Høgskolen i Agder
Avdeling for realfag

EKSAMEN

Emnekode:	**MA 130**
Emnenavn:	**Reell analyse**
Dato:	6. mai 1999
Varighet:	09.00 - 14.00
Antall sider inklusivt forside:	3
Tillatte hjelpemidler:	Alle
Merknader:	Nynorskteksten er identisk med originalteksten med hensyn til setningsbygning og ordvalg med disse unntakene: begrunn = grunngi beregn = rekn ut

---

OPPGAVE 1.

La $a > 1$. Definer en reell potensrekke $(*)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}$.

(a) Begrunn at rekka $(*)$ har konvergensradius a og sum $\frac{a}{a-x}$.

(b) Begrunn at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{a^n} = \frac{ax}{(a-x)^2}$ for $-a < x < a$.

Finn en formel for $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}$.

OPPGAVE 2.

Definer en følge funksjoner $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ved

$$f_n(x) = \frac{1-x}{1+x^n} \quad \text{for} \quad x \geq 0.$$

Definer

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

(a) Vis at $f_n(x) \to f(x)$ punktvis på $[0, \infty >$.

(b) Vis at $f_n \to f$ uniformt på $[0,1]$.

(c) Vis at

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)$$

der

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ -1/2 & \text{for } x = 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

Begrunn at $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ ikke konvergerer uniformt mot g på $[0,2]$.

(d) La $p_n(x) = (n-1)x^n - nx^{n-1} - 1$ for $n = 2, 3, \ldots$. Begrunn at $p_n(x)$ har nøyaktig ett nullpunkt $x_n \in < 1, \infty >$. Beregn x_2.

(e) Vis at $1 < x_{n+1} < x_n$ for alle $n \geq 2$.

(Du kan f.eks. bruke at fra $p_n(x_n) = 0$ følger at $1 = (n-1)x_n^n - nx_n^{n-1}$ og vise at $p_{n+1}(x_n) = nx_n^{n-1}(x_n - 1)^2 > 0$.)

(f) Vis at $\frac{1-x}{1+x^n} = \frac{-1}{nx^{n-1}} \Leftrightarrow p_n(x) = 0$ når $n \geq 2$. Begrunn at $d_I(f_n, 0) \leq \frac{1}{nx_n^{n-1}}$, og at $f_n \to 0$ uniformt på $I = [1, \infty >$.

OPPGAVE 3.

La $D \subset \mathbb{R}^2$ og la $f : D \to \mathbb{R}^2$. Sett $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.

(a) Begrunn at f er kontinuerlig på D hvis og bare hvis f_1 og f_2 begge er kontinuerlige på D.

(b) La $K \subset \mathbb{R}$ være kompakt. Begrunn at $\sup_{x\in K}\{x\} \in K$.

OPPGAVE 4.

(a) Vis at $\lim_{n\to\infty}(\int_0^1 x^n \, dx)^{1/n} = 1$.

La $I = [a,b]$ være et lukket og begrenset intervall. La $f : I \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon slik at $f(x) \geq 0$ for alle $x \in I$ og $\sup\{f(x) : x \in I\} = m$.

La $\epsilon > 0$.

(b) Begrunn at det finnes en $\delta > 0$ og en $x_0 \in I$ slik at $f(x) > m - \epsilon$ når $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Definer en følge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ved

$$a_n = (\int_a^b f^n(x)\,dx)^{1/n}.$$

(c) Begrunn at $a_n > \sqrt[n]{\delta}(m - \epsilon)$ for alle n.

(d) Begrunn at $\lim_{n\to\infty} a_n = m$.

Åsvald Lima Erik Bedos