Begreper i analyse

Olav Nygaard

26. januar 2010

Litt om dette heftet

Analyse er et sentralt emne, nesten uansett hvilke retninger en vil studere i matematikk. I dette heftet har jeg plukka ut noen temaer og begreper jeg mener er blant de mest sentrale. Jeg har da tenkt på å få med problemstillinger der er viktig å ha tenkt gjennom dersom en skal undervise matematikk, slik som grenser og kontinuitet, deriverbarhet og integrasjon. Jeg har også tenkt på de studentene som har lyst til å lese mer analyse. Da er for de fleste neste steg topologi og mål- og integrasjonsteori. For å forberede for disse to temaene har jeg fått med ideen om metrikker og metriske rom og jeg har skrevet litt luftig om måling av delmengder av $\mathbb{R}$. Jeg har også forsøkt å gi et bilde av ideene bak Lebesgueintegralet.

Den logiske oppbygginga av heftet er omtrent som dette: Vi starter Kapittel 1 med å spørre hva det vil si at en reell funksjon er kontinuerlig. Vi oppdager da at vi trenger grenser av følger. Dette leder oss til kompletthetsegenskapen til $\mathbb{R}$ og til Cauchykravet. Med kunnskap om følgekonvergens, studerer vi funksjonsgrenser. Vi oppdager at mengda av kontinuerlige funksjoner har algebraiske egenskaper og vi viser max/min teoremet og skjæringssetningen. Vi får oss også et kraftig sjokk når vi møter Haenkels linjalfunksjon. Kontinuitet er ikke helt det vi tror! Vi benytter så anledningen, mens alt dette er friskt i minnet, til å definere metriske rom og reelle funksjoner på slike og oppdage at det aller meste av det vi gjorde sålangt i Kapittel 1 lar seg generalisere.

I Kapittel 2 utvikler vi ulike måter å beskrive hvor store delmengder av $\mathbb{R}$ er. De ≪store≫ mengdene er de som er tette eller overtellbare eller andre kategori eller av mål 1. De ≪små≫ mengdene er liksom de som er ingenstedstette eller tellbare eller av mål null. Vi forsøker å gi mange eksempler. Spesielt viser vi eksistensen av trancendente tall. Litt uvanlig er det kanskje å ta med Baire's argument for at intervaller er av andre kategori, men argumentet er enkelt, og tilsvarende resultat i komplette metriske rom er uhyre sentralt om en senere skal studere funksjonalanalyse. Vi konstruerer Cantormengda og Cantor-Lebesgue funksjonen. Jeg håper og tror leseren vil finne det artig med slike snåle eksempler. Anveldelsen vår av store-små mengder ligger i det å forsøke å si noe om ≪hvor ofte kan ting gå galt?≫ For eksempel, hvor ofte kan en funksjon være diskontinuerlig uten å være diskontinuerlig overalt?

Så følger et kapittel der vi studerer deriverbarhet. Kapittel 3 er ment å skulle gi et geometrisk bilde av hva det vil si å være deriverbar. Dessuten er det å tenke på deriverbarhet i et punkt som at grafen praktisk talt er ei rett linje nær punktet veldig nyttig om en tenker seg å anvende linearisering. Jeg har fortalt litt om muligheter og problemer ved generalisering til funksjoner av to reelle variabler, men ikke utvikla noe veldig formell teori for slike funksjoner. Derimot har jeg lagt vekt på å studere middelverditeoremet og det poenget at det ikke er så trivielt å konkludere med at f er konstant når f' er null.

Kapittel 4 er nok det vanskeligste å få med seg alle finurlighetene fra. Integrasjon er vanskelig med en gang en vil gi areal mellom graf og x-akse et fornuftig innhold for funksjoner som ikke kan integreres via antiderivert. Det påstås i mange lærebøker at Darboux's framstilling av Riemannintegraler er så mye enklere enn Riemanns egen. Jeg skjønner ikke det, og dessuten er det jo artig å lære direkte fra mesteren selv, så jeg har valgt Riemanns egen framstilling. Men jeg forklarer også Darboux's framstilling og viser at de to framstillingene er ekvivalente. Rustet med disse begrepene om integrasjon og integrerbarhet, viser vi at kontinuerlige funksjoner er integrerbare og vi beviser at integralet er lineært. Jeg kunne ikke dy meg for å forsøke å forklare hvordan en utfører Lebesgueintegrasjon. Selvsagt er det da mange ikke-trivielle detaljer jeg bare har håndviftende omtalt. Håper det likevel er mulig å få en ide om hva som skjer. Jeg tror det ville være en stor fordel om en har en aning om helheten av Lebesgueintegralets oppbygning før en går igang med å bygge det opp, stein for stein. Jeg har tatt med de store konvergensteoremene til Arzela og Lebesgue, uten bevis selvsagt. Her er tanken min at det er nyttig for alle å kjenne til at det finnes bedre konvergensteoremer enn de vi viser ved uniform konvergens.

Og uniform konvergens er nettopp det sentrale temaet i Kapittel 5. Jeg utnytter nå at vi allerede i Kapittel 1 definerte metriske rom. Nå får vi en fin overbygning over resultatene. Vi får se at rommet $C[a, b]$ av kontinuerlige funksjoner er et komplett metrisk rom, slik de reelle talla er det. I Kapittel 2 snakka vi om at polynomene ligger tett i $C[a, b]$, uten bevis. Kanskje er det litt på kanten å servere slike dype resultater uten bevis, men jeg synes det er verdifult å se at $\mathbb{R}$ og $C[a, b]$ begge er separable, komplette metriske rom. Å se at flere fenomener hører hjemme under samme tak, er en fin motivasjon for å studere f. eks. topologi. Så studerer vi punktvis og uniform konvergens av følger og rekker av funksjoner fra ulike funksjonsrom. Spesielt snakker vi om leddvis derivasjon og integrasjon og anvender resultatene til et lite studium av potensrekker.

Et tema jeg ikke helt visste hvor jeg skulle putte inn er temaet uniform kontinuitet. Jeg har valgt å kun motivere temaet gjennom kommentarer og oppgaver under studiet av kontinuitet i Kapittel 1. Første gangen vi trenger begrepet er når vi skal vise at kontinuerlige funksjoner er Riemannintegrerbare. Jeg valgte å diskutere uniform kontinuitet der og da. Så dukker begrepet opp igjen i studiet av grenseprosesser i Kapittel 5.

Å lære skal være vanskelig, spesielt er analyse vanskelig. Det er en grunn til at selv giganter som Euler og Cauchy gjorde feil. Ikke rart vi som studenter må gå noen runder med dette stoffet før det siger inn. Jeg har ingen tanke om at jeg skal ha greid å skrive dette på en sånn måte at det ikke er vanskelig lenger. Men jeg håper og tror at det å lese på norsk skal gjøre ting litt lettere. Såvidt jeg vet finnes det ikke noen innføringsbok i reell analyse på norsk. Dette er et bidrag til å forøke å tette det hullet.

Dette heftet er første gang ført i pennen parallelt med at kurset Ma-204, Reell Analyse, gikk sin gang våren 2007. Ni stakkars studenter har måttet finne seg i mange feil og mangler underveis. Takk for tålmodighet og takk for alle feila dere har funnet. Verken jeg eller studentene tror at det som gjenstår er feilfritt, men noe bedre er det i allefall blitt. Til slutt vil jeg ønske deg som leser lykke til med lesingen. Jeg ville sette stor pris på tilbakemeldinger via e-post når du finner feil eller uklarheter. Skriv da til Olav.Nygaard@hia.no.

Høgskolen i Agder
Institutt for matematiske fag, April 2007.

Olav Nygaard

Innhold

Kapittel 1

Kontinuitet og grenseverdi

La A være ei delmengde av de reelle tall $\mathbb{R}$ og tenk deg mengda av funksjoner definert på A med verdimengde i $\mathbb{R}$. La oss kalle denne mengden $F(A, \mathbb{R})$. Vi har altså $F(A, \mathbb{R}) = \{f : A \to \mathbb{R}\}$. Husker du definisjonen av hva vi mener når vi skriver $f : A \to B$?

En funksjon $f : A \to B$ er en regel som til hver $a \in A$ tilordner et entydig $b \in B$.

En konsekvens av denne definisjonen er at hvis A består av ett punkt, så er det like mange funksjoner $f : A \to B$ som det er elementer i B. Da ser vi at mengden av funksjoner fra A inn i B, $F(A, B)$, har en tendens til å bestå av veldig mange elementer. Se Oppgave 1 for å telle opp antall funksjoner i et par oversiktlige tilfeller.

En liten kommentar: Mange går rundt med den misoppfatningen at funksjoner må ha et funksjonsuttrykk. Ikke så rart kanskje, siden de funksjonene vi er i befatning med i skolen alltid er gitt ved et algebraisk uttrykk. Vi kaller funksjoner definert på en delmengde av $\mathbb{R}$ som har et funksjonsuttrykk (sammensatt av polynomer, eksponentialer, logaritmer og trigonometriske uttrykk) for *elementære funksjoner.* Vi får dermed delt $F(A, \mathbb{R})$ i to deler. La oss kalle de elementære funksjonene for $E(A, \mathbb{R})$.

Eksempel 1.1. Vi trenger et eksempel på en funksjon som ikke er med i $E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Definer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved at

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ er et heltall} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi liker å systematisere; la oss være enige om å bare skrive $F(A)$ og $E(A)$ når det er underforstått at verdimengdene er reelle. La oss videre sette $C(A)$ for kontinuerlige funksjoner på A. Når først vi er i gang, setter vi $D(A)$ for de deriverbare funksjonene og $D^n(A)$ for de n ganger kontinuerlig deriverbare funksjonene (altså de funksjonene som er slik at resultatet etter n derivasjoner er en kontinuerlig funksjon på A). Uendelig mange ganger kontinuerlig deriverbare funksjoner kan vi skrive $D^\infty(A)$ og polynomer $P(A)$. Til slutt skriver vi $I(A)$ for de integrerbare funksjonene på A. Vi har vel en klar følelse fra tidligere erfaringer av at

$$F(A) \supset I(A) \supset C(A) \supset D(A) \supset D^1(A) \supset D^2(A) \supset \cdots \supset D^\infty(A) \supset P(A),$$

og at alle inklusjonene er ekte.

Vi skal etter hvert forsøke å gi presise definisjoner av integrerbarhet, kontinuitet og deriverbarhet slik at vi kan få god kunnskap om mengdene over og deres egenskaper. Dette føler du kanskje at du allerede har. La meg forsøke å overbevise deg om at så neppe er tilfelle: Som vi husker kalles f kontinuerlig i $a \in A$ dersom $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Se på denne funksjonen her, litt mer sofistikert enn den i Eksempel 1.1:

Eksempel 1.2 (Diriclet 1889)**.** Definer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved at

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Da er f. eks. $f(1/2) = 1$ mens $f(\sqrt{2}) = 0$. Det er ingen tvil om at f virkelig er en funksjon. Forsøker du å tegne grafen til f blir du snart overbevist om at den spretter opp og ned mellom 0 og 1 hele tiden. Jeg er sikker på at du synes f er diskontinuerlig, men du greier neppe å avgjøre $\lim_{x \to a} f(x)$, rett og slett fordi grensebegrepet ditt ikke strekker til. Vi trenger et grensebegrep slik at vi kan avgjøre $\lim_{x \to a} f(x)$ også når funksjonene oppfører seg mindre "sympatisk", slik som denne.

Til ditt forsvar vil du kanskje hevde at funksjonen i Eksempel 1.2 er så sær at det umulig kan være mange tilfeller av slike. Litt rett har du, de fleste funksjonene vi møter i anvendelser er greiere å ha med å gjøre. Men det er bevist at "de flestefunksjoner faktisk er veldig "stygge". I Kapittel 2 skal vi forsøke å si litt mer presist hva vi mener med "de fleste".

1.1 Kontinuerlige funksjoner, en første smak

En kontinuerlig funksjon tenker du vel på som en funksjon med en "sammenhengende graf". Matematikerne har landet på følgende definisjon - den ser ut til å ha mye for seg:

Definisjon 1.3. *$f : A \to \mathbb{R}$ kalles kontinuerlig i punktet $x = a$ dersom det er slik at hver gang vi slår et intervall $I_y = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ om $f(a)$, så finnes et intervall $I_x = (a - \delta, a + \delta)$ om $x = a$ slik at $f(I_x) \subset I_y$. Hvis f er kontinuerlig for alle $a \in A$, kalles f kontinuerlig over A.*

La oss bruke definisjonen på noen eksempler:

Eksempel 1.4. Vi skal øve oss på å bruke Definisjon 1.3. For å forstå eksemplene under er det viktig at du tegner det som skjer.

(a) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = x^2$. Vi vil vise at f er kontinuerlig i $x = 1$. Vi har $f(1) = 1$. Når vi slår intervallet $(1 - 1/2, 1 + 1/2)$ om $y = 1$, så får vi $f(I_x) \subset I_y$ ved f.eks. å velge intervallet $(1 - 1/10, 1 + 1/10) = (0.9, 1.1)$ om $x = 1$. Når vi slår intervallet $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ om $y = 1$, så får vi $f(I_x) \subset I_y$ ved å velge $\delta < \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$.

(b) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \sin x$. Vi vil vise at f er kontinuerlig i $x = \pi/2$. Vi har $f(1) = 1$. Når vi slår intervallet $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ om $y = 1$, så får vi $f(I_x) \subset I_y$ ved å velge intervallet $(1 - \delta, 1 + \delta)$, der $\delta < \pi/2 - \sin^{-1}(1 - \varepsilon)$ om $x = 1$.

(c) Vi skal vise at funksjonen i Eksempel 1.1 er kontinuerlig overalt, bortsett fra når x er et helt tall. La først a ikke være et helt tall. Da er $f(a) = 0$. Slå intervallet

$I_y = (-\varepsilon, \varepsilon)$ om 0 på y-aksen. Velg da et så lite intervall om a på x-aksen at det ikke inneholder noe heltall. Velg altså δ så liten at $I_x = (a - \delta, a + \delta)$ ikke inneholder noe heltall. Da er $f(I_x) = \{0\} \subset I_y$. La så a være et helt tall. Da er $f(a) = 1$. Slå intervallet $I_y = (1 - 1/2, 1 + 1/2)$ om 1 på y-aksen. Uansett hvor liten du velger δ vil $(a - \delta, a + \delta)$ inneholde et punkt b slik at $f(b) = 0 \notin I_y$.

(d) Faktisk greier vi nå å argumentere rimelig brukbart for at funksjonen i Eksempel 1.2 ikke er kontinuerlig i noe punkt. La først $a \in \mathbb{Q}$. Da er $f(a) = 1$. Slå intervallet $I_y = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ om 1 på y-aksen. Uansett hvor liten du velger δ vil $(a-\delta, a+\delta)$ inneholde et irrrasjonalt punkt b, slik at $f(I_x)$ inneholder 0. La så $a \notin \mathbb{Q}$. Da er $f(a) = 0$. Slå intervallet $I_y = (-\varepsilon, \varepsilon)$ om 0 på y-aksen. Uansett hvor liten du velger δ vil $(a - \delta, a + \delta)$ inneholde et rasjonalt punkt (vi skal si mer om hvorfor det er sånn senere) b, slik at $f(I_x)$ inneholder 1.

Legg merke til at (c) og (d) på sett og vis var enklere enn (a) og (b). Det viser seg at definisjonen av kontinuitet egner seg godt til noen betraktninger, men er ganske håpløs til andre. Vi skal møte en alternativ test for kontinuitet i Teorem 1.6.

Vi pleier ofte skrive Definisjon 1.3 litt kortere (du må tegne for å se at denne kortversjonen sier det samme som Definisjon 1.3):

Definisjon 1.5. *$f : A \to \mathbb{R}$ kalles kontinuerlig i punktet $x = a$ dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes et $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ hver gang $|x - a| < \delta$. Hvis f er kontinuerlig for alle $a \in A$, kalles f kontinuerlig over A.*

I Oppgave 3 skal du vise at andregradspolynomer er kontinuerlige ved å bruke definisjonen av kontinuitet. Det viser seg å være ganske så komplisert. Et problem med definisjonen er at det er en sjau å regne ut δ utfra en gitt ϵ. Vi har, som vi allerede har hintet om, en kjempegrei test for å avgjøre kontinuitet i mange tilfeller (se starten av Seksjon 1.2 dersom du ikke kjenner til notasjonen for tallfølger):

Teorem 1.6. *$f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i $x = a$ hvis og bare hvis hver gang (a_n) er ei følge som konvergerer mot a, så vil følga $(f(a_n))$ konvergere mot $f(a)$.*

Med Teorem 1.6 er det lett å argumentere ganske godt for at polynomer er kontinuerlige (i motsetning til med Definisjon 1.3). Sett

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_k x^k.$$

La $a_n \to a$. Da er

$$p(a_n) = b_0 + b_1 a_n + b_2 a_n^2 + \cdots + b_k a_n^k.$$

Når $a_n \to a$, vil b_0 være fast, $b_1 a_n \to b_1 a$, $b_2 a_n \to b_2 a$ osv. Summen av disse vil da nærme seg $b_0 + b_1 a + b_2 a^2 + \cdots + b_k a^k$, som akkurat er $p(a)$.

Men strengt tatt skulle vi jo ha ordentlig kontroll på hva det vil si at $a_n \to a$, slik at vi kan bevise at vi ikke gjorde noe galt i utregningen over og slik at vi kan bevise Teorem 1.6. Det er studium av konvergens av følger som blir vår neste oppgave, og det skal vise seg å by på mange artige nye spørsmål, skal vi få se.

1.2 Konvergens av følger

Hva er ei følge og hva vil det si at ei følge konvergerer? Tja, det er ett lett og ett vanskelig spørsmål.

1.2.1 Hva ei følge er

Ei følge er simpelthen ei uendelig liste med tall, her er tre eksempler

$$\begin{array}{lllll} 1, & -1, & 1, & -1, & \cdots \\ 1, & 1/2, & 1/3, & 1/4, & \cdots \\ 1, & 3, & 5, & 7, & \cdots \end{array}$$

Selv om dette i og for seg var enkelt, skal vi stoppe opp og tenke litt. I hver rad over ser du at det står ett tall på plass nr. 1, ett på plass nr. 2 og så videre. Vi utnytter dette til å finne en praktisk notasjon: Tallet på plass nr. 1 skriver vi a_1, tallet på plass nr. 2 skriver vi a_2 og så videre. Vi kan tegne denne ideen slik:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots \end{array} \tag{1.1}$$

I stedenfor å skrive $a_1, a_2, a_3, \cdots$, skriver vi gjerne $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eller rett og slett bare (a_n). Men se nøye på skjemaet (1.1). Pilene viser oss at a_k er verdien til en reell funksjon f definert på $\mathbb{N}$ og $f(k) = a_k$. La oss se dette ved et eksempel:

Eksempel 1.7. La $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(n) = \frac{n+1}{n}$. Den tilhørende følga er da

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$$

At følga (a_n) kommer fra funksjonen $f(n) = \frac{n+1}{n}$ får vi fram ved å skrive $(\frac{n+1}{n})_{n=1}^{\infty}$.

Matematikerne bruker gjerne denne definisjonen av reell tallfølge

Ei reell tallfølge er en reell funksjon definert på de naturlige tall.

1.2.2 Hva det vil si at ei følge konvergerer, del 1

Så til det vanskeligere spørsmålet *hva vil det si at ei følge (a_n) konvergerer mot et tall a?* Intuitivt mener vi at a_n kommer nærmere og nærmere tallet a. Men ikke helt det heller, følga kan oppføre seg akkurat som den vil på de første en millioner plasser, poenget er at den roer seg inn mot tallet a før eller siden. La oss starte med å definere hva vi mener med "før eller siden":

Definisjon 1.8. *La I være et intervall, (x, y). Vi sier at (a_n) er* før eller siden *i I dersom det finnes et naturlig tall N slik at alle leddene i følga fra og med ledd N ligger i I.*

Vi trenger eksempler:

Eksempel 1.9. *(a) La $a_n = 1/n$ og la $I = (-0.1, 0.1)$. Da er (a_n) før eller siden i I fordi $a_n \in I$ for alle $n \geq 11$. Vi kan altså velge $N = 11$.*

(b) La $a_n = (-1)^n$. Da er (a_n) før eller siden i $(-2, 2)$ (Velg $N = 1$), men (a_n) er ikke før eller siden i noe intervall av typen (x, y) der $x < 1$ eller $y < 1$.

Begrepet *før eller siden* er enkelt, men ganske smart. Det gir oss en måte å definere konvergens på:

Definisjon 1.10. *Vi sier at* (a_n) konvergerer *mot tallet* a *hvis* (a_n) *før eller siden er i et hvilket som helst intervall om* a *(uansett hvor smalt det er). Hvis det ikke finnes noe* a *som følga konvergerer mot, sier vi at følga* divergerer.

Vi skriver $a_n \to a$ når $n \to \infty$ eller $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ når (a_n) konvergerer mot a. Ofte skriver vi bare $a_n \to a$ eller $\lim a_n = a$, det er jo underforstått at $n \to \infty$.

Vi kan også formulere Definisjon 1.10 slik: (a_n) konvergerer mot tallet a hvis (a_n) før eller siden er i et hvilket som helst intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (uansett hvor liten ε er). Enda en måte å si det samme på er: (a_n) konvergerer mot tallet a hvis det for alle $\varepsilon > 0$ finnes et $N \in \mathbb{N}$ slik at $n \geq N$ medfører $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Eller enda kortere:

$$\lim_n a_n = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ : n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Definisjon 1.10 er kanskje den viktigste definisjonen i analyse. Den går tilbake til franskmannen Augustin Louis Cauchy og er fra 1820-tallet. Et lite tips: Når en skal bruke definisjonen til å sjekke konvergens i konkrete tilfeller, er det som regel kortversjonen som er best å bruke. Men når en skal bruke definisjonen til å bevise teoremer, da er det oftest lurere å tenke geometrisk i form av "før eller siden".

Eksempel 1.11. (a) La $a_n = 1/n$. Vi skal vise at $a_n \to 0$. Vi slår da et vilkårlig smalt intervall $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ om null. Hvis vi velger $N > 1/\varepsilon$, så er $a_n \in I_\varepsilon$.

(b) La $a_n = 2n/(n+3)$. Vi ser at

$$a_n = \frac{2n}{n+3} = \frac{2}{1+\frac{3}{n}},$$

og det gir at vi tror $a_n \to 2$. Vi slår nå et smalt intervall om 2, altså $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. Så vil vi finne N slik at alle leddene fra og med a_N ligger inne i dette intervallet. Vi søker altså N slik at

$$\left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| < \varepsilon \text{ så snart } n \geq N.$$

Litt brøkregning gir oss at

$$\left|\frac{2n}{n+3} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2(n+3)}{n+3}\right| = \left|\frac{-6}{n+3}\right| = \frac{6}{n+3}.$$

Så tenker vi oss litt om: Dette sier oss altså at avstanden fra a_n til 2 er $6/(n+3)$. Vi trenger altså å finne N slik at $\frac{6}{N+3} < \varepsilon$. Det greier vi fint, og vi finner at vi må kreve $N > \frac{6}{\varepsilon} - 3$.

Men egentlig gjorde vi mer enn vi trengte. Vi påviste den minst mulige N vi trenger. Det er ikke nødvendig. Vi kan tenke sånn: Hvis noe som er større enn $\frac{6}{N+3}$ er mindre enn ε, så er i allefall $\frac{6}{N+3} < \varepsilon$. Vel, noe som alltid er større enn $\frac{6}{N+3}$ er f. eks. $6/N$. Så det er nok å løse ulikheten $6/N < \varepsilon$. Det gir oss en litt større N, nemlig $N > 6/\varepsilon$, men vitsen er jo bare å påvise at det finnes en N som gjør jobben.

Legg merke til at når ε minker, så blir N større. Dette er helt typisk.

(c) Her kommer et stilig eksempel: La $a_n = n^{\frac{1}{n}}$. Vi skal vise at $a_n \to 1$. La $\varepsilon > 0$ (underforstått slå et intervall med bredde 2ε om 1). Nå koker i grunnen dette ned til det å være lur: Vi har at $a_n \geq 1$ (dette kan vi vise f. eks. ved induksjon).

Dermed er $|a_n - 1| = n^{\frac{1}{n}} - 1$. Vi har altså at avstanden y_n fra a_n til 1 er gitt ved $y_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. Vi skal sørge for at $y_n < \varepsilon$ for $n \geq N$. Legg merke til at $n = (1 + y_n)^n$. Ved binomialteoremet har vi

$$\begin{aligned} n &= (1+y_n)^n \\ &= 1 + ny_n + \tfrac{n(n-1)}{2} y_n^2 + \cdots + y_n^n \\ &> \tfrac{n(n-1)}{2} y_n^2 \ \text{(hvis } n \geq 2). \end{aligned}$$

Dette gir oss at for $n \geq 2$ gjelder

$$0 < y_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Det er altså nok å finne N slik at $\sqrt{\frac{2}{N-1}} < \varepsilon$. Men vi kan være enda lurere: Vi har at

$$\frac{4}{n} - \frac{2}{n-1} = \frac{2n-4}{n(n-1)} \geq 0 \ \text{(hvis } n \geq 2),$$

så $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{4}{n}}$. Dermed trenger vi bare finne N slik at $\sqrt{\frac{4}{n}} < \varepsilon$. Og det er oppfylt hvis $N > 4/\varepsilon^2$. Der har vi N'en vår, og dermed et bevis for at $n^{\frac{1}{n}} \to 1$.

