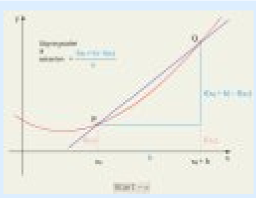
	Gitt graf. Start/stopp. Fra sekant til tangent. Veien til formelen for den deriverte til funksjon *f* i et punkt	Animasjonens hjem: http://home.hia.no/~cornelib/animasjon/matematikk/mathe-online-at/ablgrenz/

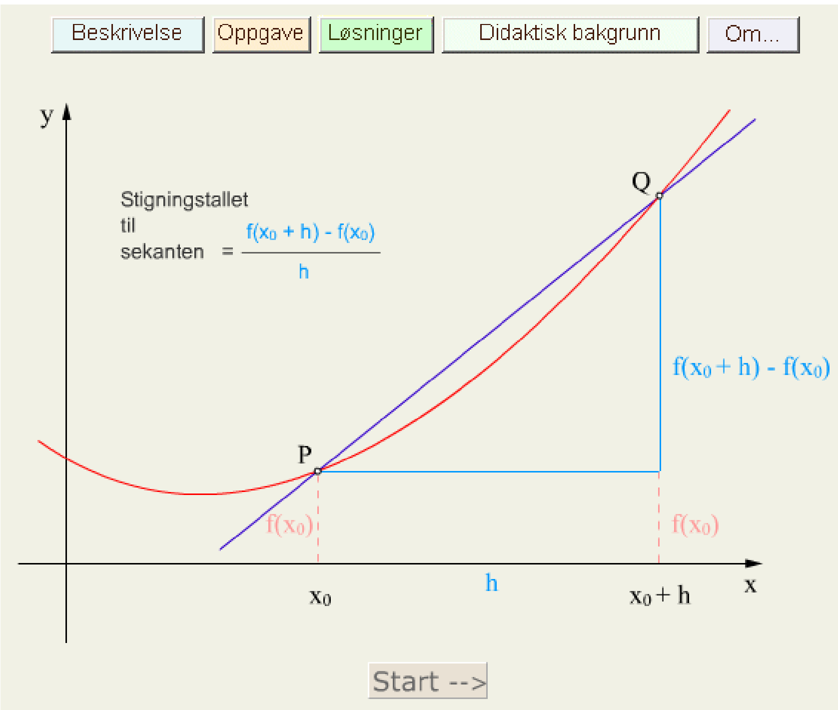
Derivasjonen som grenseverdi

Om originalen

Læringsstøtten "Die Ableitung als Grenzwert" på http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/ablgrenz/ ble utviklet av Franz Embacher og Petra Oberhuemer ved Universitetet i Wien, oktober 2001, med støtte fra http://www.mathe-online.at/:

- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur
- Magistrat der Stadt Wien, MA 13
- Verband Wiener Volksbildung
- Oesterreichische Nationalbank

Siden er oversatt til norsk oktober 2004 av Heidi Mæsel Oftedahl, Kvadraturen Skolesenter, og Cornelia Brodahl, Høgskolen i Agder, med vennlig tillatelse av forfatterne. Den norske siden ligger på Galleri DigiVitalis under Høgskolen i Agder, Fakultet for Realfag.



Teksten som ligger under menypunktene Beskrivelse, Oppgave, Løsninger, Didaktisk bakgrunn, Om… finner du på de følgende sidene.

Beskrivelse

Den røde kurven viser grafen til en funksjon. Animasjonen illustrerer overgangen fra sekant $\rightarrow$ tangent og anskueliggjør hvordan en kommer fram til formelen

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

for den deriverte til en funksjon f i et punkt x_0.

Mer om den matematiske bakgrunnen:

Den deriverte til en funksjon f viser seg som **stigningstallet til tangenten på funksjonens graf**. For å gi forestillingen "Tangenten til en kurve" en presis definisjon, og også for faktisk å kunne beregne stigningstallet til en tangent, skal vi i fortsettelsen betrakte en "**sekant**" slik: Dersom x_0 er punktet, der den deriverte skal beregnes, så har det tilhørende punktet P på grafen koordinatene (x_0, $f(x_0)$). Vi søker altså stigningstallet til tangenten i punktet P på grafen.

Til dette betrakter vi i tillegg et annet punkt Q i avstand h fra x med koordinatene ($x_0 + h$, $f(x_0 + h)$). Den rette linjen gjennom P og Q skjærer kurven (i minst) to punkter - en slik rett linje kaller vi en "sekant". Stigningstallet er gitt ved kvotienten

- av differansen mellom y -verdiene (det vil si differansen mellom funksjonsverdiene): $f(x_0 + h) - f(x_0)$
- og differansen mellom x-verdiene, dvs. h, altså

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

Her kan h være både positiv eller negativ (i det første tilfelle ligger Q "til høyre" for P, i det andre tilfelle "til venstre" for P).

