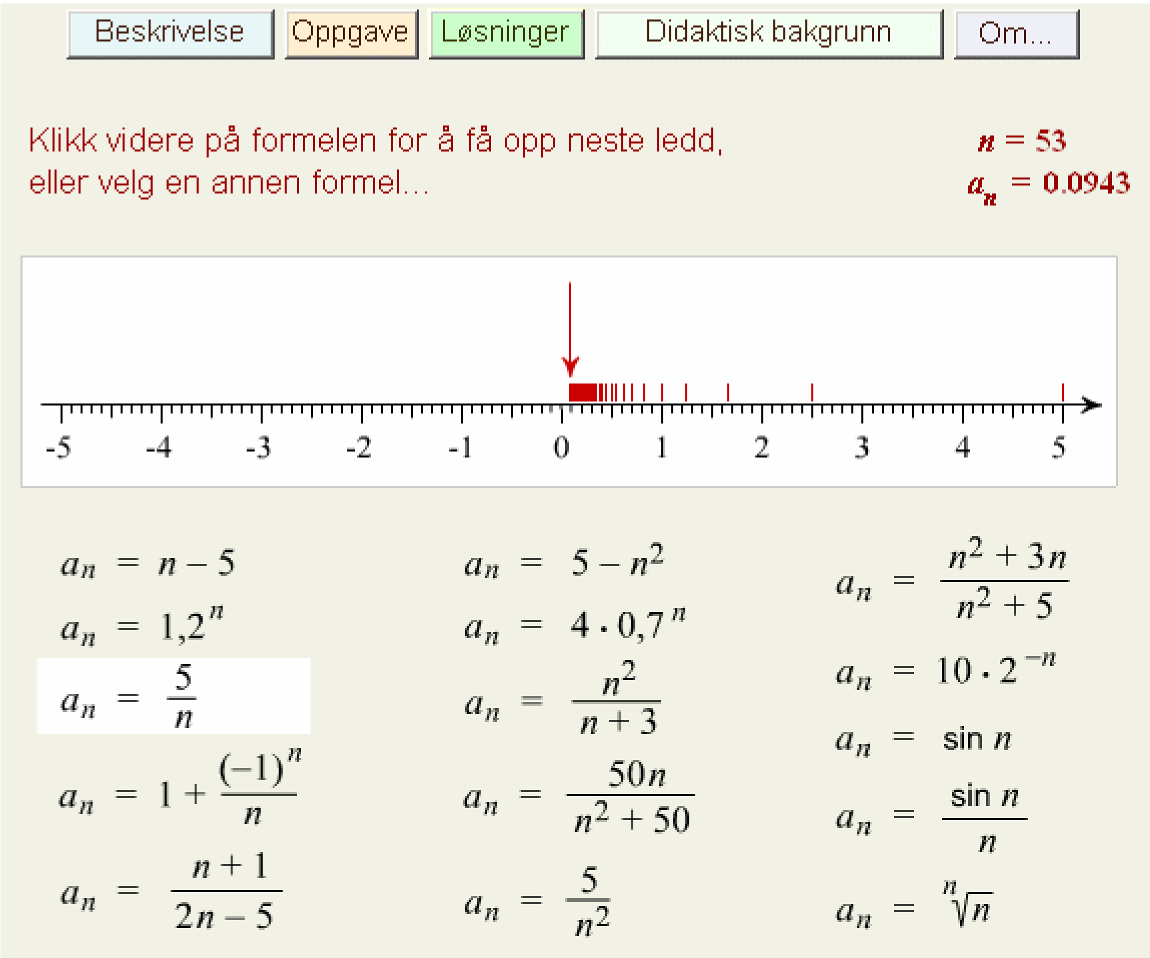
Tallfølger og tallinjen

Om originalen

„Folgen und Zahlengerade“ på http://www.mathe-online.at/galerie/grenz/folgenz/:

Denne læringsstøtten ble utviklet av Franz Embacher, ved Fakultetet for naturvitenskap og matematikk og Instituttet for teoretisk fysikk ved Universitetet i Wien, og Petra Oberhuemer i forbindelse med prosjektet "Nye medier i matematikk-utdanningen" med støtte fra departementet i Østerrike for utdanning, vitenskap og kultur. Universitetet i Wien, juni 2004.