Som vi har sett fra Eksempel 1.11, så består det å vise at ei konkret følge (a_n) konvergerer mot tallet a i å

(1) la $\varepsilon > 0$.

(2) finne et uttrykk for avstanden $y_n = |a_n - a|$.

(3) bestemme N slik at $y_n < \varepsilon$ når $n \geq N$. Dette består gjerne av delpunktene

 (3a) finne et uttrykk $g(n)$ slik at $0 \leq y_n \leq g(n)$.

 (3b) gjerne finne et enklere uttrykk $h(n)$ slik at $g(n) \leq h(n)$.

 (3c) løse ulikheten $h(N) < \varepsilon$ for dermed å bestemme $N(\varepsilon)$.

Dette er noen greie steg å følge når du skal vise at $a_n \to a$, slik som i Oppgave 6. Men å vise at ei bestemt følge (a_n) konvergerer mot tallet a er nå likevel av begrensa interesse. Det handler mest om å være god til å produsere ulikheter. Det viktige er å forstå Cauchys definisjon av grense. La oss nå demonstrere effektiviteten av Cauchys definisjon av grense ved å bevise noen "opplagtheter". Vi vil jo at hvis $a_n \to a$ og $b_n \to b$, så må værsågod $a_n + b_n \to a + b$, slik vi utnyttet da vi viste at polynomer er kontinuerlige. Et eksempel til: Vi vil argumentere for at $2n/(n+1) + n^{\frac{1}{n}} \to 2$. Da er det jo lettvint hvis vi kan si at $2n/(n+1) \to 1$ og $n^{\frac{1}{n}} \to 1$, så grensa må være 1+1=2. Her kommer det vi ønsker:

Teorem 1.12. *La (a_n) og (b_n) være to reelle følger. La t være et reelt tall.*

(a) Hvis $a_n \to a$ og $b_n \to b$, så vil $a_n + b_n \to a + b$.

(b) Hvis $a_n \to a$, så vil $ta_n \to ta$.

(c) Hvis $a_n \to a$ og $b_n \to b$, så vil $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

(d) Hvis $a_n \to a$ og $b_n \to b$, der $b \neq 0$ og ingen b_n er null, så vil $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Bevis. Vi tar dem en etter en.

(a) Anta $a_n \to a$ og $b_n \to b$. La $\varepsilon > 0$. Vi vet at det finnes N_1 og N_2 slik at hvis $n \geq N_1$ så er a_n mindre enn $\varepsilon/2$ fra a og hvis $n \geq N_2$ så er b_n mindre enn $\varepsilon/2$ fra b. La nå N være den største av N_1 og N_2, altså $N = \max(N_1, N_2)$. Da er garantert a_n mindre enn $\varepsilon/2$ fra a, og b_n mindre enn $\varepsilon/2$ fra b. Men da er jo $a_n + b_n$ mindre enn ε fra $a + b$, som vi ville vise.

(b) Anta $a_n \to a$. La $\varepsilon > 0$. Anta først $t \neq 0$. Vi vet at det finnes N slik at når $n \geq N$, så er $|a_n - a| < \varepsilon/|t|$. Men da er $|ta_n - ta| < |t|\varepsilon/|t| = \varepsilon$, som vi ville vise. Anta så at $t = 0$. Da er $ta_n = 0$ for alle n, så følga konvergerer mot $0 = 0 \cdot a$.

(c) Vi trenger først at *konvergente følger er begrensa:* La $c_n \to c$. Da finnes M slik at c_n holder seg nær c for $n \geq M$. Men de første M leddene må jo være begrensa (det er jo bare endelig mange av dem) og de resterende er like ved c. Altså vet vi at konvergente følger er begrensa.

Det finnes altså K slik at $|a_n| \leq K$, der $K < \infty$. Velg nå N_1 og N_2 slik at $n \geq N_2$ medfører at $|b_n - b| < \varepsilon/2K$ og slik at $n \geq N_1$ medfører $|a_n - a| < \varepsilon/2|b|$. Nå får vi, for $N \geq \max(N_1, N_2)$, at

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\
&< K \tfrac{\varepsilon}{2K} + \tfrac{\varepsilon}{2|b|}|b| \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(d) Anta $a_n \to a$ og $b_n \to b$ der $b \neq 0$ og ingen b_n er null. Vi har at $a_n/b_n = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$. Resultatet følger nå fra (c) hvis vi kan vise at $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Vi skjønner jo at når b_n er nær b, så er $\frac{1}{b_n}$ nær $\frac{1}{b}$, men et skikkelig bevis skader ikke: La $m = \min |b_n|$, som er større enn 0 (hvorfor?). Velg N så stor at $|b_n - b| < \varepsilon \cdot m|b|$ (du ser snart hvorfor). Nå er, for $n \geq N$,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| \leq \frac{|b_n - b|}{m|b|} < \varepsilon.$$

□

Eksempel 1.13. Teorem 1.12 gjør at vi i mange tilfeller kan finne grenser uten å gjøre ε, N-argument. Se her: Vi vil bestemme $\lim_n \frac{6n^2+4}{2n^2+1}$. Litt algebra viser at

$$\frac{6n^2 + 4}{2n^2 + 1} = \frac{6 + \frac{4}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}.$$

Nå ser vi at nevner er ulik null for alle n og at grensa til nevner ikke er null. Altså kan vi bruke Teorem 1.12 (d). Vi får altså å bestemme $\lim_n(6 + \frac{4}{n^2})$ og $\lim_n(2 + \frac{1}{n^2})$ hver for seg. La oss beregne $\lim_n(6 + \frac{4}{n^2})$. Vi har, ved Teorem 1.12 (a) at $\lim_n(6 + \frac{4}{n^2}) = \lim_n 6 + \lim_n \frac{1}{4n^2}$ som vi ser at (se Oppgave 7) blir $6 + 0 = 6$. Tilsvarende får vi at $\lim_n(2 + \frac{1}{n^2}) = 2$. Altså er $\lim_n \frac{6n^2+4}{2n^2+1} = \frac{6}{2} = 3$. Vi skriver hele prosessen slik:

$$\lim_n \frac{6n^2 + 4}{2n^2 + 1} = \frac{\lim_n(6 + \frac{4}{n^2})}{\lim_n(2 + \frac{1}{n^2})} = \frac{6 + \lim_n \frac{4}{n^2}}{2 + \lim_n \frac{1}{n^2}} = \frac{6}{2} = 3.$$

Vi skal runde av Del 1 om konvergente følger med et resultat du antakelig vil finne ganske opplagt: Tenk deg to konvergente følger (a_n) og (b_n) og tenk deg videre at du får vite at $a_n \leq b_n$ for alle n. Tror du da grensa til (a_n) kan være høyere enn grensa til (b_n)? Neppe. Her er svaret, forresten:

Teorem 1.14. *La (a_n) og (b_n) være to reelle følger slik at $a_n \to a$ og $b_n \to b$ og slik at $a_n \leq b_n$ for alle n. Da er $a \leq b$*

Bevis. Hva om $a > b$? Da må det finnes et intervall I om b slik at hele I ligger til venstre for a på tallinja. Bruk nå at $a_n \to a$ til å slå et intervall J om a, til høyre for I, slik at (a_n) før eller siden er i J. Men nå blir det umulig for (b_n) å før eller siden ligge i I. □

Eksempel 1.15. La $a_n = 1/(n+1)$ og $b_n = 1/n$. Da er a_n ekte mindre enn b_n for alle n, men grensene er like.

1.2.3 Hva det vil si at ei følge konvergerer, del 2

Definisjon 1.10 forteller hva det betyr at (a_n) konvergerer mot a. Men det hadde jo vært kjekt å kunne avgjøre om ei følge konvergerer uten å vite hva grensa er først, hva?

Eksempel 1.16. La $a_n = 1 - 1/n$. Vi vet at denne følga konvergerer (mot 1). La oss skrive den ut: $1/2, 2/3, 3/4, \cdots$ Vi ser tydelig at leddene blir likere og likere hverandre, altså at $|a_{n+1} - a_n| \to 0$.

Et øyeblikks tanke overbeviser oss raskt om at skal ei følge konvergere, så må leddene bli mer og mer like, så vi må alltid ha at $|a_{n+1} - a_n| \to 0$. Er det kanskje så enkelt at vi bare kan sjekke om differensen mellom påfølgende ledd går mot null? Her kommer et eksempel du skal merke deg:

Eksempel 1.17. La $a_1 = 1, a_2 = 1 + 1/2, a_3 = 1 + 1/2 + 1/3$ osv. Vi har altså $a_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$. Nå er

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1},$$

så det er tydelig at $|a_{n+1} - a_n| \to 0$. Men (a_n) konvergerer ikke fordi (tegn figur!)

$$a_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1),$$

og $\ln(n+1)$ vokser over alle grenser. Et mer elementært bevis for at (a_n) divergerer kan du finne i Eksempel 1.26.

Eksempel 1.17 er definitivt siste spiker i kista for håpet om at konvergens kan avgjøres ved å se på differensen mellom påfølgende ledd. Vi må kikke etter et krav som sier noe om at leddenes differens går raskt mot null. La oss tenke etter: Anta (a_n) konvergerer mot et reelt tall. Selv om vi ikke kjenner grensa, kan vi kalle den a. La nå $\varepsilon > 0$ og tenk deg intervallet med bredde ε om a, altså $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$. Gå så langt ut i følga at alle a_n fra a_N og ut ligger i intervallet. Hva er nå maksimal avstand mellom to vilkårlig valgte ledd i følga, a_n og a_m, der begge disse ligger etter a_N. Jo, maksimal avstand er bredden av intervallet, nemlig ε. Hva har vi vist?

Hvis (a_n) er konvergent, så finnes for alle $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ slik at hvis $n, m \geq N$, så er $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Anta så at (a_n) oppfyller kravet over. Da er det tydelig at fra ledd N av vil følga være i intervallet med bredde ε. Spørsmålet er da om det finnes noe inni der når $\varepsilon \to 0$.[1]

Vi trenger en definisjon:

Definisjon 1.18. *Ei følge (a_k) kalles ei* Cauchyfølge *dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes et N slik at hvis a_n og a_m er to vilkårlige ledd etter a_N, så er $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

I kortform:

$$(a_k) \text{ er Cauchy } \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \;: n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.)$$

Eksempel 1.19. La igjen $a_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$. Da er (anta $n > m$)

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right) - \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{m}\right) \\ &= \tfrac{1}{m+1} + \tfrac{1}{m+2} + \cdots + \tfrac{1}{n} = \textstyle\sum_{i=m+1}^{n} \tfrac{1}{i}. \end{aligned}$$

Vi har (tegn figur!)

$$\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{i} > \int_{m+1}^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1) - \ln(m+1) = \ln\left(\frac{n+1}{m+1}\right),$$

så (a_n) er ikke ei Cauchyfølge.

Eksempel 1.20. Vi skal kikke på ei berømt følge, nemlig $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Å vise at denne er Cauchy ville bety å vise at

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \to 0 \text{ når } n, m \to \infty,$$

og det har ikke jeg optimisme til å forsøke. Vi trenger enklere tester enn Cauchytesten for å vise at følger har ei grense.

1.3 Kompletthet

Hvis vi tar med følgende

Aksiom: *Enhver Cauchyfølge av reelle tall konvergerer mot et reelt tall,*

så viser diskusjonen vår i forkant av Definisjon 1.18 at vi har følgende teorem:

Teorem 1.21. *Ei reell tallfølge konvergerer hvis og bare hvis den er Cauchy.*

Jeg har kalt denne seksjonen for *kompletthet.* Det lurer du vel på hvordan kan ha seg. Her er definisjonen av kompletthet:

Definisjon 1.22. *Ei delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles* komplett *dersom alle Cauchyfølger i A konvergerer i A.*

[1] At det finnes noe der, må vi rett og slett ta som et aksiom, men det går an å bevise at det blir stående igjen et reelt tall når $\varepsilon \to 0$. Dette kommer det mer om i Seksjon 1.3.

Aksiomet helt i starten av denne seksjonen kan da skrives som $\mathbb{R}$ *er komplett.* Og selv om vi formulerer det som et aksiom her, så er det faktisk et teorem, det kan være greit å vite. Men det er et ganske dypt teorem og det passer ikke i et innføringskurs i analyse å ha med såpass heftige ting. At $\mathbb{R}$ er komplett ble bevist uavhengig, men på to ganske ulike måter, av tyskerne Dedekind og Cantor rett rundt 1870. Begge konstruerte $\mathbb{R}$ ved å utvide $\mathbb{Q}$.

Du har kanskje lyst til å møte ei ikke-komplett delmengde av $\mathbb{R}$? Ta $A = [0, 1)$. Se på følga $a_n = 1 - 1/n$. Da er alle $a_n \in A$, følga er Cauchy, men den konvergerer mot noe *utenfor* A. Dette eksemplet var ikke så veldig spennende, her kommer et mye bedre:

Eksempel 1.23. Vi vil argumentere for at $\mathbb{Q}$ ikke er komplett på følgende måte: Se på ei følge av rasjonale tall som konvergerer mot $\sqrt{2}$. Tenk deg et rektangel med sider 1 og 2. La $a_1 = 1$ og $b_1 = 2$. La så a_2 være middelverdien av a_1 og b_1 og la b_2 være slik at $a_2 b_2 = 2$. La $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ og $b_3 = 2/a_3$. Om vi nå tegner rektanglene R_n med sider a_n og b_n, ser vi at R_n blir mer og mer kvadratiske. a_n og b_n ser ut til å være to konvergente følger av rasjonale tall og grensa er nødt til å være $\sqrt{2}$, som ikke er rasjonalt.

1.3.1 Seks ekvivalente formuleringer av at $\mathbb{R}$ er komplett

Følgene som ble brukt til å argumentere for at $[0, 1)$ og $\mathbb{Q}$ ikke er komplette var *monotone følger.* (a_n) kalles *monotont økende* dersom $a_n \le a_{n+1}$ for alle n og *monotont minkende* dersom $a_n \ge a_{n+1}$ for alle n. En *minste øvre skranke* for ei mengde $A \subset \mathbb{R}$ er et tall $s \in \mathbb{R}$ slik at $x \le s$ for alle $x \in A$ og slik at $s \le t$ for alle andre t med egenskapen at $x \le t$ for alle $x \in A$. Tilsvarende definerer vi *største nedre skranke for A.* Vi kaller minste øvre skranke til A for *supremum* til A og største nedre skranke for *infimum* til A. Du kan øve på å finne supremum og infimum i Oppgave 10.

Vi skal se at vi alltid kan avgjøre kompletthet ved å se på monotone følger:

Teorem 1.24. *Følgende er ekvivalente (og sanne) utsagn:*

(A) $\mathbb{R}$ *er komplett, dvs. alle reelle Cauchyfølger har grense i* $\mathbb{R}$*.*

(B) Alle opptil begrensa, monotont økende reelle følger har ei grense i $\mathbb{R}$*.*

(C) Alle nedtil begrensa, monotont minkende reelle følger har ei grense i $\mathbb{R}$*.*

(D) Alle opptil begrensa delmengder av $\mathbb{R}$ *har et supremum.*

(E) Alle nedtil begrensa delmengder av $\mathbb{R}$ *har et infimum.*

Vi vil ikke bruke tid på å bevise ekvivalensen av disse fem utsagnene. Men du kan vite at det er ganske kort vei å vise ekvivalensen mellom (B), (C), (D) og (E). Det er også ganske greit å vise at (A) medfører (B) (eller en av de andre). Den vanskelige delen er å vise at de fire siste medfører den første. I boka [2] er det vist at $\mathbb{R}$ har egenskap (D) og så er egenskap (A) utledet fra (D). Et viktig steg på veien fra (D) til (A) er følgende observasjon (som dermed også er ekvivalent til de fem utsagnene over)

(F) Enhver nøstet følge av lukka begrensa intervaller har et felles punkt.

Et lukka begrensa intervall er ei mengde av typen $[a, b]$. Ei følge av lukka, begrensa intervaller er ei samling $\{[a_j, b_j]\}$. At følga er nøstet betyr at

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots,$$

altså at (a_j) er monotont økende og (b_j) er monotont minkende. Hvis nå (p_n) er Cauchy, så kan vi se på mengdene E_N bestående av "haler", altså $E_N = \{p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \cdots\}$. Alle disse er opptil og nedtil begrensa (siden (p_n) er Cauchy) og har derfor supremum s_N og infimum i_N. Se nå på intervallene $[i_N, s_N]$. Ved (F) er det et punkt p som er felles for alle disse. Siden (p_n) er Cauchy, kan vi vise at p er entydig (breddene på intervallene går mot null). Til slutt kan vi bruke definisjonen av grenseverdi til å vise at p er grensa til (p_n).

Eksempel 1.25. Vi skal definere ei følge rekursivt: La $a_1 = 1$ og la $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n}$. Nå kan du sjekke følgende punkter

(i) Du kan bruke ulikheten $x^2 + y^2 \geq 2xy$ til å vise at $a_n \geq \sqrt{2}$ for alle $n \geq 2$.

(ii) $x - \frac{x^2+2}{2x} \geq 0$ når $x \geq \sqrt{2}$, så $a_{n+1} \leq a_n$ når $n \geq 2$.

(iii) (a_n) er ei konvergent følge på grunn av Teorem 1.24 (C).

(iv) Grensa a må oppfylle $a = \frac{a+2}{2a}$, så $\lim a_n = \sqrt{2}$.

1.3.2 Delfølger og kompletthet. Bolzano-Weierstrass egenskapen.

La $(b_n) = (1/(n+1))$. Vi plukker ut b_3. Det neste vi tar med er b_6 og så b_{10}, b_{15}, b_{21} osv. Da har vi et eksempel på ei *delfølge* av $(1/(n+1))$.

Vi trenger litt notasjon: La (a_n) være ei følge. Den vi velger til første element i delfølga kaller vi a_{n_1}. I eksemplet over er $n_1 = 3$ og $b_{n_1} = 1/4$. Den vi velger til andre element i delfølga kaller vi a_{n_2}. I eksemplet over er $n_2 = 6$ og $b_{n_2} = 1/7$. Slik fortsetter vi i det uendelige. Med denne notasjonen kan vi skrive ei vilkårlig delfølge av (a_n) som $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.

Eksempel 1.26. Vi har sett på følga $(1/n)$, og vi har sett at $(s_k) = (\sum_{n=1}^{k} 1/n)$ divergerer. En kan more seg med å plukke ut delfølger av $(1/n)$ og så summere leddene i delfølga for å se om en da får konvergens. Ei delfølge vi kan plukke ut er den som svarer til å ta med akkurat de $1/n$ der n er primtall. Ved et resultat av Euklid[2] har vi da fortsatt ei uendelig lang følge. Skriv mengden av primtall som P. Vi kan da skrive denne delfølga som $(1/n)_{n\in P}$. Euler viste i 1737 at også denne rekka divergerer. La oss skrive Eulers resultat som $\sum_{n\in P} 1/n = \infty$

Nå kommer noe artig: Fra P kan vi ta ut primtallstvillingene, altså slik som $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$ osv. La mengden av primtallstvillinger hete PT. Vi mener nå $PT = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \cdots\}$. Et åpent spørsmål er om det er endelig eller uendelig mange elementer i PT. I 1919 viste den norske matematikeren Viggo Brun at $\sum_{n\in PT} 1/n$ konvergerer. Tallet rekka konvergerer mot kalles Bruns konstant og betegnes med B_2. Et anslag for B_2 er 1.902160583104. Om $(1/n)_{n\in PT}$ er ei delfølge av $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ er ikke sikkert, hvis den er endelig er den ikke ei delfølge.

Et annet morsomt resultat er at om vi tar bort alle n som har sifferet 9 i seg og skriver det som da gjenstår av $\mathbb{N}$ som $N(9)$, så konvergerer $\sum_{n\in N(9)} 1/n$. Jeg vet ikke hvem som først beviste det.

Hvis du har lyst til å lese mer om resultater som angår $(1/n)$ kan det være greit å vite at denne følga kalles *den harmoniske følge* (harmonic sequence på engelsk).

[2] Det finnes uendelig mange primtall.

$1+1/2+1/3+\cdots$ kalles den *harmoniske rekke* (harmonic series). Tallet $H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$ kalles det *n'te harmoniske tall.* (H_n) er altså ei monotont økende divergent følge.

Allerede franskmannen Nicole d'Oresme (1323-1382), la merke til at

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Dette gir oss et alternativt argument for at den harmoniske rekka virkelig divergerer og gjør Nicole d'Oresme til den første vi vet om som beviste at $\sum_{n\in N} \frac{1}{n} = \infty$. Legg også merke til at $H_{2n} < H_n + 1$, noe som forteller at divergensen går veldig seint.

Føler du at begynner å fatte hva ei delfølge er? Tenk deg nå at (a_n) konvergerer mot a og la (a_{n_k}) være ei delfølge. Slå et lite intervall I om a. Da er (a_n) før eller siden i I. Men siden (a_{n_k}) har uendelig mange elementer, må (a_{n_k}) også før eller siden være i intervallet I. Altså konvergerer (a_{n_k}) mot a. Vi har vist:

Hvis (a_n) konvergerer, så konvergerer enhver delfølge mot samme punktet som (a_n).

Det omvendte er selvsagt også riktig; (a_n) er jo ei av sine egne delfølger. Nå skal vi se på ei divergent følge, nemlig $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$. Lag deg nå ei delfølge ved å ta med annethvert ledd, og vips har du funnet ei konvergent delfølge. Her ser du en kraftig generalisering av dette fenomenet!

(G) (Bolzano-Weierstrass) Enhver begrensa reell følge har ei konvergent delfølge.

Gjett hvorfor jeg kalte denne setningen for (G). Jo, fordi den er enda en ekvivalent formulering av at $\mathbb{R}$ er komplett. La oss bevise det:

Bevis for at Bolzano-Weierstrass er ekvivalent til kompletthet:

Anta først (a_n) er ei begrensa reell følge. Ved kompletthet, (punkt (D)) har mengda $\{a_n\}$ et supremum s. Velg nå a_{n_1} slik at $s - a_{n_1} < 1/2$ (hvis ikke det går, kan ikke s være supremum). Velg så $n_2 > n_1$ slik at $s - a_{n_2} < 1/4$. Fortsett sånn. Da vil $a_{n_k} - s \to 0$, så $a_{n_k} \to s$. Altså har (a_n) ei konvergent delfølge.

Anta så at Bolzano-Weierstrass holder. Vi skal vise at da holder (B). La (a_n) være monotont økende og begrenset av M. Ved Bolzano-Weierstrass har (a_n) ei konvergent delfølge $(b_k) = (a_{n_k})$. La $\lim b_k = m$. Vi skal vise at $\lim a_n = m$ også. Legg først merke til at vi må ha $a_n \leq m$ for alle n ved monotoni og definisjonen av delfølge. La så $I = (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$ være et intervall om m. Siden $b_k \to m$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at alle etterfølgerne til b_N er i I. N svarer til et sted n_K i den opprinnelige følga. Siden (a_n) er monoton må alle etterfølgerne til a_{n_K} ligge til høyre for $m - \varepsilon$. Men da er jo (a_n) før eller siden i I, så $a_n \to m$.

Nå har du møtt 7 ekvivalente formuleringer av at $\mathbb{R}$ er komplett. I Oppgave 12 skal du få møte en åttende ekvivalent formulering.

1.4 Mer om kontinuitet

Vi kan nå bevise at kontinuitet er det samme som å bevare følgegrenser, altså Teorem 1.6:

Teorem 1.27. *$f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i $x = a$ hvis og bare hvis hver gang (a_n) er ei følge som konvergerer mot a, så vil følga $(f(a_n))$ konvergere mot $f(a)$.*

Bevis. Anta først f er kontinuerlig i a og at $a_n \to a$. Vi skal vise at $f(a_n) \to f(a)$. La $\varepsilon > 0$. Velg $\delta > 0$ slik at $f((x-\delta, x+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$. Velg nå N slik at $a_n \in (x-\delta, x+\delta)$ for alle $n \geq N$. Men da er $f(a_n) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, som viser at $f(a_n) \to f(a)$.

