Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag
Institutt for matematiske fag

Emne:	**MA 2410: Reell analyse**
Dato:	Våren 2000
Tema:	Grenser og kontinuitet i $\mathbb{R}^n$

I kursbeskrivelsen står det "... Topologiske omgrep i n-dimensjonale rom og reelle kontinuerlige funksjonar av n reelle variable". Den boka vi brukte tidligere, Colin Clark: "Elementary Mathematical Analysis", inneholdt et kapittel om topologiske begrep og kontinuerlige funksjoner i $\mathbb{R}^n$. Da vi måtte skifte bok, fant vi ingen bok som dekket kursinnholdet fullt ut og som vi syntes var tilpasset vårt behov. Dette notatet vil omtale de tema fra $\mathbb{R}^n$ som inngår i MA 2410 og som ikke er omtalt i Gordon's bok.

1. Metrikk i $\mathbb{R}^n$.

La $n \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Vektorrommet $\mathbb{R}^n$ består av alle ordnete n-tuppel $\boldsymbol{x} = \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ der alle x_j er reelle tall. Disse ordnete n-tuppel kalles punkter eller vektorer.

I $\mathbb{R}^n$ har vi en vektorromsstruktur ved at vi har definert addisjon og skalarmultiplikasjon ved

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$c\vec{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n)$$

når c er et reelt tall og $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Likhet er definert ved $\vec{x} = \vec{y}$ hvis og bare hvis $x_j = y_j$ for alle $j = 1, 2, \dots, n$. Vi har en viktig vektor med eget symbol $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Vi regner med at regneoperasjonene for vektorer i $\mathbb{R}^n$ er kjent fra kurs i calculus eller kurs i lineær algebra. **Skalarproduktet** eller prikk-produktet av to vektorer er definert ved

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Skalarproduktetet av to vektorer er et reelt tall. **Lengden** av en vektor er definert ved

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Avstanden mellom to vektorer $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er definert ved

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

Ofte ser vi skrevet $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, der d står for distance.

$d(\cdot, \cdot)$ kalles en **metrikk**. I $\mathbb{R}^n$ spiller denne metrikken samme rolle som $|\cdot|$, absoluttverdien, spiller i $\mathbb{R}$. Vi bruker den til å måle om avstander er små eller store.

Vi har følgene regneregler for metrikken

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| \geq 0 \quad \text{og} \quad \|\vec{x}-\vec{y}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{y} \tag{1}$$

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|\vec{y}-\vec{x}\| \tag{2}$$

$$\|\vec{x}-\vec{z}\| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\| \tag{3}$$

Den siste ulikheten kalles trekant ulikheten. Den har en geometrisk tolkning ved at lengden av en side i en trekant er mindre enn summen av lengdene av de to andre sidene i trekanten. Trekantulikheten er en konsekvens av Cauchy-Schwarz ulikheten.

Proposition 1.1 (Cauchy-Schwarz ulikhet). *For skalarproduktet gjelder ulikheten*

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

Vi har likhet hvis og bare hvis det finnes et tall c slik at $\vec{y} = c\vec{x}$.

Bevis. La oss skrive $A = \vec{x}\cdot\vec{x}$, $B = \vec{x}\cdot\vec{y}$ og $C = \vec{y}\cdot\vec{y}$. For alle reelle tall t har vi

$$\begin{aligned} 0 \leq \|t\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= (t\vec{x}+\vec{y})\cdot(t\vec{x}+\vec{y}) \\ &= t^2(\vec{x}\cdot\vec{x}) + 2t(\vec{x}\cdot\vec{y}) + (\vec{y}\cdot\vec{y}) \\ &= At^2 + 2Bt + C \end{aligned}$$

Siden denne annen grads likninga alltid tar verdier ≥ 0, så får vi fra formelen for røttene i en annen grads likning, at $4B^2 - 4AC \leq 0$, dvs. $B^2 \leq AC$. Tar vi roten på begge sider her, får vi ulikheten vi skulle bevise.

Vi har likhet i Cauchy-Schwarz ulikhet hvis og bare hvis $B^2 = AC$. I dette tilfellet får vi at $At^2 + 2Bt + C = 0$ har to sammenfallene røtter gitt ved $t_0 = -B/A$. For denne t_0 har vi $\|t_0\vec{x}+\vec{y}\| = 0$, dvs. $\vec{y} = -t_0\vec{x}$. □

Proposition 1.2 (Trekant ulikheten). *For alle vektorer $\vec{x}$ og $\vec{y}$ gjelder*

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Bevis. Litt regning gir (ulikheten følger av Cauchy-Schwarz ulikhet)

$$\begin{aligned} \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$

Ta roten av begge sider av denne ulikheten. □

Når vi erstatter $\vec{x}$ med $\vec{x}-\vec{y}$ og erstatter $\vec{y}$ med $\vec{y}-\vec{z}$ i trekant ulikheten, så får vi ulikheten (3) ovenfor.

Fra Cauchy-Schwarz ulikhet følger at når $\vec{x} \neq \vec{0}$ og $\vec{y} \neq \vec{0}$, så er

$$\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \in [-1, 1].$$

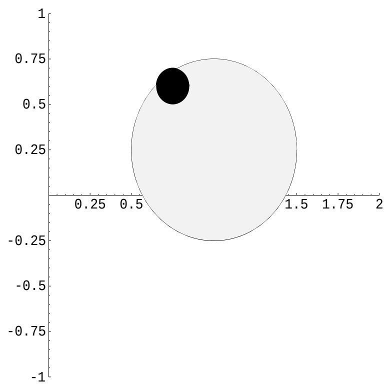
Det finnes da et entydig tall $\theta \in [0,\pi]$ slik at $\cos(\theta) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$. θ kalles vinkelen mellom $\vec{x}$ og $\vec{y}$.

