Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag

EKSAMEN

Emnekode:	**MA 2410**
Emnenavn:	**Reell analyse**
Dato:	10. august 1999
Varighet:	09.00 - 14.00
Antall sider inklusivt forside:	3
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Merknader:	MA 2410 er det samme som tidligere MA 130. Nynorskteksten er identisk med originalteksten med hensyn til setningsbygning og ordvalg med disse unntakene: begrunn = grunngi beregn = rekn ut

---

OPPGAVE 1.

Gitt en følge polynomer $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ ved $p_n(x) = 1 + (1+x)^{2n} - 2nx(1+x)^{2n-1}$.

(a) Vis at $p_n(x)$ har nøyaktig ett nullpunkt x_n i intervallet $\langle 0, \infty \rangle$.

(b) Vis at $p_{n+1}(x) \leq p_n(x)$ for alle n og alle $x > 0$.

Begrunn at $0 < \ldots < x_{n+1} < x_n < \ldots < x_1 = \sqrt{2}$.

OPPGAVE 2.

Definer en følge funksjoner $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ på $\mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + (1+x)^{2n}}.$$

Definer

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -2 \\ -1 & \text{for } x = -2 \\ x & \text{for } -2 < x < 0 \\ 0 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Vis at (f_n) konvergerer punktvis mot f.

(b) Begrunn at (f_n) ikke konvergerer uniformt mot f på $\langle -2, 0\rangle$.

(c) La $a > 0$. Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergerer uniformt på $[a, \infty\rangle$.

(Du kan bruke at $f_n(x) \leq \frac{x}{(1+x)^{2n}}$ når $x \geq 0$.)

(d) Vis at $\sup_{x\geq 0} f_n(x) = \frac{1}{2n(1+x_n)^{2n-1}}$ der x_n er nullpunktet til $p_n(x)$ i Oppgave 1 (a).

Begrunn at $f_n \to 0$ uniformt på $[0, \infty\rangle$.

(e) Vis at $\frac{1}{2n-1} < x_n < \frac{2}{2n-1}$. (Du kan sette inn i $p_n(x)$.)

Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n)$ konvergerer eller divergerer.

OPPGAVE 3.

La $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Begrunn at f er uniformt kontinuerlig på $[0, 1]$.

Vis at f er uniformt kontinuerlig på $[1, \infty\rangle$.

(b) Begrunn at f er uniformt kontinuerlig på $[0, \infty\rangle$.

OPPGAVE 4.

La $g(x)$ være en begrenset funksjon definert på intervallet $[-1, 1]$. Definer en funksjon $f(x)$ på $[-1, 1]$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \sup\{g(t) : -1 \leq t \leq x\} & \text{for } x \leq 0 \\ \sup\{g(t) : x \leq t \leq 1\} & \text{for } x > 0 \end{cases}.$$

(a) Begrunn at $f(x)$ er voksende på $[-1, 0]$ og avtagende på $\langle 0, 1]$.

(b) Begrunn at $f(x)$ er integrerbar på $[-1, 1]$.

(c) Gi et eksempel slik at $g(x)$ er kontinuerlig i 0, mens $f(x)$ er diskontinuerlig i 0.

OPPGAVE 5.

Beregn

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

og

$$\frac{d}{dt}\int_0^{2t} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Åsvald Lima Erik Bedos