Obligatorisk IT-øvelse Nr. 1 i MA-1410, høsten 2002.

Løsningsforslag, 28.10.2002 - Å. Lima.

Oppgave 1.

Om Newtons metode.

a) La f(x) = x^4 + x -3. Tegn grafen til f(x).

b) Begrunn at f(x) har nøyaktig 2 nullpunkt, og finn disse ved bruk av Newtons metode.

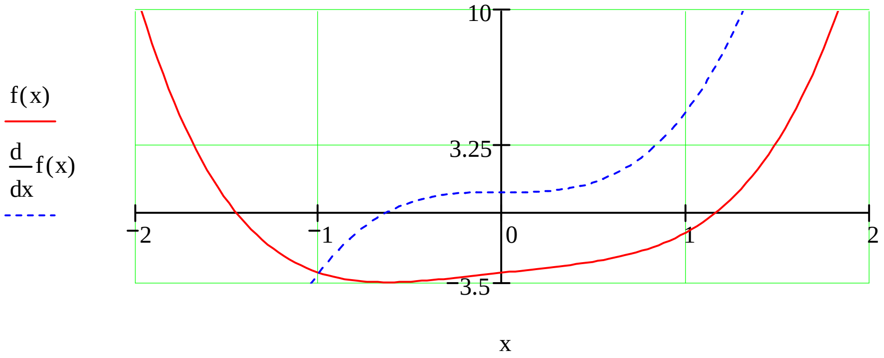
1 a):

$f(x) := x^4 + x - 3$

Vi tegner grafen til f(x) over et intervall rundt 0.

$x := -2, -1.97 .. 2$

Vi innfører range variabel x.



1 b):
Først beregner vi de to nullpunktene vi ser eksisterer fra grafen over.

$$h(x) := x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}f(x)}$$

$k := 0 .. 5$

$x_0 := 0.5$ $\qquad$ $z_0 := -1.5$

$x_{k+1} := h(x_k)$ $\qquad$ $z_{k+1} := h(z_k)$

$$x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.125 \\ 1.629457 \\ 1.319216 \\ 1.186848 \\ 1.1646 \\ 1.164035 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.455 \\ -1.452633 \\ -1.452627 \\ -1.452627 \\ -1.452627 \\ -1.452627 \end{pmatrix}$$

Vi skal nå begrunne at f(x) har nøyaktig 2 nullpunkt.

1) Minst 2 nullpunkt.
f(x) er kontinuerlig. f(0) = -3, $f(2) = 15$, og $f(-2) = 11$. Vi ser at f(x) skifter fortegn minst 2 ganger, i intervallene (-2,0) og (0,2). Ved mellomliggende verdiers teorem, boka side 130, har f(x) minst 2 nullpunkt.
2) Maksimalt 2 nullpunkt.
Nå bruker vi Rolles teorem side 237. Det sier at hvis f(x) har 2 nullpunkt, så må f '(x) ha minst ett nullpunkt imellom disse. Men da følger at hvis f(x) har minst 3 nullpunkt, så må f '(x) ha minst to nullpunkt, og f ''(x) må ha minst ett nullpunkt. Men f ''(x) = $12x^2$ er voksende, og da kan f '(x) ha maksimalt ett nullpunkt. Det betyr at f(x) kan ha maksimalt 2 nullpunkt, nemlig de vi har funnet ovenfor.

Oppgave 2.
a) La f(x) = sin(x). Beregn arealet avgrenset av f(x) over intervallet [0, π] eksakt. (Bruk ->)

b) Beregn lengden av kurven som f definerer over samme intervall. (Bruk =)

c) Tegn grafene til f og til funksjonen dere intergrerer i b). Ser svarene rimelige ut? (Begrunn dette svaret.)

2 a):

$f2(t) := \sin(t)$ $\qquad \int_0^{\pi} f2(t)\,dt \rightarrow 2$

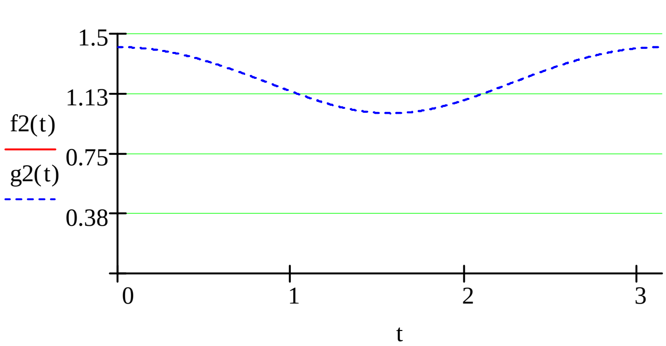
Vi har brukt x over, så nå bruker vi t som variabel.

2 b):

$g2(t) := \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} f2(t)\right)^2}$ $\qquad \int_0^{\pi} g2(t)\,dt = 3.820198$

Lengden av grafen til f2(t) finner vi ved å integrere funksjonen g2(t) gitt til venstre.