La $\vec{x}$ være et punkt i $\mathbb{R}^n$ og la $r > 0$ være et tall. Mengden

$$B(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \colon \|\vec{x} - \vec{y}\| < r\}$$

kalles den **åpne kula** om $\vec{x}$ med radius r. På tallinja er åpne kuler det samme som åpne intervaller, $(a, b) = B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. I $\mathbb{R}^2$ er en kule en sirkeldisk, der periferien ikke er tatt med. I $\mathbb{R}^3$ er kula det indre av en vanlig kule.

På figuren har vi tegnet kulene $B((1.0, 0.25), 0.5)$ og $B((0.75, 0.6), 0.1)$.



Definition 2.1. La $D \subset \mathbb{R}^n$ være en delmengde. Vi sier at D er **åpen** hvis for alle $\vec{x} \in D$, det finnes $r > 0$ slik at $B(\vec{x}, r) \subset D$. Vi sier at D er **lukket** hvis komplementet $\mathbb{R}^n \backslash D = \{\vec{y} \colon \vec{y} \notin D\}$ er åpen.

Åpne mengder er generaliseringer av åpne intervaller, og lukkede mengder er generaliseringer av lukkede intervaller.

Proposition 2.1. *Kulene $B(\vec{x}, r)$ er åpne.*

Bevis. La $\vec{y} \in B(\vec{x}, r)$. Da er $p = r - \|\vec{x} - \vec{y}\| > 0$. Vi påstår at $B(\vec{y}, p) \subset B(\vec{x}, r)$. La $\vec{z} \in B(\vec{y}, p)$. Ved trekant ulikheten får vi

$$\|\vec{x} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| < (r - p) + p = r.$$

Dette viser påstanden. ☐

Definition 2.2. La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og la $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Vi kaller $\vec{x}$ et **randpunkt** til D hvis for alle $r > 0$, kula $B(\vec{x}, r)$ inneholder både punkter i D og punkter utenfor D. Samlingen av randpunkter til D kalles **randa** til D.

At vilkårlige unioner av åpne mengder i $\mathbb{R}^n$ er åpne, ses lett! Anta $(D_j)_{j=1}^m$ er endelig mange mengder i $\mathbb{R}^n$ som alle er åpne, og la $\vec{x} \in \cap_{j=1}^m D_j$. For hver j velg en $r_j > 0$ slik at $B(\vec{x}, r_j) \subset D_j$. La $r = \min_{1 \leq j \leq m} r_j$. Da er $r > 0$ og $B(\vec{x}, r) \subset \cap_{j=1}^m D_j$. Dette viser at endelige snitt av åpne mengder er åpne.

Proposition 2.2. *De "lukka" kulene $\overline{B(\vec{x}, r)} = \{\vec{y} \colon \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq r\}$ er lukkede mengder. Randa til en kule $B(\vec{x}, r)$ er $\{\vec{y} \colon \|\vec{x} - \vec{y}\| = r\}$.*

Bevis. La $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ slik at $\|\vec{x} - \vec{y}\| > r$, og sett $p = \|\vec{x} - \vec{y}\| - r > 0$. La $\vec{z} \in B(\vec{y}, p)$. Da er $\|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{y}\|$ slik at $\|\vec{x} - \vec{z}\| > \|\vec{x} - \vec{y}\| - p = r$. Dette viser at $\mathbb{R}^n \backslash \{\vec{y} \colon \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq r\}$ er åpen.

Anta $\|\vec{x} - \vec{y}\| = r$. Hvis $p > 0$, så vil kula $B(\vec{y}, p)$ inneholde punkter inni $B(\vec{x}, r)$ og punkter utenfor $B(\vec{x}, r)$. (Tegn en figur.) Så alle punkter som oppfyller $\|\vec{x} - \vec{y}\| = r$ må ligge på randa.

Hvis $\|\vec{x}-\vec{y}\| < r$, så kan ikke $\vec{y}$ være randpunkt ved Proposition 2.1. Hvis $\|\vec{x}-\vec{y}\| > r$, så er $\vec{y}$ ikke randpunkt ved første del av dette beviset. Dermed får vi at randa består av $\{\vec{y} \colon \|\vec{x}-\vec{y}\| = r\}$. $\square$

La oss skrive $\overline{D}$ for unionen av D og randa til D. $\overline{D}$ er en lukket mengde (vi kan vise at $\mathbb{R}^n \backslash \overline{D}$ er åpen), og den kalles tillukningen til D.

Vi har at $\vec{x} \in \overline{D} \Leftrightarrow D \cap B(\vec{x}, r) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$. Det følger da at $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{D} \Leftrightarrow D \cap B(\vec{x}, r) = \emptyset$ for en $r > 0$, dvs. $\mathbb{R}^n \backslash \overline{D}$ er åpen, og $\overline{D}$ er lukket.