Siden er oversatt av Heidi Mæsel Oftedahl, Kvadraturen Skolesenter, og Cornelia Brodahl, Høgskolen i Agder, høsten 2004 med vennlig tillatelse av forfatterne. Den norske siden ligger på Galleri DigiVitalis under Høgskolen i Agder, Fakultet for Realfag



Beskrivelse

Denne animasjonen viser for noen utvalgte tallfølger (gitt ved enkle formler for det n-te ledd)

- posisjonen på tallinjen til det første leddet i tallfølgen og
- dens numeriske verdi

Klikk på en av de angitte formlene, så markeres det første leddet, og ved hvert nytt klikk på den samme formelen blir de påfølgende ledd markert på tallinja. For å bytte til en annen tallfølge, klikker du bare på den formelen som beskriver denne følgen. Dersom du kun ønsker å fjerne de markerte ledd på tallinjen, kan du gjøre dette ved å klikke rett på tallinjen.

Når den numeriske verdien vises som "0,00...", betyr dette et tall som har en verdi som er mindre enn 0,000005.

Oppgaver

1. Lek litt med animasjonen til du er fortrolig med hvordan den virker. For hvert nytt ledd skal du prøve å legge merke til (også ved å løse de følgende oppgavene) såvel posisjonen på tallinjen som den numeriske verdien. Start med å studere tallfølgen gitt ved $a_n = n - 5$. Du bør underveis kontrollere den markerte verdi ved å *regne selv*! Prøv å finn de tre første ledd til tallfølgen gitt $a_n = 5 - n^2$ og deres posisjon på tallinjen før du klikker!

   Dersom du ikke er fortrolig med funksjonen "sin" (Sinus), kan du bare hoppe over de oppgavene som inneholder disse to tallfølgene!

2. Hvilke av de angitte formlene beskriver **aritmetiske** tallfølger, og hvilke beskriver **geometriske** tallfølger?

3. Hva er størst: 10. rota av 10 eller 20. rota av 20? Bruk den siste av de angitte formlene for å besvare spørsmålet! Hvor stor blir omtrent en ”million-te” rota av en million?

4. Når det finnes et tall som er slik at dette tallet er større (mindre) enn alle ledd i tallfølga, sier vi at den har en øvre (nedre) grense. Hvilke av de angitte tallfølgene mener du har en slik øvre (nedre) grense? (Tilleggsoppgave: Prøv å bevise dine antagelser ved hjelp av en analyse av formelen for det n-te ledd!)

5. Hvis hvert (fra og med andre) ledd er større eller lik (mindre eller lik) det foregående sier vi at tallfølgen er **monoton voksende (avtagende)**. Studer de første 30 leddene for de angitte tallfølgene! Ut i fra hvordan verdiene oppfører seg, hvilke tallfølger ville du karakterisere som monoton voksende og hvilke ville du karakterisere som monoton avtagende? Legg merke til at de første leddene i tallfølgen ikke nødvendigvis oppfører seg slik som resten av tallfølgen. For hvilke av tallfølgene vil de første 5 leddene kunne føre til en gal diagnose for monotoni-egenskapen?
   (Tilleggsoppgave: Forsøk å bevise dine antagelser ved å analysere det n-te ledd!)

6. Hvis ikke den utpekte verdien endrer seg noe nevneverdig etter gjentatt klikking, tyder dette på (men er ingen bevis!) at tallfølgen er **konvergent**. Hvilke av de angitte tallfølgene vil du etter dette kriteriet betegne som konvergent? Prøv i disse tilfellene å avlese **grenseverdien**!
   (Tilleggsoppgave: Forsøk å bevise konvergensen ved å analysere formelen og beregn beregn så grenseverdien!)

