nivåkurve til $h(x, y) = x + y^3 = c$. Begrunn at normalen til nivåkurven i dette punktet har stigningstall gitt ved likning (1).

Hvis du står i et punkt $(x, y, h(x, y))$ på flaten gitt ved grafen til $h(x, y)$ og skal ta bratteste vei ned, hvilken vei ville du følge?

OPPGAVE 3.

(a) Beregn integralet
$$\int \frac{25}{x^2(5-x)}\,dx.$$
(b) Vis ved integrasjon at

(i) $$\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx = \frac{-1}{x}\big((\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 2\big) + C.$$

Beregn integralet

(ii) $$\pi \int_1^\infty \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 dx.$$

(Dette er volumet av et omdreiningslegeme.)

(c) Beregn integralet

(i) $$\int_0^{\pi/3} \frac{1+\tan^2(x)}{2+\tan(x)}\,dx.$$

La

(ii) $$F(x) = \int_0^{x^2} \cosh(t)\,dt.$$

Begrunn at $F'(x) = 2x\cosh(x^2)$.

OPPGAVE 4.

Gitt funksjonen $g(x, y) = x + y^2$. Nivåkurvene til g er parabler med åpning mot venstre.

(a) La $P_0 = (x_0, y_0)$ være et punkt på en nivå-kurve $g(x, y) = c$.
Finn en formel for tangenten til denne nivå-kurven gjennom punktet P_0 og vis at tangentlinja skjærer x-aksen og y-aksen i punktene $(x, 0)$ og $(0, y)$ der
$$x = x_0 + 2y_0^2, \quad y = \frac{x_0 + 2y_0^2}{2y_0}.$$
(b) La
$$f(x, y) = \frac{(x + 2y^2)^2}{4y}.$$
$f(x, y)$ har et minimum når $g(x, y) = 3$. Kan du gi en geometrisk begrunnelse for det?
Finn minimum av $f(x, y)$ når $g(x, y) = 3$ ved bruk av Lagranges metode.

OPPGAVE 5.

Avgjør om rekka

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

konvergerer eller divergerer.

Avgjør for hvilke x følgende rekke

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n\sqrt{n}\,x^n}{n+1}$$

konvergerer.

Erik Bedos Åsvald Lima