2 c):



Lengden av grafen til f2 er vanskelig å anslå. Svaret 3.82 ser noe lite ut når vi vet at lengden av aksen under grafen er 3.14.

Når vi ser på grafen til g2(t), ser det ut som at den har en gjennomsnittlig høyde på ca. 1.25. Og arealet under grafen til g2, som er lik lengen av grafen til f2, blir da $1.25\pi = 3.927$. Dette tyder på at svaret 3.82 kan være rett.

Oppgave 3.

a) Regn ut lengden av kurven ved bruk av trapesmetoden (boka side 374) med valget n = 4.

b) Gi et estimat over feilen i svaret. (Bruk formel (1) side 376 i boka.) Hvor stor er M = maksimum av absoluttverdien til den annen-deriverte?

c) Anta jeg ønsker at dere regner ut svaret for meg med feil mindre enn 10^{-8}. Hvor stor n må dere bruke?
Hva blir svaret når dere bruker denne verdien for n? (Dette spørsmålet er det valgfritt å svare på

3 a):

$$f3(x) := x^2$$

$$g3(x) := \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} f3(x)\right)^2} \rightarrow \left(1 + 4 \cdot x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Som i oppgave 2, definerer vi funksjonen f3, og den nye funksjonen g3 som er den som må integreres når vi skal beregne lengden av grafen/kurven.
Vi kan bruke den ferdiglagte formelen for trapes-summen.

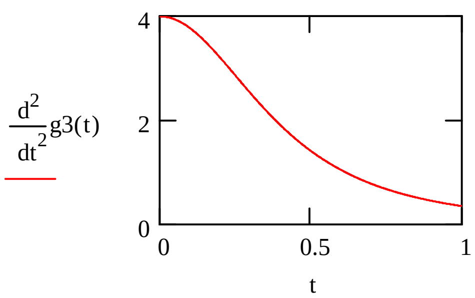
$n := 4 \qquad a := 0 \qquad b := 1$

$$\text{Trapes}(f, a, b, m) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b - a}{m} \\ \text{sum} \leftarrow \dfrac{f(a) + f(b)}{2} \\ \text{for } \; k \in 1 .. m - 1 \\ \quad \text{sum} \leftarrow \text{sum} + f(a + k \cdot h) \\ \text{sum} \cdot h \end{array} \right.$$

$$\text{Trapes}(g3, a, b, n) = 1.48826429440122$$

Når vi setter inn g3, a, b og n=4, får vi Lengde = 1.4882.

3 b):



Vi trenger M = maksimum av den annen-deriverte. Vi leser fra grafen at M = 4.

Formel for feilen ved bruk av trapesmetoden finner vi i boka.

$M := 4$

$E(n) := \dfrac{M\cdot(b-a)^3}{12\cdot n^2}$

I c) skal vi sette feilen E = 10^{-8}, å løse den likninga vi får med hensyn på n.

$E(4) = 0.020833$

3 c):
Vi skal finne ut hvor stor n må velges for at E(n) skal bli mindre enn 10^{-8}. Vi setter E(n) lik denne verdien og løser likninga med hensyn på n. Vi får at n må ha minst denne verdien:

$nc := \sqrt{\dfrac{M\cdot(b-a)^3}{12}}\cdot 10^4$ $\quad nc = 5.774\times 10^3$

Vi må velge n=5774.

$n := 5774$ $\quad \text{Trapes}(g3, a, b, n) = 1.47894286201597$

Med den utregnete n-verdien får i lengden av kurven til å bli 1.47894286.

Eksakt svar er:

Vi kan be Mathcad regne ut svaret eksakt.

$$\int_0^1 g3(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{5} - \frac{1}{4}\cdot\ln\left(-2+\sqrt{5}\right) = 1.4789428575446$$

Vi ser at feilen i svaret er ca. $10^{-8}/2$.

Skal vi ha 2 ekstra rette desimaler, må n multipliseres med 10^1.

$\text{Trapes}(g3, a, b, 10n) = 1.4789428575893$

Kommentarer til besvarelsene:
Gruppebesvarelsene var gjennomgående bra til meget bra. En-manns besvarelsene var jevnt over klart svakere. I oppgave 1 sviktet det særlig på argumentasjonen om hvorfor f har nøyaktig 2 nullpunkt. Alle bør studere nøye det argumentet jeg har gitt ovenfor.

Oppgave 2 var besvart jevnt godt av gruppene. Et av punktene jeg ønsket å fokusere på er at vi har problemer med å gi presis vurdering av visse geometriske objekt (som lengder av kurver, kakediagram, osv.), mens vi har lettere for å vurdere andre geometriske objekter (arealer, histogrammer, osv.)

I oppgave 3, hadde noen brukt f(x) = sin(x). Det er bare fint at ikke alle regner på de samme funksjonene.