MA 1410: Analyse - høsten 2000

Anvendelser av integralet.

Åsvald Lima: 26.10.2000
Filnavn: MA1410integral.mcd

Vi skal se på bruk av integralet til å:

Beregne arealer
Beregne lengde av kurver
Beregne areal av visse romlige legemer
Beregne volum av visse romlige legemer

I MA 1410 forutsetter jeg at dere kjenner til disse formlene.

1. Arealet under en graf.

Anta f : [a,b] -> R er en kontinuerlig funksjon. Hvis $f(x) \geq 0$ for alle x, så definerer vi **arealet** avgrenset av f, x-aksen og de vertikale linjene x=a og x=b ved: $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

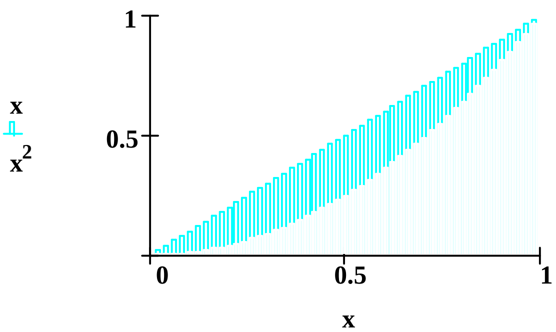
Hvis $f(x) \leq 0$ for alle x, så er arealet definert ved: $A = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Hvis g : [a,b] -> R er en annen kontinuerlig funksjon og $f(x) \geq g(x)$ for alle x, så definerer vi **arealet avgrenset av f, g og de vertikale linjene x=a og x=b** ved: $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Eksempel: La [a,b] = [0,1], la f(x) = x og g(x) = x^2. Da er arealet mellom kurvene gitt ved:

$$A = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx \rightarrow \frac{1}{6} .$$

$$x := 0, 0.02 .. 1$$



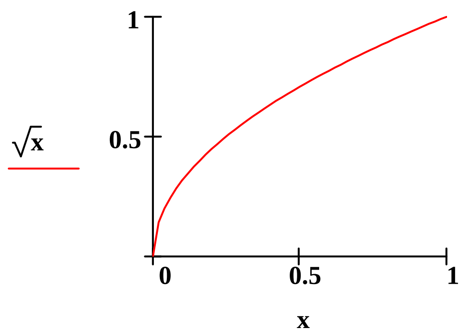
2. Lengde av graf

La f : [a,b] -> R være en deriverbar funksjon med kontinuerlig derivert. **Da har grafen til f lengde**:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2}\, dx .$$

Eksempel: La [a,b] = [0,1] og la f(x) = $\sqrt{x}$. Da er L =

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right)^2}\, dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5} + \frac{1}{8}\cdot\ln\left(9 + 4\cdot\sqrt{5}\right) .$$



$$x := 0, 0.05 .. 1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = 1.4789$$

3. Volum av omdreiningslegeme

Anta f : [a,b] -> [0, ∞ > er en kontinuerlig funksjon. Vi tenker oss at vi tar grafen til f og roterer i rommet rundt x-aksen. Da får vi et legeme som kan ha form som en tønne. **Volumet** av dette omdreiningslegemet er gitt ved: $V = \int_a^b \pi\cdot f(x)^2\, dx .$

Eksempel: Vi skal lage oss en kjegle med radius r og høyde h, og beregne volumet av denne. Sett f(x) = (r/h)x, la a=0 og la b=h. f(x) er en rett linje gjennom origo og f(h)=r.

$$V = \int_0^h \pi\cdot\left(\frac{r\cdot x}{h}\right)^2 dx \rightarrow \frac{1}{3}\cdot h\cdot\pi\cdot r^2 .$$

4. Areal av omdreiningslegeme

La f : [a,b] -> [0, ∞ > være en deriverbar funksjon med kontinuerlig derivert. La S være **overflatearealet** til den flaten vi får når grafen til f roterer i rommet om x-aksen. Da er overflatearealet gitt ved:

$$S = \int_a^b 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx.$$

<u>Eksempel:</u> La f(x) være som i eksempel 2 ovenfor (krones-is-kjeks). Vi skal beregne arealet av kjeglen.

$$S(f,a,b) := \int_a^b 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx$$. Når r=2 og h=4, får vi: $f(x) := \frac{2\cdot x}{4}$ og:

$$S(f,0,4) \to 4\cdot\pi\cdot\sqrt{5}$$

5. Oppsummering.

Vi kan nå lage en oppsummering av de 4 integralene ovenfor.

$$a := 0 \qquad b := \pi \qquad f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := 0$$

$$A(f,g,a,b) := \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \qquad A(f,g,a,b) \to 2 \qquad A(f,g,a,b) = 2$$

$$V(f,a,b) := \int_a^b \pi\cdot f(x)^2\,dx \qquad V(f,a,b) \to \frac{1}{2}\cdot\pi^2 \qquad V(f,a,b) = 4.9348$$

$$L(f,a,b) := \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx \qquad L(f,a,b) \to 2\cdot\sqrt{2}\cdot \mathrm{EllipticE}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)$$

$$L(f,a,b) = 3.8202$$

$$S(f,a,b) := \int_a^b 2\cdot\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx$$

$$S(f,a,b) \to 2\cdot\pi\cdot\sqrt{2} + 2\cdot\pi\cdot\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad S(f,a,b) = 14.4236$$