Anta så at f ikke er kontinuerlig i a. Da finnes et intervall $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ om $f(a)$ slik at ingen av intervallene $(a - 2^{-n}, a + 2^{-n})$ avbildes inn i $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. For hver n finnes altså et punkt $x_n \in (a - 2^{-n}, a + 2^{-n})$ slik at $f(x_n)$ ligger utenfor $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. $f(x_n)$ konvergerer ikke mot $f(a)$ selv om $x_n \to a$, så f bevarer altså ikke grenser i a. □

Vi setter som vanlig $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ og $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Et interessant resultat følger nå fra Teorem 1.12:

Korollar 1.28. *Mengden $C(A)$ er et vektorrom.*

Bevis. Anta f og g er kontinuerlige og la $a \in A$. La $a_n \to a$. Vi må vise at $(f + g)(a_n) \to (f + g)(a)$ og $(\lambda f)(a_n) \to (\lambda f)(a)$. Men dette følger glatt fordi

$$(f + g)(a_n) = f(a_n) + g(a_n) \to f(a) + g(a) = (f + g)(a)$$

og

$$(\lambda f)(a_n) = \lambda f(a_n) \to \lambda f(a) = (\lambda f)(a).$$

□

Se Oppgave 14 for mer informasjon om algebraisk struktur i $C(A)$.

Nå kommer en setning vi ofte bruker til å lokalisere hvor løsninger av likninger befinner seg:

Teorem 1.29. *[Skjæringssetningen] La f være kontinuerlig på $[a, b]$ og anta $f(a) < 0 < f(b)$. Da finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $f(c) = 0$.*

Bevis. La $E = \{x \in (a, b) \ : f(x) \leq 0\}$. Da er E opptil begrenset. Ved kompletthet har E et supremum. Vi skal vise at $f(\sup E) = 0$. Sett $c = \sup E$. Anta $f(c) < 0$. Da finnes $\varepsilon > 0$ slik at $f(c) + \varepsilon < 0$. Siden f er kontinuerlig i c finnes $\delta > 0$ slik at $(c - \delta, c + \delta)$ avbildes inn i $(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$. Men da er $f(c + \delta) < 0$, så c var ikke supremum likevel. Tilsvarende kan vi vise at vi ikke kan ha $f(c) > 0$ □

Se Oppgave 16 og Oppgave 17 for eksempler på bruk av Skjæringssetningen.

Teorem 1.30. *La f være kontinuerlig på $E = [a, b]$. Da er f begrensa på E.*

Bevis. Vel, hva om f ikke var begrensa. Da finnes $x_n \in E$ slik at $f(x_n) > n$, $n = 1, 2, \cdots$. Men (x_n) har, ved Bolzano-Weierstrass egenskapen til $\mathbb{R}$, ei konvergent delfølge (x_{n_k}). Siden E er lukka, må grensa a til denne delfølga ligge i E. Men nå skulle jo bildet $(f(x_{n_k}))_k$ av denne delfølga ha konvergert mot $f(a)$ siden f er kontinuerlig. På den annen side er dette umulig siden $f(x_{n_k}) > n_k$. □

Det viktige i Teorem 1.30 er at E er begrenset og komplett, som du ser bruker vi aldri at E er et intervall. Det samme er tilfelle for neste teorem også.

Teorem 1.31. *La f være kontinuerlig på $E = [a, b]$. Da finnes $y, z \in E$ slik at $f(y) = \min_{x \in E} f(x)$ og $f(z) = \max_{x \in E} f(x)$. Kort sagt: f oppnår både sitt maksimum og sitt minimum på E.*

Bevis. La $M = \sup_{x \in E} f(x)$. Vi vet at $M < \infty$ fra Teorem 1.30. La (x_n) være ei følge i E slik at $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Ved Bolzano-Weierstrass gjør vi ikke noe galt om vi likegodt antar at (x_n) er konvergent. Grensa a ligger i E. Nå må $f(a) = M$. Tilsvarende argument for minimum. □

Ved å bruke både Teorem 1.31 og Teorem 1.29 får vi dette resultatet:

Teorem 1.32. *[Den generaliserte skjæringssetningen] La f være kontinuerlig på $[a, b]$. Da oppnår f alle verdier fra og med minimum til og med maksimum.*

Bevis. Fra Teorem 1.31 følger "fra og med"og "til og med". La M og m betegne maksimumsverdien og minimumsverdien til f over $[a, b]$ hhv og la $f(x_1) = m$ og $f(x_2) = M$. Vi må vise at hvis $\alpha \in (m, M)$, så finnes $c \in [a, b]$ slik at $f(c) = \alpha$. La nå $g(x) = f(x) - \alpha$. Da er $f(x_1) < 0$ og $f(x_2) > 0$. Men da finnes etter Teorem 1.29 et $c \in (a, b)$ slik at $g(c) = 0$, dvs $f(c) = \alpha$. □

1.5 Grenseverdi for reelle funksjoner

La $f \in F(A)$ (f er altså en reell funksjon med definisjonsmengde A, se helt i starten av kapitlet) og $a \in A$. Vi vil lage presise definisjoner for å kunne avgjøre $\lim_{x \to a^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)$ og $\lim_{x \to a} f(x)$. Jeg vet ikke hvordan du tenker på dette, men jeg tenker på de *ensidige* grensene som to følgegrenser, nemlig $\lim_{n \to \infty} f(a - x_n), \lim_{n \to \infty} f(a + x_n)$ der jeg velger meg ei "nullfølge"(x_n). Så tenker jeg på $\lim_{x \to a} f(x)$ som at begge disse to følgegrensene eksisterer og er like. Har jeg rett, tro? Her kommer definisjonen av grenser:

Definisjon 1.33. *La f være en reell funksjon og la $a \in \mathbb{R}$*

- *At $\lim_{x \to a^-} f(x)$ eksisterer og er lik b betyr at for hvert intervall $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ om b finnes intervall $(a - \delta, a)$ slik at hver $x \in (a - \delta, a)$ avbildes inn i intervallet $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.*

- *At $\lim_{x \to a^+} f(x)$ eksisterer og er lik b betyr at for hvert intervall $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ om b finnes intervall $(a, a + \delta)$ slik at hver $x \in (a, a + \delta)$ avbildes inn i intervallet $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.*

- $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *hvis og bare hvis* $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ *og* $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$.

Det er praktisk med en $\varepsilon - \delta$ formulering av *tosidig* grense også. For oss blir det nå et resultat av Definisjon 1.33. La oss være enige om å kalle et intervall *punktert* dersom vi fjerner midtpunktet fra det. Og la oss skrive $(\alpha, \beta)_0$ for det punkterte intervallet fra α til β.

Proposisjon 1.34. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *hvis og bare hvis det for hvert intervall $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ om b eksisterer et punktert intervall $(a - \delta, a + \delta)_0$ slik at hver x derfra avbildes inn i $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.*

Bevis. La $\varepsilon > 0$. Velg $\delta > 0$ slik at $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ når x hentes fra det punkterte intervallet $(a-\delta, a+\delta)_0$. Denne δ'en holder til å oppfylle kravet til at $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ og $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$.

Anta så $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ og $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$. La $\varepsilon > 0$ og velg δ_1 og δ_2 slik at $(a-\delta_1, a)$ avbildes inn i $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ og $(a, a+\delta_2)$ avbildes inn i $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. La nå $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Da vil det punkterte intervallet $(a-\delta, a+\delta)_0$ avbildes inn i $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, så $\lim_{x\to a} f(x) = b$. □

Det er helt essensielt at vi opererer med punkterte intervaller rundt a. Ellers mister det geometriske bildet "når x kommer nærmere og nærmere a men stadig ikke er helt lik a"mening. Dessuten, hvis intervallene ikke var punktert, måtte $f(a)$ eksistere før en kunne snakke om $\lim_{x\to a} f(x)$, og det vil vi ikke, se Teorem 1.43.

1.5.1 Å bruke definisjonen av grense i konkrete tilfeller

Eksempel 1.35. Vi skal bruke definisjonen til å vise at $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x+2} = 2$. Vi tenker da som så: Gitt $\varepsilon > 0$. Vi må påvise $\delta(\varepsilon)$ slik at $|x| < \delta$ medfører $2 - \varepsilon < \frac{4}{x+2} < 2 + \varepsilon$, eller med andre ord, $|\frac{4}{x+2} - 2| < \varepsilon$. Vi regner litt til og får kravet $|\frac{2x}{x+2}| < \varepsilon$. Så tenker vi at hvis noe som alltid er minst så stort som $|\frac{2x}{x+2}|$ er mindre enn ε, så er i allefall $|\frac{2x}{x+2}| < \varepsilon$. Vi legger merke til at $|\frac{2x}{x+2}| < |\frac{2x}{1}| = |2x|$ hvis $|x| < 1$. Dermed, hvis vi velger $\delta = \varepsilon/2$, får vi, for $|x| < \delta$, at

$$|\frac{2x}{x+2}| < |2x| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La oss generalisere Eksempel 1.35: Anta vi skal vise at $\lim_{x\to 0} f(x) = b$. La da $\varepsilon > 0$ og finn et uttrykk for $|f(x) - b|$. Forsøk om du kan se δ slik at $|f(x) - b| < \varepsilon$ når $|x| < \delta$. Hvis ikke, finn et enklere, positivt uttrykk $g(x)$ slik at $|f(x) - b| \leq g(x)$ og bestem så δ slik at $g(x) < \varepsilon$ når $|x| < \delta$.

Hvis vi skal vise at $\lim_{x\to a} f(x) = b$, kan vi skifte variabel ved å sette $u = x - a$. Da omformes problemet til $\lim_{u\to 0} f(u) = b$, og vi kan bruke metoden vi allerede har utvikla. Eller vi kan ofte regne slik:

Eksempel 1.36. Vi vil vise at $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$. Vi ser at

$$\begin{aligned} |x^2 - 9| &= |x-3|\,|x+3| \\ &< 7|x-3| \ \text{(hvis } |x-3| < 1) \\ &< \varepsilon \ \text{(hvis også } |x-3| < \varepsilon/7). \end{aligned}$$

Så, gitt $\varepsilon > 0$, får vi hvis $|x-3| < \varepsilon/7$, at $|x^2 - 9| < \varepsilon$. Velg $\delta = \varepsilon/7$.

Vi ser at vi kan skrive definisjonen for grense på denne måten:

Proposisjon 1.37. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *hvis og bare hvis det for hvert* $\varepsilon > 0$ *eksisterer et* $\delta > 0$ *slik at* $|f(x) - b| < \varepsilon$ *hver gang* $0 < |x - a| < \delta$.

1.5.2 Funksjonsgrense og følgegrense

La oss nå starte arbeidet fram mot å teste forfatterens intuisjon av det å kople grense av funksjon mot følgegrense:

Proposisjon 1.38. *Følgende tre setninger holder:*

(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ *hvis og bare hvis* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ *for hver monotont økende følge* (x_n) *slik at* $x_n \to a$.

(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ *hvis og bare hvis* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ *for hver monotont minkende følge* (x_n) *slik at* $x_n \to a$.

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *hvis og bare hvis* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ *for hver følge* $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$ *slik at* $x_n \to a$.

Bevis. (a) Anta $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ og la $x_n \nearrow a$. La $\varepsilon > 0$ og slå intervall $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ om b. Det finnes $\delta > 0$ slik at $(a-\delta, a)$ avbildes inn i $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Siden $x_n \nearrow a$ finnes N slik at $x_n \in (a-\delta, a)$ når $n \geq N$. Bruk denne N'en.

Anta så det motsatte av at $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ holder. Da finnes et $\varepsilon > 0$ slik at det for hvert $\delta > 0$ finnes et $x_\delta \in (a-\delta, a)$ med $f(x_\delta) \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Spesielt finnes da et x_n for hver $\delta = 1/n$. Da har vi at $x_n \to a$, men $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ er i allefall ikke b. Gå til delfølge av (x_n) om nødvendig for å få $x_n \nearrow a$.

(b) Denne er veldig lik (a), bare prøv!

(c) Denne er også veldig lik (a), men vi tar den likevel: Anta $\lim_{x\to a} f(x) = b$ og la $x_n \to a$. La $\varepsilon > 0$ og slå intervall $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ om b. Det finnes $\delta > 0$ slik at det punkterte intervallet $(a-\delta, a+\delta)_0$ avbildes inn i $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Siden $x_n \to a$ finnes N slik at $x_n \in (a-\delta, a+\delta)$ når $n \geq N$. Bruk denne N'en.

Anta så det motsatte av at $\lim_{x\to a} f(x) = b$ holder. Da finnes et $\varepsilon > 0$ slik at det for hvert $\delta > 0$ finnes et $x_\delta \in (a-\delta, a+\delta)$, $x_\delta \neq a$, med $f(x_\delta) \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Spesielt finnes da et x_n for hver $\delta = 1/n$. Da har vi at $x_n \to a$, men $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ er ikke b. Vi ser også at $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

□

La oss se på en gammel kjenning som vil overbevise oss om at det er viktig å variere over *alle* følger (x_n) slik at $x_n \to a$ i Proposisjon 1.38:

Eksempel 1.39. Husker du Dirichlets funksjon fra Eksempel 1.2,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi vil studere $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. La $x_n = 1/n$ og $y_n = \sqrt{2}/n$. Da har vi at $x_n \to 0$ og $y_n \to 0$. Videre er $f(x_n) = 1$ for alle n, mens $f(y_n) = 0$ for alle n. Altså er $\lim_{n\to\infty} f(0 + x_n) = 1$ mens $\lim_{n\to\infty} f(0 + y_n) = 0$. Dermed kan vi konkludere at $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ikke eksisterer.

Intuisjonen til forfatteren er altså ikke helt riktig; det er *ikke* nok å bare velge seg *ei* spesiell nullfølge, nullfølga må være *vilkårlig.* Hvis f er kontinuerlig i a oppstår imidlertid ikke slike problemer som i Eksempel 1.39, og vi kan velge ei spesiell følge:

Proposisjon 1.40. *Følgende setninger holder dersom* f *er kontinuerlig i* a:

(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ *hvis* $\lim_{n\to\infty} f(a - \frac{1}{n}) = b$.

(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ *hvis* $\lim_{n\to\infty} f(a+\frac{1}{n}) = b$.

Bevis. (a) $\lim_{n\to\infty} f(a-\frac{1}{n}) = b$ viser oss at $f(a) = b$. Hvis det fantes ei monotont økende følge (x_n) som konvergerer mot a, men slik at konklusjonen $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ ikke holder, så kunne ikke f være kontinuerlig.

(b) Samme argument som for (a).

□

1.5.3 Grenseprosessens algebraiske egenskaper

Nå kan du bruke Proposisjon 1.38 og det du kan om følgegrenser til å bevise at grense til sum (produkt) er sum av grense (produkt). Mer presist og mer generelt har vi

Teorem 1.41. *La $f, g \in F(A)$ og la $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hvis $\lim_{x\to a^-} f(x)$ og $\lim_{x\to a^-} g(x)$ eksisterer gjelder*

(a) $\lim_{x\to a^-}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a^-} f(x) + \beta \lim_{x\to a^-} g(x)$.

(b) $\lim_{x\to a^-} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \cdot \lim_{x\to a^-} g(x)$.

Hvis i tillegg $\lim_{x\to a^-} g(x) \neq 0$, så gjelder

(c)

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a^-} f(x)}{\lim_{x\to a^-} g(x)}.$$

Tilsvarende resultat holder for høyresidige grenseverdier.

Vi kombinerer med siste punktet i Definisjon 1.33 og får

Teorem 1.42. *La $f, g \in F(A)$ og la $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hvis $\lim_{x\to a} f(x)$ og $\lim_{x\to a} g(x)$ eksisterer gjelder*

(a) $\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x)$.

(b) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.

Hvis i tillegg $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, så gjelder

(c)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

1.6 Kontinuitet og grense

Vi er klare til å vise sammenhengen mellom grense og kontinuitet (sammenlikn også med Teorem 1.27).

Teorem 1.43. *La $f \in F(A)$ og la $a \in A$. Da har vi at f er kontinuerlig i a hvis og bare hvis $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Bevis. Anta f er kontinuerlig i a. La $x_n \to a$. Ved kontinuitet vil $f(x_n) \to f(a)$. Ved Proposisjon 1.38 (c) får vi at $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Anta så at $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Da vil, igjen ved Proposisjon 1.38 (c), $f(x_n) \to f(a)$ hver gang $x_n \to a$. Men dette betyr jo nettopp kontinuitet. □

1.6.1 Litt om ulike typer diskontinuitet

Hvis $\lim_{x\to a} f(x)$ eksisterer, men grensa L ikke er lik $f(a)$, kan vi med et enkelt grep endre f til å bli kontinuerlig i a; vi simpelthen (re)definerer f i a ved å si at $f(a) = L$. I et slikt tilfelle har vi en *triviell-* eller *hevbar diskontinuitet.*

Eksempel 1.44. (i) La f være definert ved $f(x) = x$ på $A = (0, 2) \setminus \{1\}$ og $f(1) = 2$. Ved å redefinere f i $x = 1$ til $f(1) = 1$ blir f kontinuerlig på $A = (0, 2)$.

(ii) La f være definert ved $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ på $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ved å definere f i $x = 0$ til $f(1) = 1$ blir f kontinuerlig på $A = \mathbb{R}$.

Hvis problemet er at $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ sier vi at f har en *sprangdiskontinuitet* i $x = a$. Vi definerer *spranget* til f i $x = a$ ved $S_a(f) = \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)$.

Eksempel 1.45. La $f(x) = \frac{x}{|x|}$ være definert for $x \neq 0$. Vi ser at f har en sprangdiskontinuitet i $x = 0$ og at spranget er gitt ved $S_0(f) = 1 - (-1) = 2$.

Vi skal nå se på et eksempel der diskontinuiteten ikke er av de to foregående typene:

Eksempel 1.46. La $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Nå eksisterer ikke $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ fordi grafen til f hopper altfor mye opp og ned innover mot $x = 0$.

Fenomenet i Eksempel 1.46 kaller vi for *oscillasjonsdiskontinuitet.*

1.6.2 Popcornfunksjonen

Her kommer et eksempel du bør få skikkelig bakoversveis og hakeslepp av, det gjorde i allefall matematikerne da Carl Johannes Thomae kom med det på 1870-tallet.

Eksempel 1.47. Thomae har en stilig modifisering av Diricletfunksjonen fra Eksempel 1.2 og Eksempel 1.39. Den er definert slik

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \text{ og } x \text{ er på maksimalt forkortet form } \frac{p}{q} \\ 0, & \text{ellers på } (0,1) \end{cases}$$

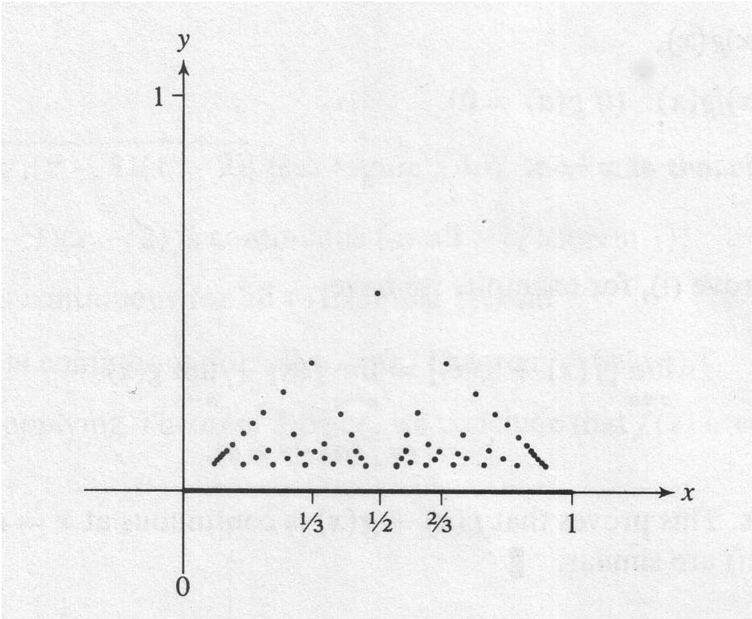
La oss regne ut noen funksjonsverdier:

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5},\ f\left(\frac{9999}{1000}\right) = \frac{1}{1000}, f\left(\frac{n\sqrt{2}}{m}\right) = 0.$$

Figur 1.1 viser en graf der f er evaluert i mange punkter. Vi skal vise det overraskende resulatet at $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ for alle $a \in (0, 1)$! Vi skal bare gjøre en forberedelse først. Ser du at f tar verdien $1/2$ bare et sted, verdien $1/3$ to steder, verdien $1/4$ to steder osv? Vi har altså at f har en funksjonsverdi $\geq 1/n$ høyst $1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ steder. Det vi trenger er bare at for hver n er $f(x) \geq 1/n$ kun endelig mange steder.

La nå $a \in (0, 1)$ og la $\varepsilon > 0$. La q være et naturlig tall så stort at $1/q < \varepsilon$. Siden $f(x) \geq 1/q$ bare endelig mange steder må det finnes et intervall $(a - \delta, a + \delta)$ slik at $f(x) < 1/q$ overalt i dette intervallet (bortsett fra muligens i punktet a selv, men det er ikke interessant siden definisjonen av grense bare har med det som skjer i det punkterte intervallet $(a - \delta, a + \delta)_0$ å gjøre). Ja, hva har vi vist? Jo, til hvert $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at det punkterte intervallet $(a-\delta, a+\delta)_0$ avbildes inn i $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Altså er $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ for alle $a \in (0, 1)$.

La oss tenke oss om, det vi nettopp har vist har en uhyggelig konsekvens, nemlig: At $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ for alle $a \in (0, 1)$ betyr at f er kontinuerlig i alle irrasjonale



Figur 1.1: Popcornfunksjonen (bildet er stjålet fra [1]).

punkter i $(0,1)$ og diskontinuerlig i alle rasjonale punkter. Forestillingen om at grense og kontinuitet er enkle begreper bør være død og begravet en gang for alle med dette eksemplet.

Popcornfunksjonen lyder også navnet Thomaes funksjon, regndråpefunksjonen og linjalfunksjonen. Jeg synes popcornfunksjonen er det morsomste av disse, og har derfor valgt det.

Et spørsmål melder seg: Hvor ofte kan en funksjon på $(0,1)$ være diskontinuerlig. Enda oftere? Eller er vi nærheten av det "styggeste" som fins? Uansett, vi trenger måter å måle *ofte* og *mange* på. Vi starter der i neste kapittel. Men først skal vi avslutte dette kapitlet med en seksjon der vi skal krabbe opp på et fjell og se utover det vi har gjort så langt.

1.7 Metrikker og metriske rom

Vi starter med to eksempler:

Eksempel 1.48. Tenk deg mengden av funksjoner definert fra planet $\mathbb{R}^2$ og inn i de reelle tall $\mathbb{R}$. Hvis vi ville justere Definisjon 1.3 til slike funksjoner, kunne vi si:

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kalles kontinuerlig i punktet $(x,y) = (a,b)$ dersom det er slik at hver gang vi slår et intervall $I_y = (f(a,b) - \varepsilon, f(a,b) + \varepsilon)$ om $f(a,b)$, så finnes en sirkelskive $S_{(a,b)}$ om $(x,y) = (a,b)$ slik at $f(S_{(a,b)}) \subset I_y$. Hvis f er kontinuerlig for alle $(a,b) \in A$, kalles f kontinuerlig på A.

Og hva med konvergens av følger i planet? La oss fikse Definisjon 1.10 slik at den passer i $\mathbb{R}^2$:

Vi sier at følga $(\mathbf{x}_n) = (a_n, b_n)_n$ *av punkter i planet konvergerer mot punktet* $\mathbf{a} = (a, b)$ *i planet dersom* $(\mathbf{x}_n)$ *før eller siden er i en hver sirkelskive om* $\mathbf{a}$*, uansett hvor liten radien er.*

Med disse definisjonene holder argumentasjonen for at ei følge er konvergent nøyaktig når den er Cauchy hvis bare vi tilpasser definisjonen av det å være Cauchy:

$(\mathbf{x}_n)$ *er Cauchy hvis det for alle* $\varepsilon > 0$ *finnes et* N *slik at når* n *og* m *begge er minst* N*, så er* $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$*.*

Dermed har vi altså Teorem 1.21 hvis vi postulerer at planet er komplett. Ja, hva tror du, er planet komplett? Ja, og argumentet er omtrent slik: Anta $(\mathbf{x}_n) = (a_n, b_n)_n$ er Cauchy. At $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$ betyr jo at $\sqrt{(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2} < \varepsilon$. Men da må de reelle følgene (a_n) og (b_n) være Cauchy hver for seg. Siden $\mathbb{R}$ er komplett konvergerer da (a_n) og (b_n) hver for seg, la oss si til a og b. Da konvergerer $(\mathbf{x}_n) = (a_n, b_n)_n$ til punktet (a, b). Tilsvarende argument gir at $\mathbb{R}^n$ er komplett.

At Bolzano-Weierstrass holder i $\mathbb{R}^2$ (og $\mathbb{R}^n$) er mye vanskeligere å bevise, men en kan vise det også.

