Numeriske beregninger i Ma 1410: Analyse

I Ma 1410 inngår noen få metoder for numerisk beregning. Det er Newtons metode for å løse likninger og Trapes-metoden og Simpsons formel for integrasjon.

Newtons metode

Vi har brukt denne metoden i obligatorisk oppgave 1. Vi kan skrive et program som automatisk foretar et gitt (=n) antall iterasjoner:

$$\mathrm{Newton}(f, x0, c, n) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad x \leftarrow x - \dfrac{f(x) - c}{\dfrac{d}{dx} f(x)} \end{array} \right. .$$

Alternativt kan vi velge antallet iterasjoner n, startverdi x0 og skrive ut verdien for hver iterasjon.

La $g(x) := x^{10} - 10$ og $h(x) := x - \dfrac{g(x)}{\dfrac{d}{dx} g(x)}$. La oss velge $j := 1..4$, og $x_0 := 1.5$. $x_j := h(x_{j-1})$. Da får vi

liste med x0, x1, x2 osv.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.37601229 \\ 1.29495671 \\ 1.2631179 \\ 1.25898748 \end{pmatrix}$.

Bruker vi Newton( ) funksjonen på g(x), får vi ti-ende rot av 10 til å bli $\mathrm{Newton}(g, 1.5, 0, 4) = 1.25898748$.

Trapesmetoden

Vi skal beregne numerisk et bestemt integral $\int_a^b f(x)\, dx$. Vi starter med å velge et naturlig tall n, regner ut h og funksjonsverdier som i formelen side 346 i boka.

Vi hjelp av programmerings mulighetene i Mathcad kan vi lage et funksjon som beregner integralet ved Trapesmetoden.

$$\mathrm{Trapes}(f, a, b, m) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b - a}{m} \\ \text{sum} \leftarrow \dfrac{f(a) + f(b)}{2} \\ \text{for } k \in 1..m - 1 \\ \quad \text{sum} \leftarrow \text{sum} + f(a + k \cdot h) \\ \text{sum} \cdot h \end{array} \right. .$$

Vi kan nå teste denne funksjonen. La $a := 0$, $b := \pi$, og $f(x) := \sqrt{1 + \cos(x)^2}$. Vi beregner lengden til grafen til sin(x) fra 0 til π. (Vi velger **Format-Result - Number of decimal places** 8 desimaler.)
$\mathrm{Trapes}(f, a, b, 8) = 3.82019772$. Hva får vi med større m? $\mathrm{Trapes}(f, a, b, 20) = 3.82019779$.

I beregningene ovenfor er detaljene i utregningen delvis skjult i programmeringen. Vi bruker samme f(x), $a := 0$ og $b := \pi$.

Vi kan sette $m := 4$, $h := \dfrac{b - a}{m}$ og range-variabel $X := a, a + h .. b$.

Da får vi $X =$ og $f(X) =$

X	f(X)
0	1.41421356
0.78539816	1.22474487
1.57079633	1
2.35619449	1.22474487
3.14159265	1.41421356

Dette er lister med delepunktene og funksjonsverdiene i delepunktene.

Simpsons formel

Simpsons formel er nesten lik Trapes formelen. Vi må passe på å bruke andre vekter på funksjonsverdiene. Merk at mod(k,2)=0, betyr at k er par-tall. Ved bruk av Simpsons formel må n være et partall.

$$
\mathrm{Simpson}(f, a, b, n) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{b - a}{n} \\
sum \leftarrow f(a) + f(b) \\
\text{for } k \in 1 .. (n - 1) \\
\quad sum \leftarrow \left| \begin{array}{ll} sum + 2 \cdot f(a + k \cdot h) & \text{if } \mathrm{mod}(k, 2) = 0 \\ sum + 4 \cdot f(a + k \cdot h) & \text{otherwise} \end{array} \right. \\
sum \cdot \dfrac{h}{3}
\end{array}
\right.
$$

Test: $\mathrm{Simpson}(f, 0, \pi, 8) = 3.82028241$, og $\mathrm{Simpson}(f, 0, \pi, 20) = 3.82019779$.
$\mathrm{Trapes}(f, 0, \pi, 8) = 3.82019772$.