Oppgave 1.
La $D \subset \mathbb{R}^n$, og la M være randpunktene til D. La $D^\circ = \{\vec{x} \in D \colon B(\vec{x}, r) \subset D \text{ for en } r > 0\}$ - kalt det indre av D.
Vis at M alltid er lukket.
Vis at hvis D er lukket, så er $D = M \cup D^\circ$.

I den delen av matematikk som kalles topologi, starter en med en mengde X. Blant alle delmengdene av X, plukker en ut noen som en kaller åpne mengder. Disse åpne mengdene skal oppfylle følgende krav

- X og $\emptyset$ skal begge være åpne,
- En vilkårlig union av åpne mengder skal være åpen,
- Snitt av endelig mange åpne mengder skal være åpne.

Ofte defineres de åpne mengdene ved kuler $B(x, r) = \{y \colon d(x, y) < r\}$ der d er en metrikk på X.

La I være et intervall og la f, g være to begrensede funksjoner som begge er definert på I. La oss skrive $d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$. Da er d en metrikk på mengden av begrensede funksjoner. Tallene (M_n) definert i Theorem 8.3 er det samme som $d(f_n, f)$.

Oppgave 2.
Vis at $d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$ oppfyller regnereglene for metrikker (1), (2) og (3) ovenfor. (Vi antar f og g er begrensede funksjoner på intervall I.)

Definition 2.3. En mengde D i $\mathbb{R}^n$ sies å være **begrenset** hvis det finnes en $r > 0$ (kan være stor) slik at $D \subset B(\vec{0}, r)$.

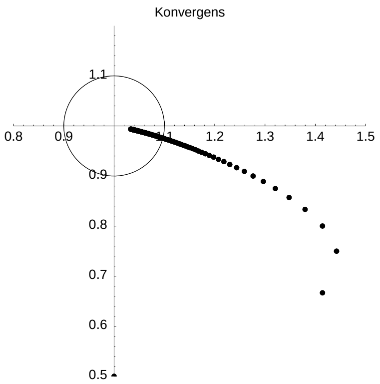
3. Grenser og kontinuitet i $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1. En følge $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ i $\mathbb{R}^n$ sies å **konvergere** mot en vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ hvis det for alle $\epsilon > 0$ finnes N slik at

$$k \geq N \Rightarrow \|\vec{x} - \vec{x_k}\| < \epsilon,$$

og vi skriver $\lim_{k \to \infty} \vec{x_k} = \vec{x}$ eller $\vec{x_k} \to \vec{x}$ når $k \to \infty$.

Grafisk ser konvergens i $\mathbb{R}^2$ slik ut:



Neste setning viser at vi har konvergens av følger hvis og bare hvis følgen konvergerer i hver koordinat.

Proposition 3.1. *La* $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *og la* $\vec{x_k} = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ *der* $k \in \mathbb{Z}^+$. *Da vil* $(\vec{x_k})$ *konvergere mot* $\vec{x}$ *hvis og bare hvis* $\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j$ *for alle* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Bevis. For hver $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ har vi

$$|x_j^k - x_j| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k - x_i)^2} = \|\vec{x_k} - \vec{x}\| \to 0 \text{ når } k \to \infty.$$

Dette viser at hvis følgen konvergerer, så vil den konvergere i hver koordinat.

Anta omvendt at $\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j$ for alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. La $\epsilon > 0$. For hver j, velg en N_j slik at

$$k \ge N_j \Rightarrow |x_j^k - x_j| < \epsilon/\sqrt{n}.$$

La $N = \text{maks}_{1\le j\le n} N_j$. Da får vi

$$k \ge N \Rightarrow \|\vec{x_k} - \vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j^k - x_j)^2} < \epsilon.$$

Dette viser at $\vec{x_k} \to \vec{x}$. □

De vanlige regnereglene for grenser som gjelder på tallinja, gjelder også i $\mathbb{R}^n$.

Theorem 3.2. *La c være et tall og la* $(\vec{x_k})$ *og* $(\vec{y_k})$ *være to følger. Da gjelder:*

(a) *Hvis* $(\vec{x_k})$ *konvergerer, så er grensen entydig.*
(b) *Hvis* $(\vec{x_k})$ *konvergerer, så er* $\lim_{k\to\infty} c\vec{x_k} = c\lim_{k\to\infty} \vec{x_k}$.
(c) *Hvis* $(\vec{x_k})$ *og* $(\vec{y_k})$ *konvergerer, så er* $\lim_{k\to\infty}(\vec{x_k} + \vec{y_k}) = \lim_{k\to\infty} \vec{x_k} + \lim_{k\to\infty} \vec{y_k}$.

Vi utelater beviset. Detaljene er som i beviset for Theorem 2.6.

Oppgave 3.
La $\vec{x_k} = (\sqrt[k]{k}, \frac{k}{k+1}, \frac{k}{2^k})$. Finn grensen.

Oppgave 4.
Gitt at $\vec{x_0} = \lim_{k\to\infty} \vec{x_k}$ og $\vec{y_0} = \lim_{k\to\infty} \vec{y_k}$. Vis at $\vec{x_0} \cdot \vec{y_0} = \lim_{k\to\infty} \vec{x_k} \cdot \vec{y_k}$.