Teorem 1.6 får et helt analogt bevis, dermed har vi at reelle funksjoner i planet er kontinuerlige nøyaktig når de bevarer grenser. Analogien til Teorem 1.30 er at hvis f er kontinuerlig på ei komplett og begrensa delmengde av planet, så er f begrensa. På slike mengder oppnår kontinuerlige funksjoner også sitt max og sitt min, beviset er helt likt beviset for Teorem 1.31.

Å utvide teorien til reelle funksjoner i planet er ganske enkelt, bortsett fra på ett punkt, nemlig å vise at Bolzano-Weierstrass egenskapen holder.

Et tilsynelatende helt ulikt eksempel:

Eksempel 1.49. Tenk deg at du har en reell, kontinuerlig funksjon f definert på intervallet $[a, b]$ og la $\varepsilon > 0$. Er det ikke da sånn at hvis du tar en kontinuerlig funksjon g med graf som ikke avviker mer enn $\varepsilon/|b - a|$ (i y-verdi noe sted), så vil integralenes verdi ikke avvike mer enn ε? Likner ikke dette veldig på Definisjon 1.5?

La oss formalisere likheten litt mer, la $F : C[a, b] \to \mathbb{R}$ være definert ved $F(\phi) = \int_a^b \phi\, dx$ og la avstanden mellom to elementer ϕ og ψ i $C[a, b]$ være gitt ved største distanse mellom grafene, altså $\sup_{x \in [a,b]} |\phi(x) - \psi(x)|$. La oss skrive denne avstanden som $d(\phi, \psi)$.

Nå blir setningen som minner om Definisjon 1.5 slik: For alle $\varepsilon > 0$, finnes $\delta > 0$ (nemlig $\delta = \varepsilon/|b - a|$) slik at hvis $d(f, g) < \delta$, så er $|F(f) - F(g)| < \varepsilon$. Likheten ble ikke mindre nå, akkurat, hva? Og legg merke til at dette også er likt definisjonen av kontinuitet i planet fra Eksempel 1.48 om vi der setter $d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$.

Jeg synes vi har bevist noe i retning av at *Integralet er en kontinuerlig funksjon på* $C[a, b]$ *når vi måler avstand i* $C[a, b]$ *ved største avstand mellom grafer.*

Griper vi denne måten å tenke på ser vi at følgende mulighet står fram fra Eksempel 1.48 og Eksempel 1.49:

Gitt ei mengde E *med en fornuftig måte å måle avstander på. Da kan vi etterape definisjon av kontinuitet og konvergens. Fornuftig må bety at i allefall det sentrale Teorem 1.6 holder, slik at vi kan kople kontinuitet og konvergens. Har vi i tillegg Bolzano-Weierstrass egenskap, så kan vi håpe på analogier av Teorem 1.30 og Teorem 1.31 også.*

Det tok ei stund før folk begynte å forfølge denne ideen, men David Hilbert hadde grepet den før vi skrev 1900. Også andre jobba med å finne fram til gode målemetoder. Maurice Fréchet la fram en kanonbra doktoravhandling i 1906. Her dukker begrepet metrikk opp. Og metrikk er målemetoden som nettopp gjør at vi bare kan etterape teorien for funksjoner og følger på $\mathbb{R}$.

Definisjon 1.50. *La E være ei mengde. En* metrikk *på E er en funksjon $d : E \times E \to \mathbb{R}$ slik at*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *for alle* $x, y \in E$.

(ii) $d(x, y) = 0$ *hvis og bare hvis* $x = y$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ *for alle par* $x, y \in E$.

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *for alle tripler* $x, y, z \in E$.

$d(x, y)$ *kalles* distansen *eller* avstanden *mellom x og y. Mengda E sammen med metrikken d kalles et* metrisk rom *og vi skriver dette (X, d).*

1.7.1 To viktige metriske rom

Når du prøver å vise at avstandsmålene vi brukte i Eksempel 1.48 og Eksempel 1.49 er metrikker, oppdager du at (i), (ii) og (iii) er helt opplagte i begge tilfeller. Det er *den generaliserte trekantulikheten* (iv) som er problemet å vise. Når det gjelder avstandsmålet i $\mathbb{R}^2$ (eller for den saks skyld i et generelt indreproduktrom) er dette et resultat i lineær algebra. Når det gjelder avstandsmålet vårt i $C[a, b]$, så er argumentet basert på den vanlige trekantulikheten som gir

$$|f(t) - h(t)| = |f(t) - g(t) + g(t) - h(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|$$

for alle t. Dermed får vi at

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t) - h(t)| \leq \sup_{t \in [a,b]} \{|f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|\}.$$

Men tenker vi oss om (og det skal vi jo) så ser vi at

$$\sup_{t \in [a,b]} \{|f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|\} \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| + \sup_{t \in [a,b]} |g(t) - h(t)|,$$

og dermed får vi

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h) \text{ for alle tripler } f, g, h \in C[a, b].$$

Nå har vi argumentert for at $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ og $(C[a, b], \sup_{x \in [a,b]} f(x))$ blir eksempler på metriske rom.

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ og $(C[a, b], \sup_{x \in [a,b]} f(x))$ har mye mer struktur enn det som kreves av et metrisk rom: De er vektorrom, og avstandsmålene oppfyller lover som knytter dem tett til den algebraiske strukturen. Legg merke til at i et generelt metrisk rom er det ikke forutsatt at det skal finnes noen algebraisk struktur i det hele tatt. Kun mengda E og avstandsmålet d er involvert. Dermed har ikke Teorem 1.12 noen analogi i et generelt metrisk rom, da trenger vi nettopp å koble avstandsmålet til vektorromsstrukturen.

Alt vi har sagt om $\mathbb{R}^2$ her er også sant for $\mathbb{R}^n$.

1.7.2 Kontinuitet, kompletthet og grense

Vi setter opp definisjoner for kontinuitet, konvergens, Cauchyfølge og kompletthet i metriske rom:

Definisjon 1.51. *La (E, d) være et metrisk rom.*

- **Kontinuitet:** *$f : E \to \mathbb{R}$ kalles kontinuerlig i punktet $a \in E$ dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes et $\delta > 0$ slik at hvis $d(x, a) < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*
- **Konvergens:** *Følga $(a_n) \subset E$ konvergerer mot $a \in E$ dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes et N slik at når $n \geq N$ så er $d(a_n, a) < \varepsilon$.*
- **Cauchyfølge:** *Følga $(a_n) \subset E$ kalles Cauchy dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes et N slik at når $n, m \geq N$ så er $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.*
- **Kompletthet:** *Det metriske rommet (E, d) kalles komplett dersom alle Cauchyfølger av elementer fra E har grense i E*

Nå viser vi Teorem 1.21 og 1.43 for metriske rom.

Teorem 1.52. *Ei følge i et komplett metrisk rom konvergerer hvis og bare hvis den er Cauchy.*

Bevis. Anta (x_n) konvergerer mot $a \in E$. La $\varepsilon > 0$. Velg N slik at etterfølgerne til x_N oppfyller $d(x_n, a) < \varepsilon/2$. La nå $n, m \geq N$. Da er $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) = d(x_n, a) + d(x_m, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Legg merke til at vi brukte (iii) og (iv) fra definisjonen av metrikk. Anta så at (x_n) er Cauchy. Siden E er komplett finnes da et punkt $a \in E$ med $x_n \to a$. $\square$

Teorem 1.53. *La (E, d) være et metrisk rom og la $a \in E$. $f : E \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i a hvis og bare hvis $f(x_n) \to f(a)$ hver gang $x_n \to a$.*

Bevis. Vi etteraper beviset for Teorem 1.27: Anta $f : E \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i a og at $x_n \to a$. La $\varepsilon > 0$. Siden f er kontinuerlig i a finnes $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ når $d(x, a) < \varepsilon$. Velg nå N slik at etterfølgerne til x_N oppfyller $d(x_n, a) < \varepsilon$. Da vil etterfølgerne til $f(x_N)$ oppfylle $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Med andre ord, $f(x_n) \to f(a)$.

Anta så at f ikke er kontinuerlig i a. Da finnes et $\varepsilon > 0$ slik at ingen $\delta > 0$ er liten nok til å sikre at $d(x, a) < \delta$ medfører $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Spesielt, for hver n finnes et x_n med $d(x_n, a) < 1/n$ men $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$. Det gjenstår å bevise at $x_n \to a$. For å vise det, la $\varepsilon > 0$. Velg N slik at $1/N < \varepsilon$. Hvis $n \geq N$ gjelder da $d(x_n, a) \leq 1/n < \varepsilon$, så det er ingen tvil om at $x_n \to a$. $\square$

Når vi har snakka om grense for ei følge har vi bare tatt for gitt at denne er entydig. Kanskje vi burde forsikre oss om at dette virkelig er sånn? Anta $x_n \to a$ og $x_n \to b$ i det metriske rommet (E, d). Da er $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b)$ for alle n. La nå $\varepsilon > 0$. Velg N så stor at både $d(x_n, a) < \varepsilon/2$ og $d(x_n, b) < \varepsilon/2$. Dette viser at $d(a, b) < \varepsilon$. Siden dette går for alle $\varepsilon > 0$, er eneste muligheten at $d(a, b) = 0$. Men da gir (ii) i Definisjon 1.50 at $a = b$. Vi arkiverer denne observasjonen:

Proposisjon 1.54. *I et metrisk rom er alltid grenser for følger entydige.*

1.7.3 Bolzano-Weierstrass teorem for metriske rom

Vi husker at i $\mathbb{R}$ var det ikke veldig vanskelig å vise at kompletthet medfører at hver begrenset følge har ei konvergent delfølge. I generelle metriske rom er faktisk ikke dette resultatet sant lenger. Men for $\mathbb{R}^n$ er det sant. La oss bare først være enige om at ei følge i $\mathbb{R}^n$ er begrensa hvis den er inneholdt i et multiplum av enhetskula, B_n, der

$$B_n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\}.$$

Teorem 1.55. *[Bolzano-Weierstrass] I det komplette metriske rommet $\mathbb{R}^n$ har alle begrensa følger ei konvergent delfølge.*

Bevis. Vi skal gi ei skisse av beviset i $\mathbb{R}^2$. Vi gjør ikke noe galt om vi antar følga $(x_n) \subset B_2$. (At (x_n) er begrensa betyr $(x_n) \subset M \cdot B_2$ for en eller annen $M < \infty$. Nå er følga $(x_n/M) \subset B_2$. Hvis (y_n) er konvergent delfølge av (x_n/M), så er $(M \cdot y_n)$ konvergent delfølge av (x_n).)

La $y_1 = x_1$ og dekk B_2 med et endelig antall skiver av radius 1/2. Minst ei av disse skivene må inneholde uendelig mange medlemmer av (x_n). Velg ei skive S_1 med denne egenskapen og la y_2 være første x_n etter y_1 som er med i S_1. Dekk nå S_1 med endelig mange skiver av radius 1/4. Minst ei av disse skivene må inneholde uendelig mange medlemmer av (x_n). Velg ei skive S_2 med denne egenskapen og la y_3 være første x_n etter y_2 som er med i S_2. Fortsett sånn. Da står vi igjen med ei delfølge (y_n) av (x_n) der hele tida etterfølgerne til y_m ligger i ei skive med radius $1/2^m$. (y_n) er konvergent. □

Matematikerne har funnet ut hvilke ekstrakrav som må til for at følger i metriske rom skal ha konvergente delfølger, og kikker du på beviset for Teorem 1.55 så ser du at det som får argumentet til å virke er at vi hele tiden kan dekke mengda som følga ligger inni med *endelig* mange skiver, uansett hvor små de er. Ei skive om x i et generelt metrisk rom E er ei mengde av typen $S_x^\varepsilon = \{y \in E : d(y,x) \leq \varepsilon\}$. Vi kaller mengder med denne egenskapen *totalt begrensa* mengder. La oss si at ei begrensa delmengde A av det metriske rommet (E,d) har *Bolzano-Weierstrass egenskap* dersom hver følge i A har ei konvergent delfølge, dvs ei delfølge som konvergerer i A. Vi har nå argumentert for halvparten av følgende setning:

Teorem 1.56. *Mengder i metriske rom har Bolzano-Weierstrass egenskap nøyaktig dersom de er komplette og totalt begrensa.*

Hvis du har lyst til å bevise det som mangler av Teorem 1.56, kan du forsøke deg på Oppgave 34.

Vi vet at $C[0,1]$ er et metrisk rom. La oss vise at for dette rommet gjelder ikke Bolzano-Weierstrass' teorem. Senere skal vi bevise at $C[0,1]$ er komplett, så det er ikke det som er problemet.

Eksempel 1.57. I det metriske rommet $C[0,1]$ måler vi distansen mellom to funksjoner ved $\sup_{[0,1]} |f(x) - g(x)|$, altså "største" avstand mellom grafene. La følga (f_n) være gitt ved

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } x \in [0, 1-\frac{1}{n}) \\ \text{lineært stigende fra 0 til 1} & \text{når } x \in [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}] \\ 0 & \text{når } x \in (1-\frac{1}{n+1}, 1] \end{cases}$$

Nå vil (f_n) være begrensa fordi $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$ for alle n. Vi har laget følga slik at uansett hvilke to f_n og f_m vi plukker ut, så vil $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| = 1$. Hvorfor det? Jo, la oss si at $n > m$. Da er $f_n(x) = 0$ på et stykke av $(0,1)$ der f_m reiser seg fra 0 til 1. Altså er differensen mellom to vilkårlige elementer i følga lik 1. Det samme må gjelde for en hvilken som helst delfølge. Altså er ingen av delfølgene Cauchy, og dermed ikke konvergente heller.

Vi runder av med å bevise generelle versjoner av Teorem 1.30 og Teorem 1.31.

Ei mengde A i et metrisk rom (X,d) kalles begrensa hvis det finnes et $M < \infty$ slik at $d(x,y) \leq M$ for alle $x, y \in X$. La oss si at ei begrensa delmengde A av det metriske rommet (E,d) har *Bolzano-Weierstrass egenskap* dersom hver følge i A har ei konvergent delfølge, dvs ei delfølge som konvergerer i A.

Teorem 1.58. *La (E,d) være et metrisk rom og la f være kontinuerlig på A, der A er begrensa og har Bolzano-Weierstrass egenskap. Da er f begrensa på A.*

Bevis. Vel, hva om f ikke var begrensa. Da finnes $x_n \in A$ slik at $f(x_n) > n$, $n = 1, 2, \cdots$. Men (x_n) har, ved Bolzano-Weierstrass' egenskap, ei konvergent delfølge (x_{n_k}). Men nå skulle jo bildet $(f(x_{n_k}))_k$ av denne delfølga ha konvergert mot $f(a)$ siden f er kontinuerlig. På den annen side er dette umulig siden $f(x_{n_k}) > n_k$, så $(f(x_{n_k}))_k$ er ubegrensa. □

Teorem 1.59. *La f være kontinuerlig på A, der A er begrensa og har Bolzano-Weierstrass egenskap. Da finnes $y, z \in A$ slik at $f(y) = \min_{x\in A} f(x)$ og $f(z) = \max_{x\in A} f(x)$. Kort sagt: f oppnår både sitt maksimum og sitt minimum på A.*

Bevis. La $M = \sup_{x\in A} f(x)$. Vi vet at $M < \infty$ fra Teorem 1.58. La (x_n) være ei følge i A slik at $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Ved Bolzano-Weierstrass egenskapen til A finnes konvergent delfølge (x_{n_k}). Denne oppfyller $f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}$. Grensa a ligger i A. Nå må $f(a) = M$. Tilsvarende argument for minimum. □

1.8 Oppgaver

Oppgave 1. (a) La $A = \{1,2,3\}$ og $B = \{1,2\}$. Hvor mange elementer har $F(A,B)$?

(b) La A ha n elementer og B ha m elementer. Hvor mange elementer har $F(A,B)$?

Oppgaver til Seksjon 1.1

Oppgave 2. (a) La $A = (0,1]$ og $f(x) = 1/x$. For hvilke x er f kontinuerlig?

(b) La $a_1 = 1/4$ og $a_2 = 1/2$. La $\varepsilon = 1/8$. I hvilket av punktene a_1 og a_2 trenger du minst δ?

(c) Vi skal fortsette ideen fra (b). La fortsatt $\varepsilon = 1/8$. Forklar at det ikke finnes noen δ som virker for alle $a_2 \in (0,1)$ samtidig.

Oppgave 3. (a) Vis ved å bruke Definisjon 1.3 eller 1.5 at lineære funksjoner er kontinuerlige.

(b) Vis også, ved å bruke definisjon av kontinuitet, at andregradspolynomer er kontinuerlige. Legg merke til at det ikke var så lett å finne δ nå. Dette motiverer å ha alternative metoder for å sjekke kontinuitet, slik som Teorem 1.6.

Oppgave 4. Vis at hvis f er kontinuerlig i $x = a$ og $f(a) > 0$, så finnes det et intervall om a der f er positiv.

Oppgaver til Seksjon 1.2

Oppgave 5. (a) La $f(x) = 2^{-x}$. Finn den tilhørende følga.

(b) Se på følga $1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \cdots$. Finn den tilhørende funksjonen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Oppgave 6. Bruk metoder slik som beskrevet etter Eksempel 1.11 til å vise at:

$$\text{(a)}\ \frac{1}{2n-9} \to 0 \qquad \text{(b)}\ \frac{2n+5}{n+2} \to 2 \qquad \text{(c)}\ \frac{(-1)^n}{n^2+3} \to 0$$

$$\text{(d)}\ \sqrt{1-\frac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{(e)}\ \frac{n^2}{2^n} \to 0 \qquad \text{(f)}\ \frac{n^2+1}{2n^2-5} \to \frac{1}{2}$$

Oppgave 7. Vis at ei konstant følge (altså $a_n = c$ for alle n) er konvergent.

Oppgave 8. Undersøk om du kan bruke Teorem 1.12 til å beregne noen av grensene i Oppgave 6.

Oppgave 9. Forsøk å vise at følgene i Oppgave 6 er Cauchyfølger. Legg merke til at det ikke er så enkelt å vise at konkrete følger er Cauchy.

Oppgaver til Seksjon 1.3

Oppgave 10. Bestem supremum og infimum til følgende delmengder av $\mathbb{R}$.

$$\text{(a)}\ (0,1] \qquad \text{(b)}\ (0,1) \qquad \text{(c)}\ \{\tfrac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{(d)}\ \{1-\tfrac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\text{(e)}\ (0,1)\cap\mathbb{Q} \qquad \text{(f)}\ \{\frac{(-1)^n}{n^2+3}\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{(g)}\ \{\frac{n^2}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{(h)}\ \{\frac{n^2+1}{2n^2-5}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

I hvilke tilfeller er supremum lik maksimum, og infimum lik minimum?

Oppgave 11. La oss gå tilbake til det tilsyneslatende håpløse Eksempel 1.20 og heller forsøke å vise at $((1+\frac{1}{n})^n)$ er opptil begrensa og monotont økende. Da gir Teorem 1.24 (B) at følga konvergerer.

(a) Bruk binomialteoremet til å vise at $(1+\frac{1}{n})^n \leq 3$.

(b) Bruk binomialteoremet til å skrive ut $(1+\frac{1}{n})^n$ på formen

$$2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

(c) Se nøye på utregningen din i (b) og tenk på hvordan tilsvarende uttrykk for $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ ville se ut. Forklar at $x_{n+1} > x_n$.

Oppgave 12. La (x_n) være ei følge og I et intervall. Vi sier at (x_n) er *til stadighet* i I dersom det for alle $n \in \mathbb{N}$ finnes et $k(n) \geq n$ slik at $x_{k(n)} \in I$.

(a) Forklar at (x_n) er til stadighet i I hvis og bare hvis (x_n) har ei delfølge som i sin helhet ligger i I.

(b) La $a \in \mathbb{R}$ og anta (x_n) har ei delfølge som konvergerer mot a. Forklar at da er (x_n) til stadighet i et hvert intervall om a.

(c) Anta så at $a \in \mathbb{R}$ og at (x_n) til stadighet er i et hvert intervall om a. Hva kan du konkludere?

(d) Formuler resultatene fra (b) og (c) til et "hvis og bare hvis teorem".

La $A \subset \mathbb{R}$ og la $a \in \mathbb{R}$ (ikke nødvendigvis i A). a kalles et *grensepunkt* for A dersom hvert intervall om a inneholder et element fra A.

(d) Forklar at a er et grensepunkt for (x_n) hvis og bare hvis (x_n) har ei delfølge som konvergerer mot a.

(e) Formuler Bolzano-Weierstrass egenskapen ved hjelp av begrepet grensepunkt.

(f) Vis at vi har denne ekvivalente formuleringen av kompletthet også:

(H) Hver begrensa uendelig $A \subset \mathbb{R}$ har et grensepunkt.

Oppgave 13. Vi vil bevise at for hvert reelt tall x finnes et naturlig tall n slik at $n > x$. Gjennom punktene under skal du få litt hjelp til beviset.

(a) Anta at $n \leq x$ for alle $n \in \mathbb{N}$. La $x_n = n$ og dann følga (x_n). Forklar at (x_n) konvergerer.

(b) Men $x_{n+1} = 1 + x_n$. Kan (x_n) være Cauchy?

(c) Konkluder.

Oppgaver til Seksjon 1.4

Oppgave 14. Vi setter $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Et vektorrom, der det også finnes en veldefinert multiplikasjon, kalles en algebra.

(a) Vis at $C(A)$ er en algebra.

(b) La $P(A)$ være polynomene. Forklar at $P(A)$ er en algebra ekte inneholdt i $C(A)$.

Vi skal senere kommentere mer om hvordan det ser ut inni $C(A)$.

Oppgave 15. Vi skal vise at forutsetningene i noen av teoremene er viktige:

(a) La $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = x - [x]$ (der $[x]$ er heltallsfunksjonen, dvs største heltall $\leq x$). Vis at f er begrensa, men at f ikke oppnår maksimumsverdi på $[0, 2]$.

(b) La $f(x) = x$ på intervallet $(0, 1)$. Forklar at f oppnår verken max eller min på $(0, 1)$.

(c) La $f(x) = 1/x$ på $(0, 1)$. Forklar at f er kontinuerlig på $(0, 1)$, men likevel ikke begrensa.

Oppgave 16. Vi skal se bruk av Teorem 1.29:

(a) La p være et polynom av 3. grad. Forklar først at det finnes a og b slik at $p(a) < 0$ og $p(b) > 0$. Vis så at alle tredjegradspolynom må ha minst en reell rot.

(b) Utvid resultatet i (a) til polynomer av odde grad.

Oppgave 17. Vi skal bruke Teorem 1.29 til å bevise at *Hvis f er en kontinuerlig funksjon på $[0, 1]$ og $0 \leq f(x) \leq 1$ for alle $x \in [0, 1]$, så har likninga $f(x) = x$ en løsning i $[0, 1]$:*

(a) Hvorfor er dette bare interessant når $f(0) \neq 0$ og $f(1) \neq 1$?

(b) Sett $g(x) = f(x) - x$. Forklar at g er kontinuerlig på $[0, 1]$ og at (a) gir $g(0) > 0$ og $g(1) < 0$.

(c) Fullfør nå beviset.

(d) Bruk resultatet på likninga $3x = e^x$.

Oppgaver til Seksjon 1.5

Oppgave 18. I denne oppgava skal du bruke definisjonen av grense til å vise noen konkrete grenser. Kanskje du har hjelp av eksemplene i Delseksjon 1.5.1.

(a) $\lim_{x\to 0}(x+1)^3 = 1$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{4}{x+2} = 2$ (c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2} = 2$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|} = 0$ (e) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1+x} = 0$ (f) $\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Oppgave 19. Undersøk om du kan utnytte Teorem 1.42 til å vise noen av grensene i Oppgave 18.

Oppgave 20. Vi skal se på hva som skjer med $f(x) = \sqrt{|x|}$ nær $x = 0$.

(a) Lag en skisse av grafen til f i området $[-1, 1]$.

(b) Gjett grensa.

(c) Bevis at gjetningen din i (b) er riktig.

Oppgave 21. Vis at hvis $\lim_{x\to a} f(x) = b$, så finnes det et punktert intervall om a der f er begrensa.

Oppgave 22. Anta du vet at $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

(a) Vis at da er $\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|$.

(b) Vis at $\lim_{x\to a}(f(x))^2 = b^2$.

(c) Anta videre at $b > 0$. Vis at $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{b}$.

(d) Både (a), (b) og (c) er spesialtilfeller av følgende resultat:

Hvis $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *og* g *er kontinuerlig i* b*, så er* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$*.*

Bevis dette resultatet.

(e) Undersøk om du kan bruke resultatet i (d) til å vise noen av grensene i Oppgave 18.

Oppgaver til Seksjon 1.6

Oppgave 23. I denne oppgava skal du lage noen eksempler.

(a) Lag en funksjon f slik at $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, men f er diskontinuerlig i $x = 1$.

(b) Lag en funksjon f slik at $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 = f(1)$, men f er diskontinuerlig i $x = 1$.