7. Hvor mange ganger må du klikke formelen for å komme i nærheten av grenseverdien? Legg merke til at dette kan være helt forskjellig for ulike tallfølger! For hvilke tallfølger går det fortest? Hvorfor?

8. Angående den formelle definisjonen til grenseverdien:

   - Studer tallfølgen $a_n = 5/n$. Fra og med hvilken verdi for n er avstanden fra a_n til grenseverdien mindre enn 0,2? Fra og med hvilken verdi for n er den mindre enn 0,1?

- Studer tallfølgen $a_n = 50n/(n^2 + 50)$. Fra og med hvilken verdi for n er avstanden fra a_n til grenseverdien mindre enn 1? Fra og med hvilken verdi for n er den mindre enn 0,5?

- Studer tallfølgen $a_n = 1 + (-1)^n/n$. Fra og med hvilken verdi for n er avstanden fra a_n til grenseverdien mindre enn 0,1? Fra og med hvilken verdi for n er den mindre enn 0,05?

Når du løser denne oppgaven kan du studere tallverdiene for hvert ledd i tallfølgen som blir vist øverst til høyre i animasjonen!
(Tilleggsoppgave: Forsøk ved hjelp av analyse av formelen å *beregne* verdien til det n-te ledd!)

Anmerkninger til denne oppgaven:

- Denne øvelsen skal klargjøre følgende: Dersom tallfølgen er konvergent, finnes det for *hvert* (uansett hvor lite) tall ε en verdi n, slik at det gjelder **fra og med** denne verdien for n, at avstanden fra a_n til grenseverdien er mindre enn ε .

- NB: Med det uanselige uttrykket "**fra og med**" er det her fremsatt et sterkt utsagn: *Alle* (uendelig mange) ledd, som følger etter, må også oppfølge denne betingelsen:

$$| a_n - \text{grenseverdi} | < \varepsilon$$

  Et slikt utsagn følger ikke av verdien til et endelig antall ledd i tallfølgen, men må bevises (ved matematisk argumentasjon). Om dette er lett eller vanskelig, er avhengig av den konkrete tallfølgen.

Løsningsforslag

2. Aritmetisk: $a_n = 5 - n^2$.
   Geometrisk: $a_n = 1{,}2^n$, $a_n = 4 \cdot 0{,}7^n$ og $a_n = 10 \cdot 2^{-n}$.

3. Den 10. rot av 10 er større enn den 20. rot av 20. Den enmillionte rot av en million er knapt over 1.

4. Med øvre grense : alle unntatt $a_n = n - 5$, $a_n = 1{,}2^n$ og$a_n = n^2/(n + 3)$.
   Med nedre grense: alle unntatt $a_n = 5 - n^2$.

5. Monotont voksende: $a_n = n - 5$, $a_n = 1{,}2^n$ og $a_n = n^2/(n + 3)$.
   Monotont avtagende: $a_n = 5/n$, $a_n = 5 - n^2$, $a_n = 4 \cdot 0{,}7^n$, $a_n = 5/n^2$ og $a_n = 10 \cdot 2^{-n}$.
   Gal diagnose på grunnlag av de første 5 ledd i tallfølgene $a_n = 50n/(n^2 + 50)$ og $a_n = (n^2 + 3n)/(n^2 + 5)$.