Definition 3.2. Vi sier at en følge $(\vec{x_k})_{k=1}^\infty$ i $\mathbb{R}^n$ er Cauchy hvis

for alle $\epsilon > 0$ det finnes N slik at

$$k, m \ge N \Rightarrow \|\vec{x_k} - \vec{x_m}\| < \epsilon.$$

Proposition 3.3. *En følge $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ i $\mathbb{R}^n$ er konvergent hvis og bare hvis den er Cauchy.*

Bevis. At konvergente følger er Cauchy, følger av ulikheten $\|\vec{x_k}-\vec{x_m}\| \leq \|\vec{x_k}-\vec{x}\|+\|\vec{x}-\vec{x_m}\|$.

Anta omvendt at $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ er en Cauchy følge. For alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ har vi $|x_j^k - x_j^m| \leq \|\vec{x_k} - \vec{x_m}\|$ slik at alle koordinatfølgene $(x_j^k)_{k=1}^{\infty}$ er Cauchy følger. La $x_j = \lim_{k\to\infty} x_j^k$ og la $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nå vet vi at $(\vec{x_k})$ konvergerer koordinatvis mot $\vec{x}$, og ved Propositionen ovenfor får vi $\vec{x} = \lim_{k\to\infty} \vec{x_k}$. □

Theorem 3.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Enhver begrenset følge i $\mathbb{R}^n$ har en konvergent delfølge.*

Bevis. La $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ være en begrenset følge i $\mathbb{R}^n$. $(x_1^k)_{k=1}^{\infty}$ er en begrenset følge i $\mathbb{R}$ og ved Bolzano-Weierstrass teoremet (Theorem 2.15), har den en konvergent delfølge $(x_1^{k_m})$. Nå er $(x_2^{k_m})$ en begrenset følge i $\mathbb{R}$ og igjen ved Bolzano-Weierstrass har den en konvergent delfølge $(x_2^{k_{m_p}})$. Vi gjentar dette for koordinatene 3, 4 osv. helt til n. Den siste delfølgen vil definere en delfølge av $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ som konvergerer koordinatvis, og den vil derfor konvergere i $\mathbb{R}^n$. (Merk at en delfølge av en delfølge, er en delfølge.) □

Proposition 3.5. *La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$. Da er D lukket hvis og bare hvis for enhver konvergent følge $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ der alle $\vec{x_k} \in D$, vi har $\lim_{k\to\infty} \vec{x_j} \in D$.*

Bevis. Anta D er lukket. La $(\vec{x_k})$ være en følge i D og anta $\vec{x} = \lim_{k\to\infty} \vec{x_k}$. Hvis $\vec{x} \notin D$, så finnes kule $B(\vec{x}, r)$ med $r > 0$ slik at $D \cap B(\vec{x}, r) = \emptyset$. (Siden komplementet til D er åpen mengde.) Ved definisjonen av konvergens, finnes N slik at når $k \geq N$ så er $\vec{x_k} \in B(\vec{x}, r)$. Men da er $\vec{x_k}$ både i D og utenfor D. Dette er en motsigelse, så vi må ha $\vec{x} \in D$.

Anta nå at D ikke er lukket. Da er $\mathbb{R}^n \backslash D$ ikke åpen, så det finnes $\vec{x} \notin D$ slik at $D \cap B(\vec{x}, r) \neq \emptyset$ for alle $r > 0$. For hver k, velg $\vec{x_k} \in D \cap B(\vec{x}, 1/k)$. Da er $(\vec{x_k})$ følge i D som konvergerer mot et punkt utenfor D. □

Definition 3.3. En delmengde D i $\mathbb{R}^n$ sies å være **kompakt** hvis den er lukket og begrenset.

Resultater som holder for lukkede og begrensede intervaller i $\mathbb{R}$, holder stort sett for kompakte delmengder i $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.6. *En mengde D i $\mathbb{R}^n$ er kompakt hvis og bare hvis enhver følge i D har en delfølge som konvergerer mot et punkt i D.*

Bevis. Anta D er kompakt og la $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ være en følge i D. Da er følgen begrenset (siden D er begrenset). Ved Bolzano-Weierstrass har den en konvergent delfølge. Siden D er lukket, vil grensepunktet for delfølgen ligge i D ved forrige setning.

Anta omvendt at enhver følge i D har en delfølge som konvergerer mot et punkt i D. La $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ være en følge i D som konvergerer mot en $\vec{x} = \lim_{k\to\infty} \vec{x_k}$. Da vil enhver delfølge konvergere mot $\vec{x}$, og følgelig må $\vec{x} \in D$, så D er lukket. Hvis D ikke er begrenset, så finnes følge $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ i D slik at $\|\vec{x_k}\| \geq k$. Denne følgen kan ikke ha en konvergent delfølge, så vi får en motsigelse, og følgelig er det galt at D er ubegrenset. □

4. Kontinuerlige funksjoner.

Definition 4.1. La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$. Symbolet

$$f\colon D \to \mathbb{R}^m$$

forteller at f er en funksjon definert på en delmengde D i $\mathbb{R}^n$ og med verdier i $\mathbb{R}^m$. Mengden D kalles **definisjonsområdet** og mengden $\{f(\vec{x})\colon \vec{x} \in D\}$ kalles **verdimengden** til f.

$f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definert ved $f(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$ beskriver en helix (spiral).

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x,y) = (x+2y)^2$ beskriver en flate i $\mathbb{R}^3$. (Merk at her har vi skrevet (x,y) i stedet for $\vec{x}$.)