(c) Lag en funksjon f, definert på $\mathbb{R}$ slik at f er diskontinuerlig i hvert oddetall, men kontinuerlig ellers.

(d) Lag en funksjon f slik at $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ikke eksisterer på grunn av oscilasjon.

Oppgave 24. Lag en funksjon f slik at $S_2(f) = 1$.

Oppgave 25. Se på vektorrommet $F(A)$, der $A \subset \mathbb{R}$. La $a \in A$ og se på $S_a(f)$ som en reell funksjon på $F(A)$.

(a) Vis at S_a er lineær, dvs $S_a(f+g) = S_a(f) + S_a(g)$ og $S_a(t \cdot f) = t \cdot S_a(f)$.

(b) La $V = \{f \in F(A)\ : S_a(f) = 0\}$. Beskriv V med ord.

(c) Forklar at V er et vektorrom.

Oppgave 26. La f være Popcornfunksjonen. Vi vet at for hver n er $f(x) \geq 1/n$ kun endelig mange steder.

(a) Lag en tabell som viser hvor mange steder $f(x) = 1/n$ og hvor mange steder $f(x) \geq 1/n$ for hver $n = 2, 3, \cdots 10$.

(b) Forklar at når n er et primtall, så er $f(x) = 1/n$ nøyaktig $n - 1$ ganger.

(c) Forklar at når n er et partall, så er $f(x) = 1/n$ høyst $n/2$ ganger.

Oppgaver til Seksjon 1.7

Oppgave 27. Vi skal se litt på konvergens i planet.

(a) Vis at hvis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er ei reell følge som konvergerer til $a \in \mathbb{R}$, så vil $((a_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergere til $(a, 0)$ i planet.

(b) Utvid resultatet i (a) til situasjonen $a_n \to a$ og $b_n \to b$.

(c) Argumenter for at $(a_n, b_n) \to (a, b)$ hvis og bare hvis $a_n \to a$ og $b_n \to b$.

(d) Hva tror du matematikerne mener nå de sier at ei følge i $\mathbb{R}^n$ konvergerer hvis og bare hvis den konvergerer koordinatvis?

Oppgave 28. Vi skal gi planet en litt annen metrikk enn den Euklidske i Oppgave 27. Vi setter $d_1((x, y), (a, b)) = |x - a| + |y - b|$. La oss skrive den Euklidske metrikken d_2.

(a) Bestem alle punkter i planet som oppfyller $d_1((x, y), (0, 0)) \leq 1$.

(b) Vis at d_1 virkelig er en metrikk.

(c) Hvordan ser ei mengde av punkter som oppfyller $d_1((x, y), (1, 1)) < \varepsilon$ ut?

(d) Tegn tilsvarende som i (c) for Euklidsk metrikk, d_2.

(e) Bruk figurene fra (c) og (d) til å argumentere for at det er de samme følgene som konvergerer i de to metrikkene, d_1 og d_2.

Oppgave 29. Her kommer enda en metrikk i planet: Definer $d_\infty((x, y), (a, b)) = \max\{|x - a|, |y - b|\}$

(a) Bestem alle punkter i planet som oppfyller $d_\infty((x, y), (0, 0)) \leq 1$.

(b) Vis at d_∞ virkelig er en metrikk.

(c) Hvordan ser ei mengde av punkter som oppfyller $d_\infty((x, y), (1, 1)) < \varepsilon$ ut?

(d) Tegn tilsvarende som i (c) for d_1 og d_2 metrikker (se Oppgave 28).

(e) Bruk figurene fra (c) og (d) til å argumentere for at det er de samme følgene som konvergerer i alle de tre metrikkene, d_1, d_2 og d_∞.

Oppgave 30. Vi skal ta en tur inn i $C[0, 1]$ og måle $d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

(a) Finn noen eksempler på funksjoner slik at $d(f, 0) = 1$. Sett

$$B_{C[0,1]} = \{f \,:\, \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1\}.$$

(b) La $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$. Forklar at både f og g er elementer av $B_{C[0,1]}$. Finn $d(f, g)$.

(c) Vis at denne metrikken har egenskapen $d(\lambda f, 0) = |\lambda| \cdot d(f, 0)$ for alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) I et vektorrom definerer vi midtpunktet mellom to punkter u og v som $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ (tegn!). La $f(x) = 1$ og $g(x) = -1 + 2x$. Vis at både f og g er medlemmer av $B_{C[0,1]}$ og vis at midtpunktet mellom f og g er funksjonen $h(x) = x$.

(e) Forklar at den konstante funksjonen $f(x) = 1$ ikke kan være midtpunkt mellom to andre funksjoner i $B_{C[0,1]}$.

Oppgave 31. La $a < 1$ og ta en tur inn i $C[-a, a]$. Vi måler som vanlig $d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

(a) La følga (f_n) være gitt i $C[-a, a]$ ved at $f_n(x) = x^n$. Tegn grafene for $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Forklar at for alle n gjelder $d(f_n, 0) = f_n(a) = a^n$.

(c) Forklar at $\lim_n f_n = 0$ i denne metrikken.

Oppgave 32. Vi skal gi $C[0, 1]$ en alternativ metrikk: Sett

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

(a) Finn noen eksempler på funksjoner slik at $d_1(f, 0) = 1$. Sett

$$B^1_{C[0,1]} = \{f\ : \int_0^1 |f(x)| \le 1\}.$$

(b) La $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$. Forklar at både f og g er elementer av $B^1_{C[0,1]}$. Finn $d_1(f, g)$. Forklar rent geometrisk hva det er d_1 måler.

(c) La metrikken d være som i Oppgave 31. Forklar at $d_1(f, g) \le d(f, g)$ for alle $f, g \in C[0, 1]$.

(d) La

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & x \in [0, 1/n] \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Anta $n > m$. Vis at $d_1(f_n, f_m) = \frac{n-m}{2m^2}$. Argumenter for at (f_n) er Cauchy målt i d_1-metrikk.

(e) Hva blir $d(f_n, f_m)$? Forklar at (f_n) ikke er Cauchy i d-metrikk.

(f) Forklar at $C[0, 1]$ ikke er komplett i d_1-metrikk. (Vi skal senere vise at $C[0, 1]$ er komplett i d-metrikk.)

Oppgave 33. Vis at $B_{C[0,1]}$ (se Oppgave 30) ikke er totalt begrensa. (Hint: Bruk følga i Eksempel 1.57 og slå kuler rundt hver f_n med radius $1/2$.)

Oppgave 34. Vi skal forsøke å bevise resten av Teorem 1.56, dvs vi skal bevise at *Bolzano-Weierstrass egenskap medfører kompletthet og total begrensethet.*

(a) Vi skal vise den kontrapositive setningen, så formuler den setningen for mengda A i det metriske rommet (E, d).

(b) Anta først A ikke er komplett. Forklar at det da finnes ei Cauchyfølge (x_n) i A som ikke konvergerer.

(c) Forklar så at ingen av delfølgene til (x_n) kan konvergere heller.

(d) Anta nå at A ikke er totalt begrensa. Forklar at det da må finnes et $\varepsilon > 0$ slik at A ikke kan dekkes med endelig mange skiver av radius ε. (Ei skive om $x \in E$ er ei mengde av typen $S^\varepsilon_x = \{y \in E\ : d(y, x) \le \varepsilon\}$.)

(e) Velg nå $x_1 \in E$ og plukk $x_2 \in E$ utenfor $S^\varepsilon_{x_1}$. Forklar at $d(x_1, x_2) \ge \varepsilon$.

(f) Velg nå x_3 utenfor $S^\varepsilon_{x_1} \cup S^\varepsilon_{x_2}$. Forklar at x_3 ligger minst ε fra både x_1 og x_2.

(g) Fullfør beviset nå.

Litteratur

[1] Colin Clark, *Elementary Mathematical Analysis, 2. ed.* Wadsworth Publishers of Canada, 1982.

[2] W. Rudin, *Principles of Mathemaical Analysis, 3. ed.* McGraw-Hill, 1976.

Kapittel 2

Små og store mengder

De reelle tall $\mathbb{R}$ er konstruert slik at brøkene $\mathbb{Q}$ blir liggende som en stor delmengde i en viss forstand. Jeg har allerede fortalt deg at Cantor og Dedekind konstruerte en komplett tallkropp ved å utvide $\mathbb{Q}$. Det jeg ikke har fortalt deg er at denne tallkroppen faller sammen med mengden av uendelige desimaltall, altså tall av typen

$$a + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + a_n \cdot 10^{-n} + \cdots ,$$

eller, om vi vil, tall av typen $a, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$. Her er (a_i) alltid tall blant $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ og $a \in \mathbb{Z}$. La oss argumentere for at alle slike tall virkelig er reelle tall:

Proposisjon 2.1. *Alle desimaltall er reelle tall. Og omvendt, alle reelle tall har ei desimalutvikling.*

Bevis. La $x = a, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ være et desimaltall. Se på følga $x_1 = a + a_1 \cdot 10^{-1}$, $x_2 = a + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2}$ osv. Da er (x_n) monotont økende. Siden $a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + a_n \cdots 10^{-n} + \cdots \leq 9 \cdot (10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-n} + \cdots) \leq 1$ er også (x_n) begrensa. Ved kompletthet, kriterium (B), er dermed (x_n) konvergent, så grensa x er et reelt tall.

Anta så at x er et reelt tall. Vi kan anta $x \notin \mathbb{Z}$. La a være det største hele tall mindre enn x. Del intervallet $[a, a+1)$ i ti intervaller $[a, a + \frac{1}{10}), [a + \frac{1}{10}, a + \frac{2}{10}), \cdots [a + \frac{9}{10}, a + 1)$. La oss kalle disse intervallene $I_0^1, I_1^1, \cdots, I_9^1$. x må nå befinne seg i et I_j^1. Sett $a_1 = j$. Så deler vi intervallet $I_j^1 = [a + \frac{j}{10}, a + \frac{j+1}{10})$ inn i ti like lange intervaller på samme måte. Kall dem $I_0^2, I_1^2, \cdots I_9^2$. x må befinne seg i nøyaktig ett av disse. Nedre indeksen på intervallet angir tallet a_2. Sånn fortsetter vi. Dette gir oss ei følge $x_1 = a + a_1 \cdot 10^{-1}$, $x_2 = a + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2}$, $x_2 = a + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3}$, osv. Legg nå merke til at $|x - x_1| < \frac{1}{10}, |x - x_2| < \frac{1}{10^2}, \cdots |x - x_n| < \frac{1}{10^n}$. Dette viser at $x_n \to x$, så vi har vist at x har en desimalutvikling. $\square$

Se på beviset for Proposisjon 2.1 og legg merke til at tilsvarende argument går uten at vi nødvendigvis deler i akkurat ti intervaller. Vi kan f. eks. dele i to eller tre intervaller på hvert nivå. Dette gir utviklinger i to-talls- og tre-talls-systemene. Vi skal bruke denne observasjonen og arkiverer den derfor til senere:

Korollar 2.2. $[0,1]$ *svarer nøyaktig til alle følger* (a_n) *der* a_n *er 0 eller 1, altså alle binære sekvenser.*

En liten advarsel: Dette betyr ikke at hvert tall i $[0,1]$ har en entydig tilsvarende sekvens. Vi har f.eks. $1 = 1,000\cdots = 0,1111\cdots$

Korollar 2.3. $[0,1]$ *svarer nøyaktig til alle følger* (a_n) *der* a_n *er 0, 1 eller 2.*

2.1 Tette delmengder

Fra Proposisjon 2.1 ser vi at uansett hvor lite et intervall vi slår om hvert reelt tall, ligger det garantert en endelig desimalbrøk inni dette intervallet. Vi skal knytte et begrep til denne egenskapen:

Definisjon 2.4. *La* A *og* B *være delmengder av* $\mathbb{R}$. A *sies å være tett i* B *dersom det er slik at hver gang vi velger oss et* $\varepsilon > 0$ *og slår et intervall* $I_b = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ *om et vilkårlig punkt* $b \in B$*, så finnes et* $a \in I$ *med* $a \in A$*. Med symboler:*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall b \in B, \exists a \in A \, : |b-a| < \varepsilon.$$

Tilsvarende i metriske rom: La (E,d) *være et metrisk rom og la* A *og* B *være delmengder av* E. A *sies å være tett i* B *dersom*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall b \in B, \exists a \in A \, : d(a,b) < \varepsilon.$$

For å gjøre språket litt mer folkelig sier vi ofte at A ligger tett i B. Vi har fra Proposisjon 2.1 at

Proposisjon 2.5. *Mengden av endelige desimalbrøker ligger tett i* $\mathbb{R}$*. Spesielt,* $\mathbb{Q}$ *er tett i* $\mathbb{R}$*.*

Vi har også

Proposisjon 2.6. $\mathbb{Q}^n$ *er tett i* $\mathbb{R}^n$*.*

Bevis. La $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ og $\varepsilon > 0$. Siden $\mathbb{Q}$ er tett i $\mathbb{R}$ finnes $q_j \in \mathbb{Q}$ slik at $|x_j - q_j| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Da er

$$\begin{aligned}
&\|(x_1, x_2, \cdots, x_n) - (q_1, q_2, \cdots, q_n)\| \\
&= \sqrt{(x_1-q_1)^2 + (x_2-q_2)^2 + \cdots + (x_n-q_n)^2} \\
&< \sqrt{\tfrac{\varepsilon^2}{n} + \tfrac{\varepsilon^2}{n} + \cdots + \tfrac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{n \cdot \tfrac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

La oss også ta med et resultat vi ikke kan greie å bevise, men som vi kan glede oss over:

Teorem 2.7. *[Weierstrass approksimasjonssats, 1885] Polynomene* $P[a,b]$ *på intervallet* $[a,b]$ *ligger tett i* $C[a,b]$*.*

2.1.1 Dyadiske brøker

Dyadiske brøker er rasjonale tall på formen

$$\frac{k}{2^n}, \;\; k = 0, 1, 2, ...2^n, \;\; n = 0, 1, 2...$$

La oss liste dem:

$$\begin{array}{lllllllllll}
n = 0: & & 0 & 1 \\
n = 1: & & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
n = 2: & & 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\
n = 3: & & 0 & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{4}{8} & \frac{5}{8} & \frac{6}{8} & \frac{7}{8} & 1 \\
\vdots
\end{array}$$

Vi ser at bare odde k gir nye brøker i hver rad; for jamn k finnes samme brøk allerede i rada over. La D være de dyadiske brøkene i $[0, 1]$ og skriv D_n for rad nr. n i opplistinga over. Vi ser at rad nr. n approksimerer hvert $x \in [0, 1]$ med maksimal feil $2^{-(n+1)}$. Altså har vi

Proposisjon 2.8. *De dyadiske brøkene D ligger tett i* $[0, 1]$.

2.2 Mengders mektighet

Når vi ser ti fine fugler i et tre så lager vi en bijektiv korrespondanse mellom samlinga av fugler og mengda $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$. Å *telle* fuglene er å lage en slik korrespondanse. Ordninga $\leq$ på $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ kan brukes til å gi en rekkefølge (orden) på mengda av fugler og det at $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ har 10 elementer kan brukes til å bestemme antall fugler i treet.

Vi tar med oss denne ideen til uendelige mengder: Vi sier at to mengder har samme *mektighet* eller *kardinalitet* dersom det finnes en bijeksjon mellom dem. Mengder med samme mektighet som en endelig delmengde av $\mathbb{N}$ kaller vi selvsagt *endelige.* Mengder med samme mektighet som $\mathbb{N}$ kaller vi *tellbare.* Mengder som måtte ha større mektighet enn $\mathbb{N}$ vil vi kalle *overtellbare.* I utgangspunktet er det ikke opplagt at det finnes mengder med større mektighet enn $\mathbb{N}$, men vi skal snart se (Teorem 2.16) at sånn er det.

Eksempel 2.9. Vi skal vise at mengda $2\mathbb{N}$ av partall har samme mektighet som $\mathbb{N}$. Hvis vi definerer $\phi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ ved $\phi(n) = 2n$, har vi en bijeksjon mellom de to mengdene. Altså er $2\mathbb{N}$ tellbar. Vi kan gi ordet tellbar en direkte mening ved at ϕ gir oss partall nr. 1, partall nr. 2 osv.

Så skal vi vise at $\mathbb{Z}$ er tellbar. Definer da f. eks. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ved $\phi(0) = 1, \phi(1) = 2, \phi(-1) = 3, \phi(2) = 4$ osv. Da blir 0 det første hele tallet, 1 blir det andre, -1 blir det tredje, osv. La oss forklare at ϕ er bijektiv: ϕ er injektiv siden den er strengt voksende. La så $n \in \mathbb{N}$. Hvis n er partall er $\phi(n/2) = n$. Hvis n er odde er $\phi(-(n-1)/2) = n$. Altså er $V_\phi = \mathbb{N}$.

Nå kommer en praktisk liten observasjon analog til å si at hvis det er like mange sauer på jordet som det er fugler i treet, og det er 10 fugler i treet, så er det ti sauer på jordet:

Proposisjon 2.10. *Hvis A kan avbildes bijektivt på B og B kan avbildes bijektivt på C, så kan A avbildes bijektivt på C. Spesielt, hvis vi vil vise at ei mengde er tellbar, kan vi lage en bijeksjon til en hvilken som helst tellbar mengde.*

Bevis. La $\phi : A \to B$ og $\psi : B \to C$ være bijeksjoner. Siden ϕ er *på,* er $\psi \circ \phi$ veldefinert. Siden ψ er på, er $\psi \circ \phi$ på. Hvis $a_1 \neq a_2$ er $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$ fordi ϕ er injektiv. Siden nå ψ er injektiv, blir også $\psi \circ \phi$ injektiv. □

Det neste resultatet stemmer på ingen måte for endelige mengder!

Proposisjon 2.11. *Hvis $A_1, A_2, \cdots$ er ei tellbar samling av endelige mengder, så er $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ei tellbar mengde.*

Bevis. A_1 er bijektiv til $\{1, 2, \cdots, n_1\}$ for en eller annen n_1. A_2 er bijektiv til $\{n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, n_2\}$ for en eller annen n_2 osv. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ er da bijektiv til $\{1, 2, \cdots n_1\} \cup \{n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots n_2\} \cup \cdots = \mathbb{N}$. □

Allerede med dette verktøyet kan vi vise at

Teorem 2.12. $\mathbb{Q}$ *er tellbar.*

Bevis. Vi kan bruke Proposisjon 2.11. La $A_1 = \{0\}$. La A_2 være alle rasjonale tall der teller og nevner summerer seg til 1 (når maksimalt forkorta). La A_3 være alle rasjonale tall der teller og nevner summerer seg til -1. La A_4 være alle rasjonale tall der teller og nevner summerer seg til 2. La A_5 være alle rasjonale tall der teller og nevner summerer seg til -2. La A_6 være alle rasjonale tall der teller og nevner summerer seg til 3, osv. Da er $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$, en tellbar union av endelige mengder. □

Vi kan telle litt smartere og få mye større (liksom) tellbare mengder:

Proposisjon 2.13. *Hvis $A_1, A_2, \cdots$ er ei tellbar samling av tellbare mengder, så er $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ei tellbar mengde.*

Bevis. Siden A_i'ene er tellbare kan vi liste dem opp (fordi de er bijektive til $\mathbb{N}$):

$$\begin{array}{llllllllll}
i = 0: & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 & a_1^7 & a_1^8 & \cdots \\
1 = 2: & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 & a_2^7 & a_2^8 & \cdots \\
i = 3: & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 & a_3^6 & a_3^7 & a_3^8 & \cdots \\
i = 4: & a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 & a_4^6 & a_4^7 & a_4^8 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Lag en bijeksjon til $\mathbb{N}$ ved å liste opp slik: $a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_3^1, a_2^2, a_1^3, a_1^4, a_2^3$ osv. □

Dette gir som veldig spesielt tilfelle at $\mathbb{Q}^n$ er tellbar for alle $n \in \mathbb{N}$. La oss ta et resultat der vi utnytter Proposisjon 2.13 bedre:

Proposisjon 2.14. *La A være ei delmengde av $\mathbb{R}$. Samlinga $P_{\mathbb{Q}}(A)$ av polynomer, definert på A, med rasjonale koeffisienter er ei tellbar mengde.*

Bevis. La A_n være mengden av polynomer av grad n, med rasjonale koeffisienter. For $p(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots q_nx^n, q_1, q_2, \cdots, q_n \in \mathbb{Q}$, definerer vi en bijeksjon ϕ inn på $\mathbb{Q}^{n+1}$ ved $\phi(p) = (q_0, q_1, q_2, \cdots, q_n)$. Altså er A_n tellbar. Nå ser vi at $P_{\mathbb{Q}}(A) = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, så Proposisjon 2.13 gir at $P_{\mathbb{Q}}(A)$ er tellbar. □

Så vet vi det. Og vi kan drive det enda lenger. Hvert polynom i $P_{\mathbb{Q}}$ har endelig mange nullpunkter. Da får vi raskt fra Proposisjon 2.11 at mengden av reelle tall som er nullpunkter i et medlem fra $P_{\mathbb{Q}}$ er ei tellbar mengde. Vi kaller elementene i denne mengda for *algebraiske tall.* Komplementet til de algebraiske tall (hva enn det måtte være) kaller vi de *trancendentale tall.* Vi har altså vist:

Teorem 2.15. *Mengda av algebraiske tall er tellbar.*

Det er ikke noe vanskelig å vise at hvert rasjonalt tall q er algebraisk: 0 er nullpunkt i ethvert polynom med konstantledd lik 0. Og er det rasjonale tallet $q \neq 0$, så lar vi $p(x) = \frac{1}{q}x - q$. Legg merke til at alle kvadratrøtter av rasjonale tall også er algebraiske, $\sqrt{p/q}$ er nullpunkt i $x^2 - p/q$. Og alle n'te-røtter av rasjonale tall p/q er nullpunkt i $x^n - p/q$. Spørsmålet er jo om det i det hele tatt finnes reelle tall som ikke er algebraiske. Vi vet i allefall at trancendentale tall må befinne seg blant de irrasjonale tall. Men å bevise at et tall virkelig er trancendentalt er en fryktelig vanskelig oppgave.

Den første som greide å finne et trancendentalt tall var Joseph Liouville, da han i 1851 greide å bevise at det reelle tallet $t = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-n!}$ er trancendentalt. I 1873 viste Charles Hermite at e er trancendentalt og i 1882 viste Ferdinand Lindemann at også π er trancendentalt. Et fryktelig dypt resultat av A.O. Gelfond fra 1934 sier at hvis a er et algebraisk tall bortsett fra 0 eller 1, og b er et irrasjonalt, algebraisk tall, så er a^b trancendentalt. Med dette resultatet ser vi at det er mange trancendentale tall. Men vi skal snart bevise uten å anstrenge oss mye at det finnes mange trancendentale tall, uten å peke på noe konkret trancendentalt tall (se Korollar 2.17).

2.2.1 Intervaller er overtellbare

La oss gå rett på sak

Teorem 2.16. *Ethvert intervall av reelle tall er overtellbart.*

Bevis. Vi kan anta intervallet er på formen $[a, b]$. De andre tre formene $(a, b], (a, b)$ og $[a, b)$ må også være overtellbare hvis $[a, b]$ er. Så har vi at $[a, b]$ er bijektivt med $[0, 1]$ under avbildningen $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ gitt ved $\phi(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Dermed kan vi i følge Proposisjon 2.10 nøye oss med å bevise at $[0, 1]$ er overtellbart. For å vise det, skal vi bruke at hvert $x \in [0, 1]$ er på formen $0, a_1a_2 \cdots$, der $a_i = 0$ eller $a_i = 1$ altså, hvert $x \in [0, 1]$ har en utvikling i to-tallsystemet, slik Korollar 2.2 forteller oss. Altså er det nok å vise at mengda av binære sekvenser er overtellbar.