Når h nærmer seg 0, så rykker Q stadig nærmere P. Sekanten nærmer seg en tangent, og stigningstallet til sekanten nærmer seg stigningstallet til tangenten i P som er den verdien vi er på jakt etter. Er $h = 0$, så blir Q sammenfallende med P. Vi kan riktignok ikke finne stigningstallet til tangenten ved ganske enkelt å sette $h = 0$ inn i dette uttrykket (det gir det meningsløse uttrykket 0/0), men den blir gitt ved **grenseverdien** for stigningstallet til sekantene når $h \rightarrow 0$. Dette er den formelle definisjonen til den deriverte til en funksjon for en gitt verdi x_0.

Dersom denne grenseverdien eksisterer, sier vi at funksjonen er **deriverbar** i punktet x_0. Dersom den ikke eksisterer (f.eks. når grafen har en knekk og derfor ikke har en tangent), er funksjonen ikke deriverbar for verdien x_0 – da har funksjonen ikke noen derivert i dette punktet.

Animasjonen illustrerer grenseovergangen som inntrer når $h \rightarrow 0$, det vil si at

sekant $\rightarrow$ tangent

for en deriverbar funksjon (der h alltid er positiv, fordi Q hele tiden ligger "til høyre" for P).

Oppgaver

1. Studer animasjonen noen ganger til du har følelsen av at du forstår hva den handler om. Legg merke til at stigningstallet for den viste sekanten, for en hver endelig verdi av h, kan beregnes ved en enkel formel (differansen til y-verdiene dividert med differansen til x-verdiene). Kun når $h = 0$, er denne formelen ikke anvendbar (da måtte en beregne 0/0) og blir da erstattet med en

grenseverdi (Limes, grenseverdi uttrykt ved symbolet lim).

2. Ta for deg funksjonen $f(x) = x^2$ for verdien $x_0 = 1$. Skriv ned uttrykket for stigningstallet for sekanten for endelige verdier av h. Prøv å forenkle det opprinnelige uttrykket! Klarer du å finne grenseverdien når $h \to 0$, og dermed beregne stigningstallet til tangenten?

3. Gjenta trinnene fra forrige oppgave, men denne gangen uten å gi x_0 noen konkret tallverdi. Utled på denne måten en formel for den deriverte til funksjonen $f(x) = x^2$ med en kjent og kjær metode!

4. Dersom du kjenner til hva en **tallfølge** er og hva det betyr at en tallfølge **konvergerer**: Grenseovergangen, når $h \to 0$, uttrykker nettopp at tallfølgen som består av stigningstallene til sekantene

$$s_n = \frac{f(x_o + a_n) - f(x_o)}{a_n}$$

må konvergere for *hver* nullfølge (a_n). Dersom det er tilfelle, lar det seg vise at grenseverdien til tallfølgen (s_n) er den samme for hver nullfølge (a_n). Denne verdien kaller vi den deriverte. Regn ut s_n (det vil si det n -te leddet i tallfølgen av stigningstallene til sekantene) for funksjonen $f(x) = x^2$, i punktet $x_0 = 1$ og nullfølgen $a_n = 1/n$.

5. Gi et eksempel på en funksjon som i et punkt der den er definert, ikke er deriverbar. Det vil si et tilfelle der metoden med grenseverdi ikke fungerer.

6. Stigningstallet til sekanten vil for små verdier av h være en *tilnærmingsverdi* for stigningstallet til tangenten. Regn ut en tilnærmet verdi for den deriverte til funksjonen $f(x) = 1/x$ i punktet $x_0 = 2$.

Løsningsforslag

2. Med $f(x) = x^2$ og $x_0 = 1$ blir

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (1 + h)^2 - 1^2$$

Stigningstallet til sekanten kan derfor uttrykkes ved:

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

Denne formelen gir bare mening for endelige verdier av h (som er ulik null). Innsetning av h =0 vil føre til den ubestemte formen 0/0. Løser vi opp parentesene i telleren, så får vi

$$\frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

Et videre trinn i forenklingen gir

$$\frac{2h + h^2}{h}$$

3. Siden h er forskjellig fra null, kan h forkortes bort, noe som gir det enkle uttrykket

$$2 + h$$

Også dette uttrykket er først og fremst gyldig for $h \neq 0$; men vi ser hva som skjer når h går mot null: uttrykket ”konvergerer" mot 2. Dette er vårt resultat: Stigningstallet til tangenten er lik 2, da blir