La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$. Et punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kalles et **opphopningspunkt** for D hvis for alle $r > 0$, det finnes $\vec{y} \in D \cap B(\vec{x}, r)$ slik at $\vec{y} \neq \vec{x}$. Et punkt $\vec{x} \in D$ slik at $D \cap B(\vec{x}, r) \subset \{\vec{x}\}$ for en $r > 0$, kalles et **isolert** punkt.

Hvis $\vec{x}$ er et opphopningspunkt for D, så finnes $\vec{x_k} \in D \cap B(\vec{x}, 1/k)$ med $\vec{x_k} \neq \vec{x}$ for alle $k \in \mathbb{Z}^+$. Da blir $(\vec{x_k})$ en følge i D som konvergerer mot $\vec{x}$.

Definition 4.2. La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Anta $\vec{x_0}$ er et opphopningspunkt for D. Vi sier at $f(\vec{x})$ **konvergerer** mot $\vec{a}$, og skriver $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = \vec{a}$ hvis

det for alle $\epsilon > 0$, finnes $\delta > 0$ slik at

$$\vec{x} \in D \text{ og } 0 < \|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{a}\| < \epsilon.$$

Definition 4.3. La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Anta $\vec{x_0} \in D$ er et opphopningspunkt for D. Vi sier at f er **kontinuerlig** i $\vec{x_0}$ hvis $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_0})$. (Funksjoner anses for alltid å være kontinuerlige i isolerte punkt.)
Vi sier at f er **kontinuerlig på** D hvis f er kontinuerlig i alle punkt i D.

Vi kan formulere kontinuitet slik: f er kontinuerlig i $\vec{x_0} \in D$ hvis for alle $\epsilon > 0$, det finnes $\delta > 0$ slik at

$$\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta \text{ og } \vec{x} \in D \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})\| < \epsilon.$$

De vanlige grensesetningene (se Theorem 3.7) gjelder.

Proposition 4.1. *Anta $D \subset \mathbb{R}^n$ og anta gitt $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$. La $\vec{x_0}$ være et opphopningpunkt for D. Anta $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x})$ og $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} g(\vec{x})$ eksisterer. Da gjelder:*

(a) *Grensene er entydige.*
(b) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}}(f+g)(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} g(\vec{x})$.
(c) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} cf(\vec{x}) = c\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x})$ *når* $c \in \mathbb{R}$.
(d) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x})$ *(skalarprodukt).*

Bevis. Beviset er som beviset for Theorem 3.7. $\square$

Analogt til Theorem 4.3 har vi følgende setning.

Proposition 4.2. *Anta $D \subset \mathbb{R}^n$ og anta gitt $f, g\colon D \to \mathbb{R}^m$. La $\vec{x_0} \in D$ være et opphopningpunkt for D. Anta f og g er kontinuerlige i $\vec{x_0}$. Da er $f+g$, cf og $f \cdot g$ alle kontinuerlige i $\vec{x_0}$.*

Bevis. Beviset er som beviset for Theorem 4.3. $\square$

Identitets funksjonen $f(\vec{x}) = \vec{x}$ er kontinuerlig over alt. (Vi kan bruke $\delta = \epsilon$.) Konstante funksjoner er kontinuerlige. Spesielt er $g(\vec{x}) = (1, 0, \dots, 0)$ kontinuerlig. Ved setningen over, får vi at $(f \cdot g)(\vec{x}) = x_1$ er kontinuerlig. Likedan vises at de andre koordinatfunksjonene $h(\vec{x}) = x_2$ osv. er kontinuerlige. Når $n = 2$ betyr dette at $f_1(x,y) = x$ og $f_2(x,y) = y$ er kontinuerlig på enhver delmengde $D \subset \mathbb{R}^2$. Analogt, i $\mathbb{R}^3$ blir $f_1(x,y,z) = x$, $f_2(x,y,z) = y$ og $f_3(x,y,z) = z$ kontinuerlige på enhver delmengde.

Ved å ta summer og produkt av disse koordinatfunksjonene, får vi at ethvert polynom i flere variable er kontinuerlige, f.eks. er $f(x,y) = (x+2y)^2$ kontinuerlig. Siden $h(t) = 1/t$

er kontinuerlig når $t \neq 0$, gir neste setning at alle rasjonale funksjoner er kontinuerlige når nevneren er $\neq 0$.

Proposition 4.3. *La $D \subset \mathbb{R}^n$ og la $E \subset \mathbb{R}^m$. Anta $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig i $\vec{x_0}$, anta $f(D) \subset E$ og anta $g\colon E \to \mathbb{R}^k$ er kontinuerlig i $f(\vec{x_0})$. Da er $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}^k$ kontinuerlig i $\vec{x_0}$.*

Bevis. La $\epsilon > 0$. Det finnes $\eta > 0$ slik at

$$\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \eta \text{ og } \vec{x} \in E \Rightarrow \|g(\vec{x}) - g(\vec{x_0})\| < \epsilon.$$

Og, det finnes $\delta > 0$ slik at

$$\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta \text{ og } \vec{x} \in D \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})\| < \eta.$$

Når $\|\vec{x}-\vec{x_0}\| < \delta$, får vi $\|f(\vec{x})-f(\vec{x_0})\| < \eta$, og videre får vi $\|(g\circ f)(\vec{x})-(g\circ f)(\vec{x_0})\| < \epsilon$. □

Example. $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ er en rasjonal funksjon der nevneren er $\neq 0$ for $(x,y) \neq (0,0)$, så funksjonen er kontinuerlig utenfor origo.