Nå kommer det et veldig stilig argument, ofte kalt Cantors diagonaliseringsargument. Anta mengda av binære sekvenser er tellbar. I så fall kan vi liste dem opp, omtrent slik

$$\begin{array}{lllllllllll}
i=0: & & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 & a_1^6 & a_1^7 & a_1^8 & \cdots \\
i=2: & & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 & a_2^6 & a_2^7 & a_2^8 & \cdots \\
i=3: & & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 & a_3^6 & a_3^7 & a_3^8 & \cdots \\
i=4: & & a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 & a_4^6 & a_4^7 & a_4^8 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

I listinga over er alle a_i^j enten 0 eller 1. Under forutsetninga om at mengda av binære sekvenser er tellbar, må enhver binær sekvens være med i lista vår. Men se nå på den binære sekvensen

$$a_1^1 \quad a_2^2 \quad a_3^3 \quad a_4^4 \quad a_5^5 \quad a_6^6 \quad a_7^7 \quad a_8^8 \quad \cdots,$$

altså diagonalen i lista, og lag en ny sekvens $b_1 b_2 b_3$ ved å la $b_i = 0$ hvis $a_i^i = 1$ og $b_i = 1$ hvis $a_i^i = 0$ (altså bare bytt 1 med 0 og 0 med 1 hele veien). Kan denne sekvensen være identisk med noen av radene i lista som skulle inneholde alle binære sekvenser? Den kan ikke være lik første rad, fordi første komponent er ulik. Den kan ikke være lik andre rad heller fordi andre komponent er ulik. Og den kan tilsvarende ikke være lik n'te rad for noen n fordi komponent nr. n er ulik. Altså har vi en selvmotsigelse, og eneste mulighet er: Mengda av binære sekvenser er overtellbar. $\square$

Siden en union av to tellbare mengder er tellbar, og dermed ikke overtellbar, står vi tilbake med følgende dramatisk gode konsekvenser:

Korollar 2.17. *Mengda av trancendentale tall i [0,1] er overtellbar. Spesielt er mengda av irrasjonale tall i* $[0,1]$ *overtellbar.*

Et naturlig spørsmål melder seg: *Finnes det noen mektighet mellom tellbarhet og mektigheten til* $[0,1]$*?* Påstanden er verken bevist eller motbevist. At det ikke finnes noen mektighet mellom tellbarhet og mektigheten til $[0,1]$, kaller vi *kontinuumshypotesen.*

Vi vet altså ikke om kontinuumshypotesen er sann. Likevel er den veldig nyttig; det finnes nemlig et teorem som sier noe sånt som *finner du et moteksempel til en påstand ved å bruke kontinuumshypotesen, så finnes det et moteksempel uten kontinuumshypotesen også.* Dermed har vi lov å bruke kontinuumshypotesen når vi vil lage moteksempler, men vi opererer klart på egen risiko om vi bruker den til å bevise at en påstand er sann.

2.2.2 Diskontinuiteter til monotone funksjoner

Diricletfunksjonen viste oss et eksempel på en funksjon på intervallet $(0,1)$ som er kontinuerlig i alle irrasjonale tall og diskontinuerlig i alle rasjonale tall. Diricletfunksjonen er altså diskontinuerlig på en tett delmengde av $[0,1]$ uten å være diskontinuerlig overalt. En kan jo spørre seg hvor ofte en funksjon kan få til å være diskontinuerlig på $[0,1]$ uten å være diskontinuerlig overalt. Er det for eksempel mulig å finne en funksjon som er diskontinuerlig på de irrasjonale talla og kontinuerlig på de rasjonale?. Vi har svaret for monotone funksjoner:

Proposisjon 2.18. *En begrensa, monoton, reell funksjon f definert på $[0,1]$ har høyst tellbart mange diskontinuiteter.*

Bevis. Anta f er monotont økende, altså at $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ for alle $x, y \in [0,1]$. Vi har at $\lim_{x\to a^-} f(x)$ eksisterer ved kompletthet (her bruker vi monotonitet og får at $\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup_{x<a} f(x)$. Tilsvarende argument gir at $\lim_{x\to a^+} f(x)$ eksisterer. Vi har at $\lim_{x\to a^-} f(x) \leq \lim_{x\to a^+} f(x)$ for alle $a \in [0,1]$. Altså er f diskontinuerlig i a hvis og bare hvis $\lim_{x\to a^-} f(x) < \lim_{x\to a^+} f(x)$. La nå Δ være delmengda av $[0,1]$ der f er diskontinuerlig. For hvert $a \in \Delta$ finnes et rasjonalt tall q_a slik at $\lim_{x\to a^-} f(x) < q_a < \lim_{x\to a^+} f(x)$ siden $\mathbb{Q}$ er tett i $\mathbb{R}$. Avbildninga $a \to q_a$ gir en bijeksjon fra Δ til ei delmengde av $\mathbb{Q}$. Siden $\mathbb{Q}$ er tellbar, er Δ høyst tellbar. $\square$

Det samme gjelder for en hver delmengde av $\mathbb{R}$.

2.2.3 Separabilitet

Vi kaller et metrisk rom separabelt dersom det inneholder ei tett, tellbar delmengde. Siden $\mathbb{Q}$ er tellbar og tett i $\mathbb{R}$, får vi at $\mathbb{R}$ er separabelt. Mer generelt, siden $\mathbb{Q}^n$ er tellbar og tett i $\mathbb{R}^n$, har vi at $\mathbb{R}^n$ er separabelt. Tar vi oss friheten å bruke Weierstrass' approksimasjonssats (Teorem 2.7), kan vi vise at $(C[0,1], \sup_{[0,1]} f)$ også er separabelt: Vi vet at $P_{\mathbb{Q}}[0,1]$ er tellbar. La så p være et vilkårlig polynom på $[0,1]$ og $\varepsilon > 0$. Sett $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Bruk så at $\mathbb{Q}$ er tett i $\mathbb{R}$ til å finne q_i slik at $|q_i - a_i| < \varepsilon/n$, $0 \leq i \leq n$. Da er $q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n \in P_{\mathbb{Q}}[0,1]$ og

$$d(p,q) = \sup_{x\in[0,1]} |(a_0 - q_0) + (a_1 - q_1)x + (a_2 - q_2)x^2 + \cdots + (a_n - q_n)x^n|,$$

ved definisjonen av d. Så bruker vi trekantulikheten for tall og får:

$$d(p,q) \leq \sup_{x\in[0,1]} |(a_0 - q_0)| + |(a_1 - q_1)x| + |(a_2 - q_2)x^2| + \cdots + |(a_n - q_n)x^n|.$$

Litt analyse til gir

$$d(p,q) \leq |(a_0 - q_0)| + |(a_1 - q_1)||x| + |(a_2 - q_2)||x|^2 + \cdots + |(a_n - q_n)||x|^n.$$

Men den x'en som gir størt verdi for denne summen kan umulig gi høyere verdi enn om vi maksimerer hvert ledd. Dette gir

$$d(p,q) \leq |(a_0 - q_0)| + \sup_{x\in[0,1]} |(a_1 - q_1)|x| + \sup_{x\in[0,1]} |(a_2 - q_2)|x|^2 + \cdots + \sup_{x\in[0,1]} |(a_n - q_n)|x|^n.$$

Hvert av disse ledda har selvsagt maksimumsverdi når $x = 1$, så vi får

$$d(p,q) \leq |(a_0 - q_0)| + |(a_1 - q_1)| + |(a_2 - q_2)| + \cdots + |(a_n - q_n)| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

som viser at $P_{\mathbb{Q}}[0,1]$ er tett i $(C[0,1], \sup_{[0,1]} f)$. Vi kan glatt justere argumentet til å gjelde intervallet $[a,b]$.

Vi summerer opp den nye kunnskapen vår:

Proposisjon 2.19. *$\mathbb{R}^n$ og $C[a,b]$ er separable metriske rom.*

Lykkelige over dette, kan vi jo drømme om hvilken herlig planet dette ville være å leve på dersom alle metriske rom var separable. Jeg må nok dessverre knuse den drømmen:

Eksempel 2.20. Vi skal lage oss et metrisk rom som ikke kan være separabelt. La oss ta mengden av binære sekvenser (a_i) og gi den følgende metrikk: Avstanden d mellom to binære sekvenser er største forskjell på komponenter. Da er alle binære sekvenser i avstand null til seg selv og alle ulike binære sekvenser er i avstand 1 fra hverandre. Den eneste delmengda av dette metriske rommet $\mathcal{B}$ som er tett i $\mathcal{B}$ er dermed $\mathcal{B}$ selv. Fra beviset for Teorem 2.16 vet vi at $\mathcal{B}$ er overtellbar. Dermed kan ikke $\mathcal{B}$ være separabelt.

2.3 Noen topologiske begreper

Allerede i vidergående skole snakka vi om åpne og lukka intervaller. Vi skal nå lage definisjoner og resultater slik at vi kan avgjøre hvilke delmengder av $\mathbb{R}$ (og av metriske rom) som er åpne og hvilke som er lukka.

Definisjon 2.21. *La $A \subset \mathbb{R}$. Et punkt $a \in A$ kalles et* indre punkt *dersom det finnes et intervall $I = (a, b)$ av reelle tall om a slik at $I \subset A$. A kalles* åpen *dersom alle punkter i A er indre punkter. A er* lukka *hvis og bare hvis A^c er åpen.*

I Oppgave 12 skal du vise at åpne intervaller er åpne og at lukka intervaller er lukka. Legg merke til at Definisjon 2.21 gir oss direkte at $\mathbb{R}$ og $\emptyset$ er åpne mengder. Siden disse to er komplementer av hverandre er de også lukka.

La oss se på følgende problemstilling: Anta vi har ei delmengde $A \subset \mathbb{R}$. Hvilke punkter må vi tilføre A for at A sammen med denne tilføringa skal være lukka? Vi kaller den minste slike utvidelse av A for *tillukninga* av A. La oss kalle det ekstra vi trenger for T. Vi søker altså minst mulige mengde T slik at $A \cup T$ er lukka.

Anta et øyeblikk at det finnes ei Cauchyfølge i A som har ei grense utenfor $A \cup T$. Kall denne grensa c. Vi har altså $c = \lim a_n$, der $a_n \in A$, men $c \in (A \cup T)^c$. Da kan umulig c være et indre punkt for $(A \cup T)^c$ fordi alle intervaller om c vil inneholde uendelig mange a_n'er, og disse er jo i A. Konklusjonen vår er dermed at T i det minste må bestå av alt som Cauchyfølger fra A kan konvergere til. La oss kalle alt som Cauchyfølger fra A kan konvergere til for $fgr(A)$ (fgr for følgegrenser) og la oss betegne tillukninga til A som $\bar{A}$. Vi har følgende veldig praktiske sammenheng:

Proposisjon 2.22. $\bar{A} = A \cup fgr(A)$.

Bevis. Vi vet at vi ikke kan greie oss med noe mindre enn $fgr(A)$. Så det vi må vise er at $A \cup fgr(A)$ virkelig er ei lukka mengde, eller med andre ord at $(A \cup fgr(A))^c$ er åpen. La $c \in (A \cup fgr(A))^c$. Siden c ikke er i A og heller ikke grense for ei følge fra A, må det finnes et intervall $I_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ om c slik at ingen følge fra A før eller siden er i I_ε. Spesielt, det kan ikke være mer enn endelig mange elementer fra A i I_ε. Ingen av disse elementene $a_1, a_2, \cdots, a_n$ er lik c. Dermed finnes et a_i som ligger nærmest c. La $\delta < |c - a_i|$. Da er $(c - \delta, c + \delta)$ et intervall om c helt og holdent inneholdt i $(A \cup fgr(A))^c$. Altså er c et indre punkt. Dette viser resultatet. $\square$

Hvis A ligger tett i B og B er lukka, må vi ha at $\bar{A} = B$ (se Oppgave 15). Spesielt har vi at $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Med utgangspunkt i disse begrepene foreslo franskmannen René Baire på 1890-tallet en annen måte å måle størrelse på mengder: Vi kan ta ei delmengde av $\mathbb{R}$ og lukke den. Dersom tillukningen inneholder et intervall, synes vi mengda er større enn dersom tillukninga ikke inneholder noe intervall, hva? La oss se på eksempler:

Eksempel 2.23. Vi synes at $\mathbb{Q}$ er ei stor delmengde av $\mathbb{R}$ siden tillukninga er hele $\mathbb{R}$. Vi synes også at $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ alltid er ei stor mengde siden tillukninga inneholder intervallet $[a, b]$. Vi synes $\mathbb{N}$ er ei lita delmengde av $\mathbb{R}$ siden tillukninga, $\mathbb{N}$ selv, ikke inneholder noe intervall.

At tillukninga av A ikke inneholder noe intervall, kan vi uttrykke som at A ikke har noe område som er tett i et intervall. Dette bildet er opphavet til vårt neste begrep:

Definisjon 2.24. *La $A \subset \mathbb{R}$. A kalles* ingensteds tett *dersom $\bar{A}$ ikke inneholder noe intervall. Ekvivalent, A er ingensteds tett dersom det for alle $\varepsilon > 0$ og for alle $r \in \mathbb{R}$ finnes $x \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ slik at $x \notin \bar{A}$. Hvis A ikke er ingensteds tett, vil vi si at A er* lokaltett.

Vi har nå etablert begrepene tett-ikketett, overtellbar-tellbar og lokaltett-ingenstedstett, som mål på store-små mengder. Vi vet at tetthet ikke medfører overtellbarhet, og det er klart at tett med fører lokaltett. I neste seksjon skal vi møte et eksempel som viser at overtellbare mengder kan være ingensteds tette.

2.4 Cantormengda

Vi sett at $[0, 1]$ er overtellbar. Det samme gjelder alle delintervaller av $[0, 1]$. Nå skal vi lage ei lukka, overtellbar delmengde av $[0, 1]$ som ikke inneholder noe delintervall av $[0, 1]$.

2.4.1 Konstruksjon av Cantormengda

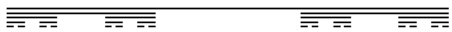
Vi starter med intervallet $[0, 1]$ og husker at alle elementene inni her kan skrives i tre-tallssystemet, $0, a_1a_2a_3 \cdots$, $a_i = 0, 1, 2$, (Korollar 2.3). Sett $C_0 = [0, 1]$. La så C_1 være alle tallene i C_0 der $a_1 \neq 1$ (vi fjerner altså midterste, åpne tredel $(1/3, 2/3)$ av C_0). La C_2 være alle tallene i C_1 der $a_2 \neq 1$ (tegn hva vi nå fjerna fra C_1). Vi har altså $C_{n+1} = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$. Cantormengda er nå simpelthen $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$, eller med andre ord

$$C = \{x \in [0, 1] \ : x_{\text{tre}} = 0, a_1a_2a_3 \cdots, \ a_i \neq 1\}.$$

I Figur 2.1 ser du et bilde av de første stegene i konstruksjonen av Cantormengda.

Proposisjon 2.25. *Cantormengda C er overtellbar.*

Bevis. For $x \in C$ ser vi på utviklinga i tre-tallssystemet og definerer en funksjon $\phi : C \to B$, der B er mengda av binære sekvenser, ved å la ϕ ikke forandre de a_i der $a_i = 0$, men forandre de a_i der $a_i = 2$ til et ett tall. Da er i alle fall



Figur 2.1: De første stegene i konstruksjonen av Cantormengda (bildet er stjålet fra http://mathworld.wolfram.com/CantorSet.html).

ϕ en avbildning inn i B og to ulike elementer i C blir også ulike i B. For $b = b_1 b_2 b_3 \cdots \in B$ velger vi $c \in C$ ved $0, c_1 c_2 c_3 \cdots$ der $c_i = 0$ hvis $b_i = 0$ og $c_i = 2$ hvis $b_i = 1$. Da er $\phi(c) = b$, og vi har vist at ϕ er en bijeksjon. Siden B er overtellbar, følger resultatet. $\square$

Proposisjon 2.26. *Cantormengda C inneholder ikke noe delintervall av* $[0, 1]$.

Bevis. Det er nok å vise at alle delintervaller (a, b) av $[0, 1]$ inneholder et $y_{\text{tre}} = 0, y_1 y_2 y_3 \cdots$, der minst en $y_i = 1$. La m være intervallets midtpunkt og la $\delta = b - m$. Vi utvikler m i tre-tallssystemet, $m_{\text{tre}} = 0, m_1 m_2 m_3 \cdots$. Hvis en m_i er lik 1, er der ingenting å vise. Vi kan altså anta $m_{\text{tre}} = 0, m_1 m_2 m_3 \cdots, m_i \neq 1$. Velg nå n slik at $3^{-n} < \delta$ og la $y_{\text{tre}} = 0, m_1 m_2 m_3 \cdots m_n 1000 \cdots$. Da er $|m - y| < 3^{-n} < \delta$, så $y \in (a, b)$. $\square$

Proposisjon 2.27. *Cantormengda C er lukka.*

Bevis. Se på konstruksjonen av C foran Proposisjon 2.25. Komplementet til C_1 er en union av to åpne intervaller. C_2^c er en union av fire åpne intervallet. Tilsvarende har vi at C_n^c er en union av 2^n åpne intervaller. La nå $x \in C^c$. Da finnes en n slik at $x \in C_n^c$ (siden $C^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^c$). Men C_n^c er en union av 2^n åpne intervaller. x må da befinne seg i ett av disse intervallene. Altså er x et indre punkt. Siden x var vilkårlig, er C^c åpen. Dermed er C lukka. $\square$

Vi slår sammen Proposisjonene 2.25, 2.26 og 2.27 og får:

Proposisjon 2.28. *Cantormengda C er ei overtellbar ingensteds tett delmengde av* $\mathbb{R}$.

2.4.2 Cantor-Lebesgue funksjonen

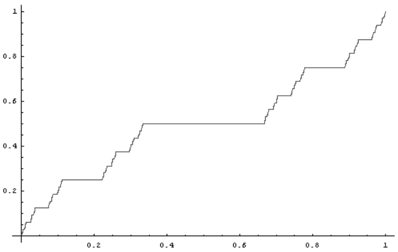
Vi skal lage en artig funksjon med utgangspunkt i Cantormengda C: Vi husker at tallene i C er nøyaktig de som kan skrives $0.a_1 a_2 \cdots$ der a_i er 0 eller 2. Da vi beviste at C er bijektiv med $[0, 1]$ lagde vi en bijeksjon ϕ inn på base-to utviklingene. Vi kan skrive denne som $\phi : C \to [0, 1]$

$$\phi(0.a_1 a_2 a_3 \cdots_{\text{tre}}) = 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{2} \cdots_{\text{to}}$$

Nå er ϕ definert kun på C. Vi skal etter hvert utvide ϕ slik at den blir definert på hele $[0, 1]$. La oss bare eksperimentere med å evaluere ϕ i noen punkter først, så vi kan bli litt mer kjent med ϕ. Vi har

$$\phi(\frac{1}{3}) = \phi(0, 0222 \cdots_{\text{tre}}) = 0.0111_{\text{to}} = \frac{1}{2}.$$

$$\phi(\frac{2}{3}) = \phi(0, 2000 \cdots_{\text{tre}}) = 0.1000_{\text{to}} = \frac{1}{2}.$$



Figur 2.2: Cantor-Lebesgue funksjonen (bildet er stjålet fra http://mathworld.wolfram.com/CantorFunction.html).

ϕ har altså samme verdi i endepunktene av første intervall vi tok bort. La oss sjekke verdiene i $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$ og $\frac{8}{9}$, som er endepunktene på neste steg i konstruksjonen:

$$\phi(\frac{1}{9}) = \phi(0,0022\cdots_{\text{tre}}) = 0.0011_{\text{to}} = \frac{1}{4}.$$
$$\phi(\frac{2}{9}) = \phi(0,0200\cdots_{\text{tre}}) = 0.0100_{\text{to}} = \frac{1}{4}.$$
$$\phi(\frac{7}{9}) = \phi(0,2022\cdots_{\text{tre}}) = 0.1011_{\text{to}} = \frac{3}{4}.$$
$$\phi(\frac{8}{9}) = \phi(0,2200\cdots_{\text{tre}}) = 0.1100_{\text{to}} = \frac{3}{4}.$$

Nå ser vi at ϕ har samme verdi i endepunkter av gjenstående intervaller på hvert steg. Vi utvider nå enkelt ϕ til hele $[0,1]$ ved å la ϕ være konstant lik verdien i endepunktene på de mellomliggende intervallene. Ta en titt på Figur 2.2 for å se hva jeg mener.

Vi skal møte ϕ igjen senere. La oss bare merke oss at ϕ er monotont voksende og at $V_\phi = [0,1]$. Og en ting til:

Proposisjon 2.29. *Cantor-Lebesgue funksjonen ϕ er kontinuerlig på* $[0,1]$.

Bevis. Siden C^c er åpen, er hvert punkt x i C^c et indre punkt. Dette betyr at ϕ er konstant i et intervall rundt x. Dermed er det klart at ϕ er kontinuerlig for alle $x \in C^c$. La så $x \in C$. Da er x på formen $a/3^k$ og er enten høyre eller venstre ende i et intervall av typen $[b/3^k, (b+1)/3^k]$. La oss anta x er venstre endepunkt. Da er ϕ konstant på venstresida av x og med samme verdi i x. Så vi har $\lim_{y\to x^-} \phi(y) = \phi(x)$. Det gjenstår å vise at $\lim_{y\to x^+} \phi(y) = \phi(x)$. Siden ϕ er monotont voksende eksisterer grensa (som $\inf_{y>x} \phi(y)$). Men hvis $\lim_{y\to x^+} \phi(y) > \phi(x)$ så kunne ikke $V_\phi = [0,1]$. □

Uten å ha definert deriverbarhet formelt, så ser vi vel at ϕ har derivert lik 0 veldig ofte. Likevel greier ϕ å krype fra 0 til 1. Vi skal komme tilbake til dette poenget senere.

2.5 Mengder av mål null

Nå har vi sett på tellbarhet og ingenstedstetthet som måter å uttrykke at delmengder av $\mathbb{R}$ er små. Tilsvarende ser vi på lokaltett, tett og overtellbar som måter å si at delmengder av $\mathbb{R}$ er store. Men vi har også sett at stor i en forstand godt kan bety liten i en annen forstand siden Cantormengda er ingenstedstett men overtellbar og $\mathbb{Q}$ er tett men tellbar. Vi skal nå se på en annen måte å snakke om store og små mengder på.

La (a, b) være et åpent intervall. Vi definerer lengda av (a, b) som $b - a$. Et intervall av typen $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ får da lengde lik 2ε. La nå A være ei delmengde av $\mathbb{R}$. Da kan vi alltid dekke A med ei tellbar samling åpne intervaller (a_i, b_i) (hele $\mathbb{R}$ kan jo dekkes med intervaller $(n - 1, n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$. Hver gang vi dekker A med ei tellbar samling åpne intervaller (a_i, b_i) kan vi summere opp lengdene av intervallene vi dekker med. La oss se et eksempel:

Eksempel 2.30. Vi dekker $[0, 1]$ med intervallene $(-1/2, 1/2)$, $(0, 1)$ og $(1/2, 3/2)$. Vi summerer opp og får $1 + 1 + 1 = 3$. Så dekker vi med $(-1/4, 1/4)$, $(0, 1/2)$, $(1/4, 1)$ og $(3/4, 5/4)$. Vi summerer opp og får $1/2 + 1/2 + 3/4 + 1/2 = 9/4$.

La oss skrive $\mathcal{A}$ for ei vilkårlig tellbar intervalldekning av A. Hver $\mathcal{A}$ gir da ei samla lengde $\ell(\mathcal{A})$. Mengda av slike lengder er nedtil begrensa av 0. Kompletthet av $\mathbb{R}$ forteller oss at det finnes en største nedre grense for de samla lengdene. La oss kalle denne største nedre grensa $m(A)$ for *det ytre målet* til A.

Eksempel 2.31. Vi vil finne det ytre målet til $[0, 1]$. Vi dekker $[0, 1]$ med intervallene $(-1/2^n, 1/2^n)$, $(0, 1)$, $(1 - 1/2^n, 1 + 1/2^n)$. Vi summerer opp og får $2 \cdot 2^{-n} + 1 + 2 \cdot 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2^{n-2}}$. Vi ser da at $m([0, 1]) = 1$. På samme måte får vi

$$m([a, b]) = m((a, b]) = m([a, b)) = m((a, b)) = b - a.$$

Siden altså $m([a, b]) = m((a, b]) = m([a, b)) = m((a, b))$, ser vi at det spiller ikke noen rolle hva slags intervaller vi bruker når vi dekker ei mengde A for å finne det ytre målet. Dette, sammen med noen andre egenskaper, har en fin konsekvens (som det faktisk er litt arbeid å bevise):

Proposisjon 2.32. *Hvis $A \subset [0, 1]$ er lukka eller åpen og har ytre mål lik $m(A)$, så er $m([0, 1] \setminus A) = 1 - m(A)$.*

La oss nå gi følgende definisjon:

Definisjon 2.33. *Ei delmengde A av $\mathbb{R}$ har* mål null *dersom det ytre målet til A er 0.*

Nå har vi altså en ny måte å avgjøre stor og liten delmengde av $\mathbb{R}$ på. Mål null er lite, mens ytre mål 1 er stort. Vi kaller gjerne mengder av mål null for *neglisjerbare.* Det naturlige spørmålet er vel nå. Hva er det ytre målet til $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$? Hva med Cantormengda?