$$f'(1) = 2$$

Med $f(x) = x^2$ er det slik at

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2$$

Stigningstallet til sekanten er dermed gitt ved

$$\frac{(x_0 + h)^2 - x_0{}^2}{h}$$

Denne formelen gir bare mening for endelige verdier av h (som er ulik null). Innsetning av h =0 vil føre til den ubestemte formen 0/0. Vi kan derimot forenkle uttrykket: Løser vi opp parentesene i telleren, så får vi

$$\frac{x_0{}^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0{}^2}{h}$$

Et videre trinn i forenklingen fører til

$$\frac{2x_o h + h^2}{h}$$

Siden h er forskjellig fra null, kan h forkortes bort, noe som gir det enkle uttrykket

$$2\,x_0 + h$$

Også dette uttrykket er først og fremst gyldig for $h \neq 0$; vi ser derimot, hva som skjer når h går mot null: uttrykket ”konvergerer" mot $2\,x_0$. Dette er vårt resultat: stigningstallet til tangenten går mot $2\,x_0$, da gjelder

$$f'(x_0) = 2\,x_0$$

Da gjenstår det bare å fjerne indeksen 0 i sluttresultatet, slik at resultatet for den deriverte til funksjonen $f(x) = x^2$ for en ønsket verdi x lyder:

$$f'(x) = 2\,x.$$

4. Vi benytter oss av uttrykket for stigningstallet til sekanten, $2 + h$, som vi kom fram til i oppgave 2, og setter

$$s_n = 2 + 1/n$$

Grenseverdien til denne tallfølgen når $n \to \infty$ er opplagt lik 2.

Et eksempel på en funksjon, som er definert overalt, men som ikke er deriverbar i et bestemt punkt, er absoluttverdifunksjonen

$$f(x) = |x|$$

5. Den er ikke deriverbar for $x_0 = 0$. En kan se dette geometrisk, dersom en studerer grafen: det nederste punktet danner en knekk, dermed kan ikke funksjonen ha noen tangent i dette punktet.

Ved regning kan man argumentere slik:

$$f(0) = 0$$
$$f(0 + h) = |h|$$
$$f(0 + h) - f(0) = |h|$$

derfor er stigningstallet til sekanten gitt ved

$$\frac{|h|}{h}$$

Er $h > 0$, så er stigningen lik 1, er $h < 0$, er den -1. Så når h går mot null "ovenfra" (Q er "til høyre" for P), får vi 1, når h "nedenfra" går mot null (Q er "til venstre" for P), får vi -1. Når h går mot null, ved å pendle mellom en positiv og en negativ verdi (Q er først "til høyre", så brått "til venstre" for P), ender vi ikke opp med noen grenseverdi. Med andre ord:

grenseovergangen $h \to 0$ fører ikke til et entydig resultat – matematisk uttrykt "grensen eksisterer ikke".

Merknad: Begge resultatene 1 og -1, som oppnås for henholdsvis $h > 0$ og $h < 0$, svarer henholdsvis til den rette linjen $y = x$ og den rette linjen $y = -x$, som er det nærmeste en kan komme "tangenter" (selv om de strengt sett ikke er det), og kalles "høyre" og "venstre" deriverte.

6. Vi velger en liten verdi for h, eksempelvis $h = 0{,}01$, og får dette resultatet:

$$f(2) = ½ = 0{,}5$$

$$f(2 + 0{,}01) = \frac{1}{2 + 0{,}001} \approx 0{,}49751$$

$$f(2 + 0{,}01) - f(2) \approx 0{,}49751 - 0{,}5 \approx -0{,}00249$$

Stigningstallet er dermed omtrent gitt ved

$$\frac{-0{,}00249}{0{,}01} = -0{,}249$$

(Den nøyaktige verdien er -0,25, altså -1/4. Tror du at du kan finne den eksakte formelen for den derivert til funksjonen $f(x) = 1/x$ ved samme prosedyren som i oppgave 2 og 3?)

Didaktisk bakgrunn

Animasjonen illustrerer hvorfor man må undersøke en grenseverdi når man skal beregne den deriverte til en funksjon f i punktet (x,f(x)). Det bør være kjent på forhånd at den deriverte defineres som stigningstallet til tangenten. Videre er det ønskelig at begrepet grenseverdi - i alle fall overfladisk - er kjent.

Da står det bare igjen å gjøre begrepet ”tangenten til funksjonsgrafen” så klart at den vanlige fremgangsmåten som brukes for å beregne stigningstallet kan forstås slik at elevene/studentene kan gjennomføre beregningen i enkelte tilfeller.

Ved å koble aktuelle formler - til å begynne med formelen ”stigningstall for sekant” og senere formelen ”stigningstall for tangent” - til animasjonen, knyttes geometrisk intuisjon til regneteknisk fremstilling.

Egenskapene til grenseovergangen $h \to 0$ blir forholdsvis lemfeldig behandlet og blir i oppgave 4 bare knyttet til begrepene tallfølge og tallfølgens konvergens.