Siden $|2xy| \leq x^2 + y^2$, så får vi at $|f(x,y)| \leq 1/2$ over alt. For hver a =konstant, får vi $\lim_{x\to 0} f(x,ax) = \frac{a}{1+a^2}$ (grensen eksisterer når vi går mot origo langs rette linjer). Herav følger at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ikke eksisterer siden vi får ulike grenser avhengig av hvordan vi går mot origo (ikke entydig grense).

Hvis vi bruker polar-koordinater, $x(r,t) = r\cos(t)$ og $y(r,t) = r\sin(t)$, så kan vi skrive $f(x,y) = f(r,t) = \sin(t)\cos(t) = (1/2)\sin(2t)$. Herav følger at f ikke kan være kontinuerlig i origo. Når vi bruker polarkoordinater, får vi $\|(x,y)\| = r$. I dette eksemplet ser vi at funksjonsverdiene varierer fra $-1/2$ til $1/2$ i enhver omegn om origo.

Example. La $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ for $(x,y) \neq (0,0)$ og la $g(0,0) = 0$. Da er $|g(x,y)| \leq 1/2$ slik at også g er begrenset. Vi har $\lim_{x\to 0} g(x,0) = 0$ og $\lim_{x\to 0} g(x,x^2) = 1/2$. Dette medfører at g ikke har grense i origo (ikke entydig grense).

En typisk funksjon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en funksjon av n variable (fra $\mathbb{R}^n$) og verdiene er vektorer i $\mathbb{R}^m$. La $\vec{e_i} = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (- en 1-er i koordinat i og ellers bare 0-er). Funksjonen $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definert ved $g_i(\vec{x}) = \vec{e_i}$ er konstant og dermed kontinuerlig. Funksjonene som er laget ved å ta skalarproduktet av f og g_i-ene, kalles koordinatfunksjonene. F.eks. $f(x,y,z) = (x + y^2, \sin(z + xy))$ har koordinatfunksjoner $f_1(x,y,z) = x+y^2$ og $f_2(x,y,z) = \sin(z+xy)$. Når vi nå har begrepet koordinatfunksjoner på plass, kan vi vise neste setning. Merk at hvis $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$, så er $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved $g(\vec{x}) = f(\vec{x})\vec{a}$ kontinuerlig. (Vi har $\|g(\vec{x})-g(\vec{y})\| = \|\vec{a}\||f(\vec{x})-f(\vec{y})|$.)

Proposition 4.4. *La $D \subset \mathbb{R}^n$ og anta gitt $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Da er f kontinuerlig hvis og bare hvis alle m koordinatfunksjonene er kontinuerlige.*

Bevis. Anta f er kontinuerlig. Da de konstante funksjonene $g_i(\vec{x}) = \vec{e_i}$ er kontinuerlige, blir skalarproduktene som er det samme som koordinatfunksjonene $f_i(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot g_i(\vec{x})$ kontinuerlige.

Hvis alle koordinatfunksjonene er kontinuerlige, så blir f kontinuerlig siden vi kan skrive f som en sum av koordinatfunksjonene multiplisert med (konstante) vektorer

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\vec{x})\vec{e_i}.$$

□

Oppgave 5.
Gitt funksjon $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ der $D \subset \mathbb{R}^n$. Vis at f er kontinuerlig på D hvis og bare hvis for alle konvergente følger $(\vec{x_k})_{k=1}^{\infty}$ i D som konvergerer mot et punkt i D, så gjelder $\lim_{k\to\infty} f(\vec{x_k}) = f(\lim_{k\to\infty} \vec{x_k})$.

5. Kontinuerlige funksjoners egenskaper.

Proposition 5.1. *La $D \subset \mathbb{R}^n$ være kompakt, og anta $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig. Da er $f(D)$ kompakt.*

Bevis. Enhver følge i $f(D)$ er på formen $(f(\vec{x_k}))_{k=1}^{\infty}$ der $\vec{x_k} \in D$. Da D er kompakt, finnes delfølge $(\vec{x_{k_m}})_{m=1}^{\infty}$ som konvergerer mot en $\vec{x_0} \in D$. Da f er kontinuerlig, får vi at delfølgen $f(\vec{x_{k_m}})$ konvergerer mot $f(\vec{x_0}) \in f(D)$. □

Corollary 5.2. *La $D \subset \mathbb{R}^n$ være kompakt, og anta $f\colon D \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da oppnår f både maksimums- og minimumsverdiene på D.*

Bevis. La $M = \sup\{f(\vec{z})\colon \vec{z} \in D\}$. ($f(D)$ er kompakt delmengde av $\mathbb{R}$ og er dermed begrenset, så M eksisterer i $\mathbb{R}$.) For hver $k \in \mathbb{Z}^+$, velg $\vec{x_k} \in D$ slik at $f(\vec{x_k}) > M - 1/k$. Da D er kompakt, finnes $\vec{x_0} \in D$ og delfølge $(\vec{x_{k_m}})_{m=1}^{\infty}$ som konvergerer mot $\vec{x_0} \in D$. Siden f er kontinuerlig, får vi $M = \lim_{m\to\infty} f(\vec{x_{k_m}}) = f(\vec{x_0})$.
At f oppnår sitt minimum på D vises analogt. □

I en praktisk situasjon der vi skal prøve å finne maksimums- og minimumspunkt og de tilsvarende funksjonsverdiene, går vi fram som i det en-variable tilfellet. Endepunktene til intervall er nå erstattet av randpunktene til D. De indre punktene til intervall erstattes av de indre punktene til D. I de indre punktene, leter vi etter punkter der de partielle deriverte ikke eksisterer, og de punktene der alle de partielle deriverte er lik 0.