Proposisjon 2.34. *Enhver tellbar delmengde av $\mathbb{R}$ har mål null.*

Bevis. Vi kaller mengda A og lister opp elementene, $a_1, a_2, a_3, \cdots$. La $\varepsilon > 0$. Så dekker vi A med intervallene $(a_i - 2^{-n}\varepsilon, a_i + 2^{-n}\varepsilon)$. Vi summerer lengdene og får

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-n}\varepsilon = 2\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \cdot 2^{-n} = 2\varepsilon.$$

Siden ε er vilkårlig må $m(A) = 0$. $\square$

Proposisjon 2.35. *Cantormengda C har mål null.*

Bevis. Vi greier ikke helt å bevise dette, men vi greier å bevise at C^c har ytre mål 1. For C^c er jo allerede en tellbar union av åpne intervaller. Så å summere dem opp gir direkte det ytre målet. Vi summerer og får

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n},$$

altså ei geometrisk rekke med vekstfaktor 2/3. Vi regner videre og får

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 1.$$

Vi har at $m([0,1]) = 1$, $m(C^c) = 1$ og at C^c og C er disjunkte og utgjør $[0,1]$. Hvis du tror på Proposisjon 2.32, så tror du på at $m(C) = 0$. $\square$

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ er altså tett og neglisjerbar mens C er overtellbar og neglisjerbar. Dette begynner å bli litt morsomt, hva? For å gjøre det enda morsommere, kan vi si *nesten overalt* om delmengder av $[0,1]$ med ytre mål lik 1, det pleier nemlig matematikerne å gjøre. Da er altså Cantor-Lebesgue en funksjon med derivert lik 0 nesten overalt som likevel vokser fra 0 til 1 på intervallet $[0,1]$. Hurra!

Du kan lære mye mer om det å måle mengder ved å ta et kurs i mål- og integrasjonsteori.

2.6 Baires kategorier

Hvis vi tar en tellbar union av mengder med mål null får vi fortsatt ei mengde med mål null. Dekk nemlig hver A_i som inngår i unionen $A = \cup_n A_i$ med ei tellbar samling åpne intervaller av samla lengde mindre enn $\varepsilon \cdot 2^{-i}$. Fra Proposisjon 2.13 har vi da ei tellbar dekning av A. Og den samla lengda er $\sum_i \varepsilon 2^{-i} = \varepsilon$. Altså må A ha mål null.

En kan spørre seg hva som skjer om en tar tellbare unioner av ingensteds tette mengder. Hvor mye kan en da få? Vi kan i allefall få tette mengder siden $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ er en tellbar union av punkter. Kan vi få hele $[0,1]$? Følgende teorem fra doktoravhandlinga til Baire svarer oss:

Teorem 2.36. *[Baire, 1899] Et intervall (a,b) er aldri en tellbar union av ingensteds tette mengder.*

Og beviset er faktisk ganske enkelt, bare se:

Bevis. La oss skissere beviset. Anta $F_1 \cup F_2 \cup \cdots$ er en tellbar union av ingenstedstette mengder. Vi må påvise en $x \in (a,b)$ som ikke finnes i noen av F_i'ene. Siden F_1 er ingenstedstett er den i allefall ikke tett. Dermed finnes finnes et (a_1, b_1) som ikke har noen punkter fra F. Inni (a_1, b_1) finner vi et lukka intervall $[c_1, d_1]$ som heller ikke snitter F_1.

Så bruker vi at F_2 er ingenstedstett. Da kan ikke F_2 være tett i $[c_1, d_1]$. Altså finnes åpent intervall (a_2, b_2) som ikke snitter $F_1 \cup F_2$. Inni (a_2, b_2) finner vi $[c_2, d_2]$ med samme egenskap.

Sånn fortsetter vi og ender opp med ei nøsta følge $([c_i, d_i])_{i \in \mathbb{N}}$. Ved komplethet (F), så finnes da et $x \in \cap_i [c_i, d_i]$. Det er klart at $x \in (a,b)$. x er ikke i F_1, for x er jo i $[c_1, d_1]$. x er ikke i F_2 heller siden $x \in [c_2, d_2]$. Tilsvarende ser vi at x ikke kan være i noen F_i fordi $x \in [c_i, d_i]$. Altså har vi $x \notin F_1 \cup F_2 \cup \cdots$. $\square$

Det gjelder å finne de rette begrepene. Ei delmengde av $\mathbb{R}$ sies å være av *første kategori* dersom den kan skrives som en tellbar union av ingensteds tette mengder. Tellbare mengder er altså av første kategori, men kan godt være tette. Så har vi at vi får ikke noe mer enn første kategori ved å ta tellbare unioner av tellbare unioner av ingentedstette mengder. Vi har altså, på samme måte som at en tellbar union av mål null mengder har mål null, så er også en tellbar union av første kategori mengder av første kategori. Hvis delmengda ikke er av første kategori, så er den av *andre kategori.* Baires teorem sier altså at intervaller alltid er av andre kategori.

Mengder av første kategori omtales ofte som *magre.* Hvis ei mengde har et komplement i $\mathbb{R}$ som er magert (da er mengda av andre kategori med god margin) sier en ofte at mengda er *residual.* De irrasjonale talla og komplementet til Cantormengda er altså residuale.

Beviset for Baires teorem viser seg å gå fint i generelle metriske rom og vi får at *komplette metriske rom er alltid av andre kategori.*

Det viser seg at det er lite sammenheng mellom storhet i form av mål og storhet i form av kategori: Det finnes mengder av andre kategori (også residuale) i $\mathbb{R}$ som har mål null og det finnes mengder av første kategori som har ytre mål 1.

2.6.1 Diskontinuitetspunkter for funksjoner

Vi har tidligere tatt opp spørsmålet om hvor ofte en funksjon kan være diskontinuerlig uten å være diskontinuerlig overalt. Baire har dette svaret:

Teorem 2.37. *La f være en funksjon som er kontinuerlig på ei tett mengde av et intervall (a, b). Da er mengden av diskontinuitetspunkter ei mengde av første kategori.*

Beviset er skrevet ut i detalj på side 192-194 i [2]. Se Oppgave 25 for en artig anvendelse av dette teoremet.

2.7 Oppgaver

Oppgaver til Seksjon 2.1

Oppgave 1. Vi skal jobbe litt med utvikling i base to og base tre.

(a) Finn talla $1/2, 1$ og 0.75 i base to. Hva blir $0,101010101\cdots$ omgjort i base ti?

(b) Finn talla $1, 2/3$ og $1/27$ i base tre. Hva blir $0,11111111\cdots$ omgjort i base ti?

Oppgave 2. Finn et rasjonalt tall q slik at $|\pi - q| < 10^{-4}$.

Oppgave 3. Lag ei tegning som illustrerer hva Weierstrass' approksimasjonssats forteller oss. Undersøk for hvilke a $p(x) = x$ approksimerer $f(x) = \sin x$ på intervallet $[0, a]$ med feil høyst 0.1.

Oppgave 4. La D være delmengda av $C[-a, a]$ bestående av uendelig mange ganger deriverbare funksjoner med den tilleggsegenskapen at det finnes et $M < \infty$ slik at $|f^{(n)}(x)| \leq M$ for alle $x \in [-a, a]$ og for alle n. Bruk Maclaurin's restformel til å vise Weierstrass approksimasjonssats for delmengda D.

Oppgave 5. Så kommer ei oppgave om dyadiske brøker.

(a) I hvilken rad av de dyadiske brøkene har alle elementer i $[0,1]$ en approksimant med feil mindre enn $1/1000$?

(b) Skriv hver rad D_n av de dyadiske brøkene i base to. Hva ser du?

Oppgave 6. Ei tulleoppgave om dyadiske brøker: Vis at hvis du summerer talla i mengda D_n, så er det dobbelte av denne summen et naturlig tall, uansett n.

Oppgave 7. Vi skal finne et alternativt bevis for at $\mathbb{Q}$ er tellbar.

(a) La $A_n = \{q \in \mathbb{Q} \; : q$ sin desimalutvikling har periodelengde $n\}$. Vis at $\mathbb{Q} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(b) Bruk (a) til å gi et alternativt bevis for at $\mathbb{Q}$ er tellbar.

Oppgaver til Seksjon 2.2

Oppgave 8. Mer om dyadiske brøker.

(a) Vis at mengda D av dyadiske brøker er tellbar.

(b) Bruk (a) til å gi et alternativt bevis for at $\mathbb{R}$ er separabelt.

Oppgave 9. Vis at mengda av oddetall har samme mektighet som mengda av partall.

Oppgave 10. Vi skal studere mektighetsbegrepet litt mer. La A være ei mengde og la $\mathcal{P}(A)$ være *potensmengda* til A, dvs samlinga av alle delmengder av A.

(a) Anta A har kardinalitet n. Hva blir kardinaliteten til $\mathcal{P}(A)$?

(b) La nå $E, F \in \mathcal{P}(A)$. Vi skal skrive $E \sim F$ hvis og bare hvis det finnes en bijeksjon av E på F, dvs. hvis og bare hvis E og F har samme mektighet. Vis at $\sim$ oppfyller følgende lover:

  (i) $E \sim E$ for alle $E \in \mathcal{P}(A)$

  (ii) Hvis $E \sim F$, så er $F \sim E$ for alle $E, F \in \mathcal{P}(A)$

  (iii) Hvis $E \sim F$ og $F \sim G$, så er $E \sim G$ for alle $E, F, G \in \mathcal{P}(A)$

(c) $\sim$ definerer altså en ekvivalensrelasjon på $\mathcal{P}(A)$. La nå $A = \{1, 2, 3\}$ og bestem alle ekvivalensklassene.

Oppgave 11. Vis at $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ har samme mektighet som $[0,1]$. (Hint: Sammelikn $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ med mengda av binære sekvenser.)

Oppgaver til Seksjon 2.3

Oppgave 12. Åpne og lukka intervaller.

(a) La $A = (a, b)$ og la $c \in A$. Vis at c er et indre punkt.

(b) Bruk (a) til å vise at åpne intervaller er åpne og at lukka intervaller er lukka.

Oppgave 13. Tillukning. Finn tillukninga av A når

(a) $A = (a, b)$.

(b) $A = [0, 1) \cup (1.001, 2]$.

(c) $A = (0, \infty)$.

Oppgave 14. Vis at A er lukka hvis og bare hvis $A = \bar{A}$.

Oppgave 15. Vis at hvis A ligger tett i B og B er lukka, så må vi ha at $\bar{A} = B$.

Oppgaver til Seksjon 2.4

Oppgave 16. Ei delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles perfekt dersom $A = fgr(A)$.

(a) Forklar at $[0, 1)$ ikke er perfekt, men at $[0, 1]$ er perfekt.

(b) Er $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ perfekt?

(c) Vis at Cantormengda er perfekt.

Oppgave 17. La A være ei delmengde av $\mathbb{R}$ og la $x \in A$. Vi kaller x for et isolert punkt dersom det finnes et intervall om x som ikke snitter A.

(a) La $A = [0, 0.49) \cup \{0.5\} \cup (0.51, 1]$. Forklar at $x = 0.5$ er et isolert punkt.

(b) Forklar at intervaller ikke inneholder noen isolerte punkter.

(c) Forklar at Cantormengda C ikke har noen isolerte punkter.

Oppgave 18. La A være ei delmengde av $\mathbb{R}$. Vi kaller A for totalt usammenhengende hvis hver gang $x, y \in A$ og $x < y$, så finnes $z \in \mathbb{R} \setminus A$ med $x < z < y$.

(a) Vis at $\mathbb{N}$ er totalt usammenhengende.

(b) Vis at $\mathbb{Q}$ er totalt usammenhengende.

(c) Forklar at også Cantormengda C er totalt usammenhengende.

Oppgave 19. Bestem arealet under grafen til ϕ.

Oppgaver til Seksjon 2.5

Oppgave 20. La I og $(I_j)_{j\in\mathbb{N}}$ være åpne delintervaller av $[0, 1]$.

(a) Forklar at $m([0, 1] \setminus I) = 1 - m(I)$.

(b) Anta $I_j \cap I_k = \emptyset$ hver gang $j \neq k$. Forklar at $m(\cup_j I_j) = \sum_j m(I_j)$

Oppgave 21. Ei mengde $A \subset \mathbb{R}$ kalles *ytremålbar* dersom

$$m(E) = m(A \cap E) + m(A^c \cap E) \text{ for alle } E \subset \mathbb{R}.$$

(a) Tegn hva denne betingelsen betyr når A og E er intervaller.

(b) Forsøk å bevise at et intervall (a, b) er ytremålbart (det er ikke så lett).

Du synes kanskje denne oppgava var litt rar. Du ser, en kan faktisk bevise at det finnes delmengder av $\mathbb{R}$ som ikke er ytremålbare. Dette visste Lebesgue og mange andre også på 1890-tallet. Men Lebesgue oppdaga at hvis (A_n) er en tellbar familie av ytremålbare mengder, så er unionen $\cup A_n$ også ytremålbar. Videre viste han at hvis (A_n) er parvis disjunkte ($A_i \cap A_j = \emptyset$ når $i \neq j$) så er $m(\cup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$. Det å ha funnet en verden av mengder der ytremålet oppfører seg ordentlig viste seg å bli startpunktet for en helt ny teori for integrasjon. Når ytremålet brukes på samlinga av ytremålbare mengder, snakker vi om *Lebesguemålet* på $\mathbb{R}$.

Oppgave 22. Vi skal lage en målemetode for delmengder av $\mathbb{N}$. La A være ei delmengde av $\mathbb{N}$ og list opp elementene i stigende rekkefølge, $A = n_1, n_2, \cdots$. Vi setter $r(A) = \sum_{n\in A} 2^{-n}$.

(a) Bestem $r(\{1\})$, r({1,2,3,4}) og $r(\mathbb{N})$.

(b) Hva blir $r(\emptyset)$?

(c) Forklar at r har følgende egenskaper:

 (i) $r(\emptyset) = 0$ og $r(\mathbb{N}) = 1$.

 (ii) Hvis A_k er ei samling parvis disjunkte delmengder av $\mathbb{N}$, så er $r(\cup_k A_k) = \sum_k r(A_k)$.

 En målemetode som oppfyller (i) og (ii) på $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kalles et *sannsynlighetsmål* på $\mathbb{N}$.

(d) La $2\mathbb{N}$ være partalla. Finn $r(2\mathbb{N})$ og finn også målet til oddetalla.

Oppgaver til Seksjon 2.6

Oppgave 23. Vis helt formelt at tellbare delmengder av $\mathbb{R}$ alltid er av første kategori.

Oppgave 24. Vi skal prøve å vise at komplementet til mengder av første kategori alltid er tette.

(a) Forklar at Baires teorem forteller at hvis F er av første kategori og (a, b) er et vilkårlig intervall, så inneholder (a, b) minst et x slik at $x \notin F$.

(b) La nå $y \in \mathbb{R}$ og slå et intervall I om y. Bruk (a) til å forklare at I inneholder et punkt fra F^c. Altså er F^c tett.

(c) Forklar at de trancendentale talla ligger tett i $\mathbb{R}$

Oppgave 25. Ta en titt på Dirichletfunksjonen i Seksjon 1.6.2 før du løser denne oppgava.

(a) Forklar at mengda av irrasjonale tall i intervallet $[0, 1]$ er av andre kategori.

(b) Bruk Teorem 2.37 til å forklare at vi ikke kan finne en funksjon som er kontinuerlig på de rasjonale talla i $[0, 1]$ og diskontinuerlig på de irrasjonale. Sammenlikn med Dirichletfunksjonen.

(c) Vis også at hvis f sine diskontinuitetspunkter er ei mengde av første kategori, så er f kontinuerlig på ei tett mengde. (Hint: Se Oppgave 24.)

Litteratur

[1] Colin Clark, *Elementary Mathematical Analysis, 2. ed.* Wadsworth Publishers of Canada, 1982.

[2] William Dunham, *The calculus gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue.* Princeton University Press, 2005.

[3] W. Rudin, *Principles of Mathemaical Analysis, 3. ed.* McGraw-Hill, 1976.

Kapittel 3

Derivasjon og deriverbarhet

La f være en reell funksjon. Hvis f har en noenlunde sympatisk graf, så kan vi lure på hvor bratt tangenten til grafen i punktet $(a, f(a))$ er. Første spørsmål vi skal stille er: Når kan vi finne denne brattheten på en fornuftig måte?

Vi ser på funksjonen $Q_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. For $x > a$ viser Q_a stigningen til en sekant mot høyre, mens Q_a viser stigningen til en sekant mot venstre når $x < a$.

Eksempel 3.1. La $f(x) = |x|$ og la $a = 0$. For $x > 0$ får vi $Q_0(x) = 1$, mens for $x < 0$ får vi $Q_0(x) = -1$. Vi ser at Q_0 har en sprangdiskontinuitet i 0.

3.1 Deriverbarhet i et punkt

La oss definere hva det betyr at f er deriverbar i punktet $x = a$.

Definisjon 3.2. *La f være en reell funksjon. f kalles* deriverbar *i punktet $x = a$ dersom $Q_a(x)$ har en triviell diskontinuitet for $x = a$, altså hvis*

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Hvis f er deriverbar i $x = a$, lar vi $Q_a(a) = \lim_{x\to a} Q_a(x)$. Dermed er funksjonen Q_a kontinuerlig i $x = a$. I stedenfor $Q_a(a)$ skriver vi vanligvis $f'(a)$.

La oss bruke litt av det vi kan om kontinuerlige funksjoner: Siden Q_a er kontinuerlig i $x = a$, så må Q_a være begrensa i et område $(a-\delta, a+\delta)$ om $x = a$. La oss kalle denne begrensinga for M. La nå x ligge i det punkterte intervallet $(a-\delta, a+\delta)_0$. Da er

$$|f(x) - f(a)| = |Q_a(x)| \cdot |(x-a)| \leq M\delta.$$

La nå $\varepsilon > 0$ og krymp så δ om nødvendig slik at vi også har at $|x-a| < \varepsilon/M$. Da oppnår vi at $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Altså har vi vist at $\lim_{x\to a} f(x)$ eksisterer og er lik $f(a)$. Med andre ord har vi:

Proposisjon 3.3. *Hvis f er deriverbar i $x = a$, så er f kontinuerlig i $x = a$.*

Fra Eksempel 3.1 ser vi at det omvendte av Proposisjon 3.3 ikke holder. Faktisk greide Weierstrass allerede på 1860-tallet å produsere en funksjon som er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$, men ikke deriverbar et eneste sted. Du kan lese om denne funksjonen på side 141 i [2].

Ved å bruke regneregler for grenser kan vi vise (se Oppgave 3):

Proposisjon 3.4. *La f og g være deriverbare i $x = a$ og la $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Da gjelder*

(i) Funksjonen $\alpha f + \beta g$ er deriverbar i $x = a$ med

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

(ii) Funksjonen fg er deriverbar i $x = a$ med $(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$.

(iii) Hvis $g(a) \neq 0$ og $g'(a) \neq 0$, så er funksjonen f/g deriverbar i $x = a$ med

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(a).$$

Vi har også følgende ekvivalente formulering av at f er deriverbar i $x = a$ (se Oppgave 4):

Proposisjon 3.5. *f er deriverbar i $x = a$ hvis og bare hvis*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

eksisterer. Vi har i såfall at grensa er lik $f'(a)$.

3.1.1 Derivert og tangent

La oss se på definisjonen av det å være deriverbar en gang til. Vi har altså $Q_a(x) \to f'(a)$, eller med andre ord, $Q_a(x) - f'(a) \to 0$. La oss sette $r(x) = Q_a(x) - f'(a)$. Når f er deriverbar i $x = a$ har vi dermed at

$$f(x) - f(a) = (x - a)[f'(a) + r(x)]. \tag{3.1}$$

Hvis vi setter $r(a) = 0$, blir r kontinuerlig i a og (3.1) holder for alle x der f er definert.

Vi kan drive denne leken lenger: Vi skriver først (3.1) som

$$f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)] = r(x)(x - a).$$

Siden r er kontinuerlig i a, finnes for alle $\varepsilon > 0$, et intervall I_ε om a slik at $|r(x)| < \varepsilon$. I dette intervallet har vi da

$$|f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]| \leq \varepsilon |x - a|,$$

med skarp ulikhet for alle $x \in I_\varepsilon, x \neq a$ og likhet for $x = a$.

Det er tid for å stoppe opp og tenke litt. Hva forteller dette oss? Jo, det sier at når f er deriverbar i $x = a$, så finnes et intervall om a der grafen til f er praktisk talt ei rett linje gjennom $(a, f(a))$, med stigningstall $f'(a)$ og konstantledd $f'(a) \cdot a - f(a)$. Vi summerer opp:

Proposisjon 3.6. *La f være deriverbar i $x = a$ og la $\varepsilon > 0$. Da finnes et intervall $(x - \delta, x + \delta)$ der*

$$|f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]| < \varepsilon |(x - a)|$$

for $x \neq a$ og slik at $f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)] = 0$ for $x = a$.

Proposisjon 3.6 forteller oss at approksimasjonen med den rette linja blir lineært bedre og bedre inn mot $x = a$. Proposisjon 3.6 karakteriserer deriverbarhet, vi har nemlig:

Proposisjon 3.7. *La f være definert i et område om a. Hvis det for hver $\varepsilon > 0$ finnes et intervall $(x-\delta, x+\delta)$ og ei fast rett linje $m(x-a)+b$ slik at*

$$|f(x) - [m(x-a)+b]| < \varepsilon|(x-a)|,$$

for $x \neq a$ og $f(x) - [m(x-a)+b] = 0$ for $x = a$, så er f deriverbar i $x = a$. Videre er $m = f'(a)$ og $b = f(a)$.

At $m = f'(a)$ og $b = f(a)$ viser altså at det finnes kun ei linje gjennom $(a, f(a))$ med egenskapen $|f(x) - [m(x-a)+b]| < \varepsilon|(x-a)|$ når vi kommer nær nok a. Vi kaller denne linja for *tangenten til grafen til f i $(a, f(a))$*. Av og til sier vi bare *tangenten til f i a*.

Bevis. Vi setter $x = a$ og får $|f(a) - b| = 0$. Dette gir $f(a) = b$. Altså vet vi at for hver $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at

$$|f(x) - m(x-a) - f(a)| < \varepsilon|(x-a)|$$

for alle $x \in (a - delta, a+\delta)_0$. Vi justerer litt på uttrykket og ser at for hver $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at

$$|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m| < \varepsilon$$

for alle $x \in (a - delta, a+\delta)_0$. Men dette betyr jo akkurat at $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ eksisterer og er lik m. □

Proposisjonene 3.6 og 3.7 gir oss et eksakt svar på når vi greit kan finne en tangent til grafen i punktet $(a, f(a))$, det skjer nøyaktig når f er deriverbar.

3.1.2 Kjerneregelen

Dersom en funksjon er sammensatt, har vi dette praktiske resultatet:

Proposisjon 3.8. *[Kjerneregelen] La $h(x) = f(g(x))$, altså $h = f \circ g$. Anta g er deriverbar i $x = a$ og at f er deriverbar i punktet $g(a)$. Da gjelder at h er deriverbar i $x = a$ med derivert*

$$h'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bevis. Vi bruker (3.1) på $h = f \circ g$ og får at

$$f(g(x)) - f(g(a)) = [f'(g(a)) - r(g(x))] \cdot [g(x) - g(a)],$$

der $r \to 0$ når $g(x) \to g(a)$. Vi dividerer med $x - a$ på begge sider og får:

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = [f'(g(a)) - r(g(x))] \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a},$$

Siden g er deriverbar i $x = a$, vet vi at g er kontinuerlig i $x = a$. Dermed vil $g(x) \to g(a)$ når $x \to a$, så $x \to a$ medfører $r(g(x)) \to 0$. Vi har altså

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} &= \lim_{x\to a} \left\{ [f'(g(a)) - r(g(x))] \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right\} \\
&= \lim_{x\to a} (f'(g(a) + r(g(x)) \cdot \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= f'(g(a)) \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

□

3.1.3 Utvidelser til to variabler

La oss skrive u og v for elementer i $\mathbb{R}^2$. Vi kan ikke generalisere Definisjon 3.2 direkte fordi divisjon i planet ikke gir mening. Men vi kan titte på den alternative formuleringa Proposisjon 3.5 og tenke oss to mulige definisjoner av derivert:

Definisjon 3.9. *La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.*

- *f kalles Gâteaux-deriverbar i punktet u dersom*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t}$$

  eksisterer for hver v med $\|v\| = 1$.

- *f kalles Fréchet-deriverbar i punktet u dersom*

$$\sup_{\|v\|=1} \lim_{t\to 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t}$$

  eksisterer.

Vi kan tenke på Fréchet-deriverbarhet som at f er Gâteaux-deriverbar og at det finnes ei retning u der grensa oppnås seinest. Vi kan vise at hvis f er Fréchet-deriverbar i u, så er f kontinuerlig i u (stort sett samme bevis som i en-variabel tilfellet). Men Gâteaux-deriverbarhet medfører ikke kontinuitet. La oss se et eksempel:

Eksempel 3.10. Definer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6 + y^3} & x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La oss vise at f ikke kan være kontinuerlig i $(0, 0)$. Siden $f(0, 0) = 0$, må $\lim_{u\to 0} f(u) = 0$. Dette betyr at for alle $\varepsilon > 0$ skal det finnes ei skive S med radius δ om $(0, 0)$ slik at $|f(u)| < \varepsilon$ for alle $u \in S$. Spesielt må da dette holde for $\varepsilon = 1$. Men la nå u komme mot $(0, 0)$ langs linja $y = x$. Da kommer u før eller siden inn i enhver skive om $(0, 0)$. Langs denne linja er $u = (x, x)$ og følgelig er $f(u) = \frac{x^5}{x^6+x^3} = \frac{x^2}{x^3+1}$ der. Men $f(u)$ blir jo bare større og større jo nærmere origo vi kommer. Dette viser at f har et uendelig sprang langs linja $y = x$, så den er langt fra kontinuerlig i $(0, 0)$.