6. De konvergente tallfølgene er:

   - $a_n = 5/n$ (grenseverdi: 0)
   - $a_n = 1 + (-1)^n/n$ (grenseverdi: 1)
   - $a_n = (n + 1)/(2n - 5)$ (grenseverdi: 1/2)
   - $a_n = 4 \cdot 0{,}7^n$ (grenseverdi: 0)
   - $a_n = 50n/(n^2 + 50)$ (grenseverdi: 0)
   - $a_n = 5/n^2$ (grenseverdi: 0)
   - $a_n = (n^2 + 3n)/(n^2 + 5)$ (grenseverdi: 1)
   - $a_n = 10 \cdot 2^{-n}$ (grenseverdi: 0)
   - $a_n = (\sin n)/n$ (grenseverdi: 0)
   - $a_n = n^{1/n}$ (= n-te rot av n) (grenseverdi: 1)

7. Blant de konvergente tallfølgene er det de geometriske tallfølgene som nærmer seg fortest grenseverdien. I en særstilling står tallfølgen $a_n = 5/n^2$, siden alle de andre konvergerer langsommere.

   For å få føling med disse ulike konvergensegenskaper, kan du sette inn et stort tall for *n* (f.eks. 1 million) i de ulike formlene og sammenligne deres verdi! Du trenger ikke gjennomføre kompliserte beregninger her. Bruk heller skjønn slik eksemplene under viser:
   - Er *n* veldig stor, avviker $n^2 + 50$ svært lite fra n^2. Derfor kan en, når en skal anslå verdien for store n, erstatte formelen $50n/(n^2 + 50)$ med $50n/n^2 = 50/n$.
   - $2^{-1000000}$ er *svært mye mindre* enn 1/1000000.

8.
   - $a_n = 5/n$
     Fra og med $n = 26$ er avstanden fra a_n til grenseverdien (0) mindre enn 0,2.
     Fra og med $n = 51$ er avstanden fra a_n til grenseverdien (0) mindre enn 0,1.
   - $a_n = 50n/(n^2 + 50)$
     Fra og med $n = 49$ er avstanden fra a_n til grenseverdien (0) mindre enn 1.
     Fra og med $n = 100$ er avstanden fra a_n til grenseverdien (0) mindre enn 0,5.
   - $a_n = 1 + (-1)^n/$
     Fra og med $n = 11$ er avstanden fra a_n til grenseverdien (0) mindre enn 0,1.
     Fra og med $n = 21$ er avstanden fra a_n til grenseverdien (0) mindre enn 0,05.

Didaktisk bakgrunn

Siden regning med tallfølger – på grunn av deres "unendelige" karakter – byr på tallrike formale hinder, kan det særlig på dette området være til stor hjelp å skape anskueliggjøring av idéen. Læringsstøtten synliggjør den ellers abstrakte rekke"følgen" og det dynamiske "etter-hverandre". Samtidig tar en den numeriske dimensjonen med gjennom visning av tallverdiene.

På den ene siden kan animasjonen brukes til å illustrere og diskutere begrep som monotoni, tilnærming og spesielt konvergens. På den andre siden viser den tilstrekkelig numerisk informasjon for å kunne se sammenhengen med en formal betraktningsmåte. Her kan støtte gis på flere forståelsesnivåer, her framheves to spesielt:

- kunne trekke konklusjoner for en tallfølges "oppførsel" (en anskuelig forestilling) ut fra den (formale) fremstilling gitt ved en formel for leddene.
- kunne tolke definisjonen for konvergens dithen at den beskriver et utsagn som

"For hvert ε finnes det en indeks, slik at **fra og med** denne indeksen vil alle ledd ha en avstand som er mindre enn ε fra tallfølgens grenseverdi."

Hvis den lærende ennå er ukjent med den algebraiske analysen av egenskaper som monotoni og konvergens (eller hvis dette ikke er læringsmål), så kan denne læringsstøtten, hvis den blir knyttet til spesielt tilpassede oppgavestillinger, også brukes til å bli kjent med kvalitative egenskaper til tallfølger.

Bruker en oppgavene som er integrert i denne animerte læringsstøtten, bør en opplyse om det også skal arbeides med tilleggsoppgaver (algebraisk løsning av spørmålene) eller ei.