Noen mengder har en samling randpunkter som er meget komplisert. Men ofte vil vi kunne beskrive randa til D ved en funksjon som har en variabel mindre. F.eks. hvis D er enhetsdisken, så er randa en sirkel som kan beskrives ved en parameterfunksjon $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.

I mange tilfeller er områder D i $\mathbb{R}^n$ definert ved en eller flere ulikheter av typen $D = \{\vec{x}\colon f(\vec{x}) \le c\}$ der c er et reelt tall og $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er en funksjon. Hvis vi vet at f er kontinuerlig, så blir D lukket. Dette følger av neste setning. (Det finnes en generalisering av neste setning til funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ som sier at f er kontinuerlig hvis og bare hvis (inverse bilder) f^{-1}(åpne mengder) er en åpne mengder.) Ofte kan vi fra en slik definisjon av en mengde, si at randa til D er lik $\{\vec{x}\colon f(\vec{x}) = c\}$, og det indre av D er lik $\{\vec{x}\colon f(\vec{x}) < c\}$.

Proposition 5.3. *La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}$. Følgende utsagn er ekvivalente:*
(a) *f er kontinuerlig.*
(b) *$f^{-1}((a,b)) = \{\vec{x} \in D\colon a < f(\vec{x}) < b\}$ er åpen delmengde av D for alle $a, b \in \mathbb{R}$.*
(c) *$f^{-1}([a,b]) = \{\vec{x} \in D\colon a \le f(\vec{x}) \le b\}$ er lukket delmengde av D for alle $a, b \in \mathbb{R}$.*

Bevis. (a) ⇒ (b). La $\vec{x_0} \in \{\vec{x} \in D\colon a < f(\vec{x}) < b\}$. La $\epsilon = \min(b - f(\vec{x_0}), f(\vec{x_0}) - a)$. La $\delta > 0$ slik at $\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \delta$ og $\vec{x} \in D$ medfører at $\|f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})\| < \epsilon$. Da får vi at $B(\vec{x_0}, \delta) \subset \{\vec{x} \in D\colon a < f(\vec{x}) < b\}$ slik at mengden blir åpen.
(b) ⇒ (a). For en $\vec{x_0} \in D$ og en $\epsilon > 0$, la $b = f(\vec{x_0}) + \epsilon$ og $a = f(\vec{x_0}) - \epsilon$. Siden $\vec{x_0} \in \{\vec{x} \in D\colon a < f(\vec{x}) < b\}$ og denne mengden er åpen, vil den inneholde en δ-omegn om $\vec{x_0}$.
(b) ⇔ (c). Vi bruker at $\vec{x} \notin \{\vec{x} \in D\colon a \le f(\vec{x}) \le b\}$ hvis og bare hvis $\vec{x} \in \{\vec{x} \in D\colon f(\vec{x}) < a\}$ eller $\vec{x} \in \{\vec{x} \in D\colon f(\vec{x}) > b\}$.

□

I § 4.4 ble det vist at funksjoner som er kontinuerlige på et lukket og begrenset intervall er uniformt kontinuerlig. Vi har et tilsvarende resultat for funksjoner av flere variable.

Definition 5.1. La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Vi sier at f er **uniformt kontinuerlig** på D hvis for alle $\epsilon > 0$ det finnes $\delta > 0$ slik at $\vec{x}, \vec{y} \in D$ og $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| < \epsilon$.

Funksjonen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definert ved $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ er uniformt kontinuerlig. Vis dette! (Hvorfor er det nok å vise at $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \epsilon \Rightarrow |\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| < \epsilon$?)

Proposition 5.4. *Hvis $D \subset \mathbb{R}^n$ er kompakt og $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig, så er f uniformt kontinuerlig.*

Bevis. Les beviset for Theorem 4.13 og oversett argumentasjonen til denne nye situasjonen. □

Definition 5.2. La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Anta $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ er en følge funksjoner som alle er definert på D og som tar verdier i $\mathbb{R}^m$.
Vi sier at $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ **konvergerer punktvis** mot f på D hvis $f(\vec{x}) = \lim_{k\to\infty} f_k(\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in D$.
Vi sier at $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ **konvergerer uniformt** mot f på D hvis for alle $\epsilon > 0$ det finnes N slik at for alle $n \geq N$ og for alle $\vec{x} \in D$ så er $\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\| < \epsilon$.

Vi har et resultat analogt til Theorem 8.3.

Proposition 5.5. *La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Anta $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ er en følge funksjoner som alle er definert på D og som tar verdier i $\mathbb{R}^m$. La $M_k = \sup\{\|f(\vec{x}) - f_k(\vec{x})\|\colon \vec{x} \in D\}$. Da vil (f_k) konvergere uniformt mot f på D hvis og bare hvis (M_k) konvergerer mot 0.*

Bevis. Som beviset for Theorem 8.3, følger resultatet rett fram fra definisjonen. □

For tallfølger har vi vist at de konvergerer hvis og bare hvis de er Cauchy. Hvis det er vanskelig å finne grensen, så kan det være enklere å vise Cauchy egenskapen enn å vise konvergens direkte. Tilsvarende har vi for følger av funksjoner, noen ganger er det brysomt å finne grensen (punktvis), og det kan være enklere å vise en "uniform" Cauchy egenskap. Vi kan vise at (f_k) konvergerer uniformt mot en funksjon hvis og bare hvis følgende Cauchy egenskap er oppfylt:

> For alle $\epsilon > 0$ finnes det en N slik at for alle $k, m \geq N$ så er $d_D(f_k, f_m) < \epsilon$ der $d_D(f_k, f_m) = \sup_{\vec{x}\in D} \|f_k(\vec{x}) - f_m(\vec{x})\|$.

Proposition 5.6. *La D være en delmengde av $\mathbb{R}^n$ og la $f\colon D \to \mathbb{R}^m$. Anta $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ er en følge funksjoner som alle er definert på D og som tar verdier i $\mathbb{R}^m$. Hvis $f_k \to f$ uniformt på D og alle f_k er kontinuerlige, så er f kontinuerlig.*

Bevis. Beviset er likt beviset for Theorem 8.4. Forandringene som må gjøres er stort sett å erstatte $|\cdot|$ med $\|\cdot\|$. □

Oppgave 6.
Definer to mengder $D = \{(x, y)\colon x^2 < y \text{ og } x^2 + y^2 < 1\}$ og $M = \{(x, y)\colon x^2 \leq y \text{ og } x^2 + y^2 \leq 1\}$. Begrunn at D er åpen og at M er kompakt.

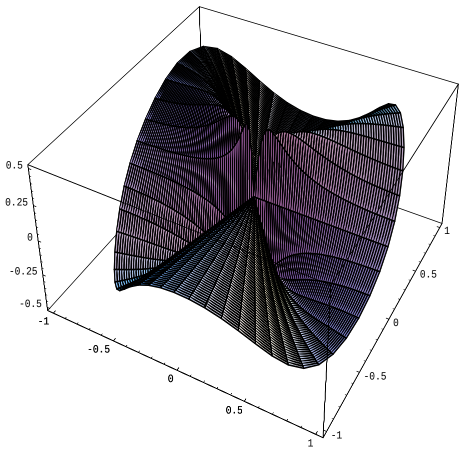
La D være en åpen delmengde i $\mathbb{R}^n$, la $\vec{x} \in D$ og la $f: D \to \mathbb{R}$ være en gitt funksjon. Vi sier at f er Gâteaux-deriverbar i $\vec{x}$ hvis det finnes en vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{y}) - f(\vec{x})}{t} = \vec{a} \cdot \vec{y} \quad \text{for alle} \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Vektoren $\vec{a}$ avhenger av f og $\vec{x}$, men er uavhengig av $\vec{y}$. Den kalles den **Gâteaux-deriverte** eller **gradienten** til f i $\vec{x}$ og betegnes $f'(\vec{x})$ eller $\nabla f(\vec{x})$. At vektoren $\vec{a}$ består av de partielle deriverte til f kan ses ved å velge $\vec{y} = \vec{e_i}$, den i-te basis vektoren, for $i = 1, 2, \ldots, n$. Når $\|\vec{y}\| = 1$, så kalles $\vec{a} \cdot \vec{y}$ for den retningsderiverte av f i $\vec{x}$ i retningen $\vec{y}$.

Når $n = 2$, så skriver vi oftest $\nabla f(x, y) = (\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \frac{\partial}{\partial y} f(x, y))$ i stedet for $\vec{a}$.

Example. La $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ når $(x, y) \neq (0, 0)$ og $f(0, 0) = 0$. For $(x, y) \neq (0, 0)$ får vi $\nabla f(x, y) = (\frac{2xy(y^2 - x^4)}{(x^4 + y^2)^2}, \frac{x^2(x^4 - y^2)}{(x^4 + y^2)^2})$. I origo får vi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Vi får dermed at f er Gâteaux-deriverbar over alt. Ser vi på grensene i origo, finner vi at f ikke er kontinuerlig der, selv om den er Gâteaux-deriverbar der. $\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = 1/2$ og $\lim_{x \to 0} f(x, ax) = 0$ for alle a. Grensen er ikke entydig.



Det finnes en annen definisjon av derivasjon. Hvis $f(\vec{x})$ er Gâteaux-deriverbar i $\vec{x}$ og i tillegg

$$\lim_{\|\vec{y}\| \to 0} \frac{f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|} = 0,$$

så sier vi at f er **Fréchet-deriverbar** i $\vec{x}$. Vi kan omformulere Fréchet-deriverbarhet slik: f er Fréchet-deriverbar i $\vec{x}$ hvis og bare hvis for alle $\epsilon > 0$ det finnes $\delta > 0$ slik at

$$0 < \|\vec{y}\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{y}| < \epsilon \|\vec{y}\|.$$

Det er lett å vise at hvis f er Fréchet-deriverbar i et punkt, så er f kontinuerlig i punktet. (Dette følger av $|f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x})| < (\epsilon + \|\nabla f(\vec{x})\|)\|\vec{y}\|$.)

Oppgave 7.
La M være som i Oppgave 6. Finn maksimum og minimum av $f(x, y) = (x + y)^2 + (x + 2)^2$ over M.

Åsvald Lima