La oss så vise at f er Gâteaux-deriverbar i origo. La da $\|v\| = 1$ og sett $v = (v_1, v_2)$. Nå er

$$\frac{f((0,0)+tv) - f(0,0)}{t} = \frac{(tv_1)^4(tv_2)}{t((tv_1)^6) + (tv_2)^3} = \frac{tv_1^4}{t^3v_1^6 + v_2^3}.$$

Så må vi huske på at v_1 og v_2 er vilkårlige men faste. Det er t som skal gå mot 0. Hvis $v_2 \neq 0$ er grensa 0. Hvis $v_2 = 0$ blir uttrykket vi skal ta grense til lik 0 for alle t, så da er også grensa 0. f har altså Gâteaux-derivert lik 0 i origo.

3.1.4 Retningsderiverte og partielt deriverte

At f er Gâteaux-deriverbar i u betyr at f har en derivert i hver retning v. Geometrisk betyr dette at i den retningen som vektor v peker, har grafen til f en tangent. Stigningen til denne tangenten kalles den *retningsderiverte i retning* v. Men stigningen til denne tangenten kan variere veldig, alt etter hvilken retning v vi velger.

Eksempel 3.11. La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være definert ved $f(x, y) = x^2 - y^2$. Vi skal finne den deriverte i $u = (1, 1)$ i retning $v = (1, 0)$. Vi finner

$$f(u + tv) = f((1, 1) + t(1, 0)) = f(1 + t, 1) = (1 + t)^2 - 1 = 2t + t^2.$$

Dette gir

$$f(u + tv) - f(u) = 2t + t^2 - (1^2 - 1^2) = 2t + t^2.$$

Dermed får vi

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 + 2t}{t} = \lim_{t\to 0} t + 2 = 2.$$

Tangenten til grafen i punktet $(1, 1)$ i retning $(1, 0)$ er altså 2.

Vi skal så finne den deriverte i $u = (1, 1)$ i retning $v = (0, 1)$. Vi finner

$$f(u + tv) = f((1, 1) + t(0, 1)) = f(1, 1 + t) = 1^2 - (1 + t)^2 = -2t - t^2.$$

Dette gir

$$f(u + tv) - f(u) = -2t + t^2 - (1^2 - 1^2) = -2t + t^2.$$

Dermed får vi

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2 - 2t}{t} = \lim_{t\to 0} -t - 2 = -2.$$

Tangenten til grafen i punktet $(1, 1)$ i retning $(0, 1)$ er altså -2.

I Eksempel 3.11 fant vi tangenter i retning $(1, 0)$ og $(0, 1)$, altså i retning øst og retning nord, om vi ser på grafen til f som et kart. Disse to retningsdriverte kaller vi *partielle deriverte.* Vanligvis kaller vi den retningsderiverte i retning $(1, 0)$ for den *partielt deriverte med hensyn på* x og den retningsderiverte i retning $(0, 1)$ for den *partielt deriverte med hensyn på* y. Vi pleier skrive disse to retningsderiverte som $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Eksempel 3.12. For $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definert ved $f(x, y) = x^2 - y^2$ har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y} = -2x.$$

3.1.5 Tangentplan

Vi så at deriverbarhet av en reell funksjon i et punkt betyr at funksjonen praktisk talt er lineær i et område om punktet. Vi kan vise at kravet om Fréchetderiverbarhet betyr at $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ praktisk talt er et plan i en skive om punktet. Mer presist:

Teorem 3.13. *Anta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er Fréchetderiverbar i punktet $u = (a, b)$ og la $\varepsilon > 0$. Da finnes ei skive S_u^R med en radius R om u og et entydig plan $P : z = \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma$ slik at*

- *Planet P og grafen til f faller sammen i u.*
- *Hvis $r < R$ og $v = (x, y) \in S_u^r$, så gjelder $|f(v) - P(v)| < \varepsilon \cdot r$.*
- *$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}|_u$, $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}|_u$ og $\gamma = f(u)$.*

Eksempel 3.14. Vi vil se på $f(x, y) = x^2 y$ i punktet $u = (a, b) = (2, 1)$. La oss først vise at f er Fréchetderiverbar i u. La da $v = (c, d)$, $\|v\| = 1$. Vi har $u + tv = (2, 1) + t(c, d) = (2 + tc, 1 + td)$. Dette gir

$$f(u + tv) = (2 + tc)^2(1 + td) = 4 + 4tc + t^2c^2 + 4td + 4t^2cd + t^3c^2d.$$

Vi har $f(u) = 4$. Dermed får vi

$$\begin{aligned}\frac{f(u + tv) - f(u)}{t} &= \frac{4tc + t^2c^2 + 4td + 4t^2cd + t^3c^2d}{t} \\ &= 4c + tc^2 + 4d + 4tcd + t^2c^2d \\ &= 4(c + d) + t(c^2 + 4cd) + t^2c^2d.\end{aligned}$$

Vi har $|c^2 + 4cd| \leq 5$ og $|c^2d| \leq 1$. Dermed vil

$$\sup_{\|v\|=1} \lim_{t\to 0} \frac{f(u + tv) - f(u)}{t} = 4(c + d).$$

Altså er f Fréchetderiverbar i u.

Nå vil vi finne tangentplanet P: Vi får $\frac{\partial f}{\partial x}|_u = 2xy|_{(2,1)} = 4$ og $\frac{\partial f}{\partial y}|_u = x^2|_{(2,1)} = 4$. Dermed er tangentplanet gitt ved

$$z = 4(x - 2) + 4(y - 1) + 4,$$

eller, om vi vil,

$$4x + 4y - z = 8.$$

En normalvektor til planet blir gitt ved $n = (4, 4, -1)$.

3.2 Deriverbarhet i et område

Nå skal vi studere deriverbarhetsbegrepet i en litt annen setting:

Definisjon 3.15. *La $A \subset \mathbb{R}$. f kalles* deriverbar over *A dersom f er deriverbar for alle $a \in A$.*

Følgende eksempel er viktig, det viser at vi ikke kan ta for gitt at funksjonen som viser brattheten til tangenten er pen:

Eksempel 3.16. La

$$U(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Når $x \neq 0$ er U deriverbar med derivert $U'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. Det som er spennende er når $a = 0$. Da har vi at

$$\frac{U(x) - U(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = x\sin(1/x)$$

Men $|x\sin(1/x)| \leq |x|$ og $|x| \to 0$. Dette viser at $U'(0) = 0$.

Nå er bare problemet det at $\lim_{x\to 0}[2x\sin(1/x) - \cos(1/x)]$ ikke eksisterer. Altså er U deriverbar over $\mathbb{R}$ og U' er diskontinuerlig i 0.

Definisjon 3.17. *La $A \subset \mathbb{R}$. f kalles* kontinuerlig deriverbar over A *dersom f' er kontinuerlig på A.*

Vi pleier skrive $D(A)$ for mengda av deriverbare funksjoner over A og $D^1(A)$ for mengda av kontinuerlig deriverbare funksjoner over A. Eksempel 3.16 viser altså at $D_1(A)$ er ekte inneholdt i $D(A)$.

Vi kan jo lure på hvor diskontinuerlig en derivert egentlig kan være. Følgende resultat indikerer kanskje at de ikke er så langt unna å være kontinuerlige.

Teorem 3.18. *[Darboux's teorem] Anta $f \in D([a, b])$. Da holder følgende versjon av den generaliserte skjæringssetningen for f', nemlig: f' antar alle verdier fra og med $f'(a)$ til og med $f'(b)$.*

Bevis. Hvis $f'(a) = f'(b)$ er der ingenting å vise. La oss anta $f'(a) < f'(b)$, tilfellet $f'(a) > f'(a)$ har helt likt bevis. Vi må vise at hvis $f'(a) < r < f'(b)$, så finnes $c \in (a, b)$ med $f'(c) = r$. Se på $g(x) = f(x) - rx$. g er deriverbar over $[a, b]$. Siden g er kontinuerlig på $[a, b]$ oppnår g sitt minimum et sted i $[a, b]$. Kall dette stedet c.

Så er $g'(x) = f'(x) - r$ for alle $x \in [0, 1]$. Vi har $g'(a) = f'(a) - r < 0$ og $g'(b) = f'(b) - r > 0$. Men g er deriverbar og har minimum i $x = c$. Da må $g'(c) = 0$ (se Oppgave 5.) Altså ligger c et sted i (a, b). At $g'(c) = 0$ kan skrives $f(c) - r = 0$, som gir $f(c) = r$. □

Nå viser det seg at deriverte kan ha mange diskontinuitetspunkter. En ung italiener, Vito Volterra[1], konstruerte i 1881 en deriverbar funksjon der den deriverte har tellbart uendelig mange diskontinuitetspunkter. Der røk drømmen om at deriverte er veldig sympatiske. Men geniet Baire viste i 1899 at *hvis f er deriverbar på $[a, b]$, så er f' kontinuerlig bortsett fra på ei høyst tellbar mengde.* Altså finnes det ikke noe verre enn det eksemplet Volterra hadde kommet opp med.

3.2.1 Littegrann om analytiske funksjoner

I det komplekse planet $\mathbb{C}$ eksisterer divisjon og vi kan generalisere Definisjon 3.2 til funksjoner definert på $\mathbb{C}$ med verdier i $\mathbb{C}$. La oss bare være enige om å skrive runde skiver om komplekse tall c med radius r som $D(c, r)$. Dersom vi tar bort punktet c fra skiva, skriver vi $D'(c, r)$. Dessuten pleier vi snakke om *disker* i det komplekse planet.

[1]Volterra levde 1860-1940, så han var bare 21 år da hans eksempel ble publisert.

Definisjon 3.19. *La $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være en kompleks funksjon. f kalles* deriverbar *i punktet $z = c$ med derivert lik $f'(c)$ dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at når $z \in D'(c, \delta)$, så er*

$$\left| \frac{f(z) - f(c)}{z - c} - f'(c) \right| < \varepsilon.$$

Eksempel 3.20. La $f(z) = z^2$. La $c \in \mathbb{C}$. Da er

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \frac{z^2 - c^2}{z - c} = z + c.$$

Når $z \to c$ vil dette uttrykket gå mot $2c$.

Vi kaller z et indre punkt i $\Omega \subset \mathbb{C}$ dersom det finnes en disk om z inneholdt i Ω, og vi kaller Ω åpen dersom alle punkter i Ω er indre punkter.

Definisjon 3.21. *La $\Omega \subset \mathbb{C}$ være åpen og la $f : \Omega \to \mathbb{C}$. f kalles* analytisk *i Ω dersom f er deriverbar over Ω.*

Noen sier *holomorf* istedenfor analytisk. Vi så at i det reelle tilfellet, så kunne deriverbarhet over ei åpen mengde fortsatt gi stygge deriverte. Men det å oppfylle Definisjon 3.19 er et ganske strengt krav og det viser seg at hvis f er analytisk i Ω, så er f' også analytisk i Ω. Dermed er altså alle f sine deriverte analytiske i Ω. Dette visste allerede Cauchy tidlig på 1800-tallet.

Teorien for analytiske funksjoner er noe av det peneste en kan tenke seg. Den fineste innføringa tror jeg nok er [3]

3.2.2 Middelverdisetningen

En svært viktig setning om deriverbare funksjoner er den såkalte middelverdisetningen. Denne setningen sier grovt sagt at hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er deriverbar over et intervall (a, b) og vi trekker den rette linja (sekanten) fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$, så må det finnes et sted c mellom a og b der grafen har en tangent parallell til sekanten (se Figur 3.1).

Vi skal først vise et spesialtilfelle, nemlig når $f(a) = f(b) = 0$, dvs. når sekanten bare er intervallet $[a, b]$.

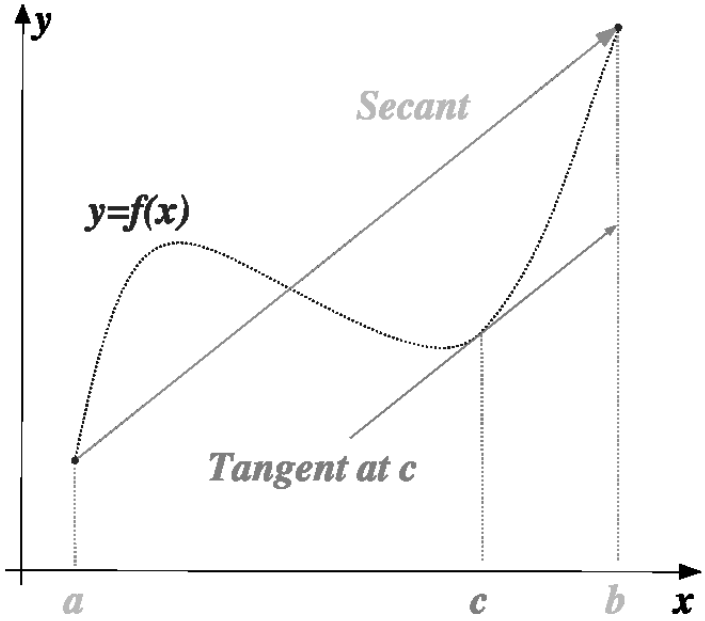
Lemma 3.22. *[Rolles teorem] La $f \in C[a, b]$ og $f \in D(a, b)$, dvs f er deriverbar på det indre av det lukka intervallet der f er kontinuerlig. Anta videre at $f(a) = f(b) = 0$. Da finnes $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = 0$.*

Bevis. Siden $f \in C[a, b]$, finnes $c_1, c_2 \in [a, b]$ slik at $f(c_1)$ er maksimum og $f(c_2)$ er minimum til f over $[a, b]$. Hvis $f(c_1) = f(c_2) = 0$, må $f = 0$, og da kan vi velge en hvilken som helst $c \in [a, b]$. Vi kan derfor anta at minst en av $f(c_1)$ og $f(c_2)$ er ulik 0. Hvis $f(c_1) \neq 0$, så er $c_1 \in (a, b)$. Siden f har maksimum i c_1, må $f'(c_1) = 0$. Velg $c_1 = c$. Hvis $f(c_1) = 0$, må $f(c_2) \neq 0$. Siden f har minimum i c_2, må $f'(c_2)$. □

Fra Rolles teorem er ikke veien lang til

Teorem 3.23. *[Middelverditeoremet] La $f \in C[a, b] \bigcap D(a, b)$. Da finnes $c \in (a, b)$ slik at*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Figur 3.1: Illustrasjon av middelverditeoremet (bildet er stjålet fra http://www.sosmath.com/calculus/diff/der11/der11.html).

Bevis. La L være den rette linja gjennom punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$, dvs

$$L(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Nå setter vi $g(x) = f(x) - L(x)$. Da oppfyller g betingelsene i Rolles teorem (Lemma 3.22). Altså finnes $c \in (a, b)$ der $g'(c) = 0$. Men $0 = g'(c) = f'(c) - L'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dette gir $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, som vi ville vise. $\square$

Først nå er vi stand til å vise følgende resultat!

Korollar 3.24. *Hvis $f \in D(a, b)$ og $f' = 0$ for alle $x \in (a, b)$, så er f konstant på (a, b).*

Bevis. Anta f ikke var konstant, dvs. det finnes $r < s \in [a, b]$ der $f(r) \neq f(s)$. Legg merke til at $\frac{f(s)-f(r)}{s-r} \neq 0$ og at $f \in D(r, s) \cap C[r, s]$. Dermed gir Middelverdisetningen et $c \in (r, s) \subset (a, b)$ der $f'(c) \neq 0$. $\square$

Og dette!

Korollar 3.25. *Hvis $f \in D(a, b)$ og $f' > 0$ for alle $x \in (a, b)$, så er f strengt økende på (a, b).*

Bevis. Anta f ikke var strengt økende, dvs. det finnes $r < s \in [a, b]$ der $f(r) \geq f(s)$. Legg merke til at $\frac{f(s)-f(r)}{s-r} \leq 0$ og at $f \in D(r, s) \cap C[r, s]$. Dermed gir Middelverdisetningen et $c \in (r, s) \subset (a, b)$ der $f'(c) \leq 0$. $\square$

La oss avslutte med et eksempel som viser at vi trenger forutsetningene i Middelverditeoremet for å oppnå konklusjonen.

Eksempel 3.26. La f være definert på $[0,1]$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Da er sekantens stigning 0, mens $f'(c) \geq 1/2$ for alle $x \in (0,1)$.

3.3 Oppgaver

Oppgaver til Seksjon 3.1

Oppgave 1. Anta f er deriverbar i $x = a$. Finn tangenten til f for $x = a$ når

(a) $f(x) = x^3$ og $a = 1$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ og $a = 2$.

Oppgave 2. Verifiser at forutsetningene for å bruke kjerneregelen er oppfylt i følgende tilfeller:

(a) $f(x) = (1 + 2x)^4$ og $a = 0$.

(b) $f(x) = \sin e^x$ og $a = 1$.

Oppgave 3. Bevis Proposisjon 3.4.

Oppgave 4. Bevis Proposisjon 3.5.

Oppgave 5. Anta g er deriverbar i et område D rundt $x = c$. c kalles et minimum for g over D dersom $x \in D$ medfører $g(x) \geq g(c)$.

(a) Vis at hvis g har et minimum over D for $x = c$, så er $g'(c) = 0$.

(b) Vis eller motbevis: Hvis $g'(c) = 0$, så finnes et område D rundt c slik at c er et minimum for g over D.

Oppgaver til Seksjon 3.2

Oppgave 6. Vis at hvis $f'(x) = g'(x)$ for alle $x \in (a,b)$, så er $f(x) = g(x) + C$, der C er en konstant.

Oppgave 7. Vi at hvis $f''(x) = 0$ for alle $x \in (a,b)$, så er $f(x) = rx + s$, der r, s er konstanter.

Oppgave 8. La f være definert på intervallet $[0,b]$ ved at $f(x) = \sqrt{x}$. Finn $c \in (0,b)$ som oppfyller

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{f(b)}{b} = \frac{\sqrt{b}}{b}.$$

Oppfyller f betingelsene i middelverditeoremet?

Litteratur

[1] Colin Clark, *Elementary Mathematical Analysis, 2. ed.* Wadsworth Publishers of Canada, 1982.

[2] William Dunham, *The calculus gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue.* Princeton University Press, 2005.

[3] Theodore W. Gamelin, *Complex Analysis.* Springer UTM, 2003.

[4] W. Rudin, *Principles of Mathemaical Analysis, 3. ed.* McGraw-Hill, 1976.

Kapittel 4

Integrasjon og integrerbarhet

Når en kontinuerlig reell funksjon f er gitt ved et funksjonsuttrykk, og f er den deriverte av en funksjon F, som vi også kjenner et uttrykk for, finner vi arealet (med fortegn) mellom grafen til f, x-aksen, og linjene $x = a$ og $x = b$, ved $F(b) - F(a)$. At dette er slik var godt kjent for Newton og Leibniz, som uavhengig av hverandre oppdaget denne sammenhengen på 1660-tallet.

Anta f og F er definert overalt og at f er kontinuerlig. Hvis vi kan vise at arealet mellom grafen, x-akse, y-akse og linja $x = a$, er gitt ved $F(a) - F(0)$, følger resultatet over. La $A(z)$ være arealet mellom grafen, x-akse, y-akse og linja $x = z$. Da er $A(z + t) - A(z)$ arealet av ei stripe under grafen. Når t minker, vil kontinuiteten til f tvinge høyden av denne stripa til å nærme seg $f(z)$, så arealet av stripa, $A(z+t) - A(z)$, blir mer og mer likt $f(z) \cdot t$. Dermed får vi at $(A(z+t) - A(z))/t \to f(z)$. Dette forklarer at arealfunksjonen er en antiderivert F med $F(0) = 0$.

Og slik er det vi lærer integrasjon i skolen, vi kaller det gjerne *Newtonsk integrasjon.* Forutsetningene for å finne *Newtonintegralet* er ganske sterke, men likevel kjenner vi arealfunksjonen F tilhørende f i mange tilfeller. Men hva skal vi mene med integral når ikke vi kjenner F? Eller enda verre, når vi ikke har et funksjonsuttrykk for f engang!

Vi griper fatt i argumentet der vi så at $A(z + t) - A(z)$ nesten var arealet av rektangler med bredde t og høyde $f(z)$. Denne ideen fører til skrivemåten, introdusert av Leibniz,

$$A(z) = \int_0^z f(x)\,dx.$$

Integraltegnet er en lang S for sum, mens $f(x)\,dx$ skal henspeile på arealet av de «uendelig smale» rektanglene. Vi fortsetter å skrive arealet mellom grafen til f og x-aksen på denne måten, også når vi ikke kjenner funksjonsuttrykk for F eller f. Men vi må spørre som Riemann gjorde i sitt Habilitationsschrift i 1854:

Hva skal vi egentlig forstå med $\int_a^b f(x)\,dx$ og for hvilke funksjoner f har integralet i det hele tatt mening?

Se på Diricletfunksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Har det mening å snakke om $\int_0^1 f(x)\,dx$ i dette tilfellet? Tja, innenfor Riemanns teori får ikke dette mening, mens innenfor Lebesgues teori får det mening. La oss starte med Riemanns teori.

4.1 Riemannintegralet à la Riemann

Vi skal følge Riemanns egen framstilling, men utnytte at vi, i motsetning til Riemann, kan bruke komplettheten av de reelle tall. Riemann utvikla sin teori 16 år før denne komplettheten ble bevist. De fleste framstillinger følger en ekvivalent versjon utvikla av Darboux. Vi skal kort skissere Darboux' teori etter vi har forklart Riemanns teori. Vi følger i stor grad framstillinga som er gitt på sidene 101-107 i [2].

4.1.1 Partisjoner, Riemannsummer og oscillasjon

Riemanns teori omhandler *begrensa* funksjoner på intervaller $[a, b]$. Som intuisjon skal vi tenke oss at det blir vanskelig å snakke om areal dersom grafen jumper for mye opp og ned på deler av $[a, b]$. La oss gå igang:

En *partisjon* av $[a, b]$ er ei endelig samling,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b = x_n.$$

Vi kaller det en partisjon eller oppdeling fordi vi ved hjelp av $x_0, x_1, \cdots, x_n$ kan dele $[a, b]$ i delintervaller $E_i = [x_{i-1}, x_i]$. Vi får altså

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-2}, x_{n-1}] \cup [x_{n-1}, x_n] = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Bredden av intervallet $E_i = [x_{i-1}, x_i]$ er $\delta_i = x_i - x_{i-1}$.

Riemann tenkte seg nå et estimat av arealet av stripa under grafen på intervallet E_i som bredden δ_i multiplisert med f evaluert ett eller annet sted i intervallet E_i. Hvis ε_i er et tall i intervallet $[0, 1]$, så kan vi beskrive «ett eller annet sted i intervallet E_i» ved $x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i$. Ved å la ε_i variere over hele $[0, 1]$ får vi alle mulige steder i E_i.

Et estimat av arealet mellom grafen til f, x-aksen og de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$ følger nå ved å sette

$$\begin{aligned} S &= \delta_1 \cdot f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 \cdot f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \cdots + \delta_n \cdot f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot f(x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i). \end{aligned}$$

Vi kaller dette en *Riemannsum.* Verdien til Riemannsummen variererer med valg av partisjon og valg av $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$.

Litt løselig sagt er nå Riemannintegrerbarhet at uansett hvilke E_i og ε_i, så vil S nærme seg samme tallet A når $\delta_i \to 0$.

La oss forsøke å presisere at $S \to A$ når $\delta_i \to 0$. Vi innfører størrelsen $d = \max_{1 \le i \le n} \delta_i$, altså d er den største bredde på delintervallene. Vi kaller d for *normen* til partisjonen π og vi skriver dette $|\pi| = d$. At alle $\delta_i \to 0$ kan vi nå uttrykke ved at $d \to 0$. Nå kan vi tenke oss sekvenser av partisjoner (π_n) med $d_n = |\pi_n| \to 0$. For hver (π_n) kan vi tenke oss et valg av evalueringssteder for f i hvert delintervall som vi kan betegne med $(\varepsilon_i^n)_{i=1}^{k_n}$. Da dukker det for hver n opp en Riemannsum S_n. Nå kan vi definere Riemannintegrerbarhet:

Definisjon 4.1. *En begrensa funksjon definert på* $[a, b]$ *kalles* Riemannintegrerbar *dersom det finnes et entydig reelt tall* A *slik vi for hvert valg av* (π_n) *med* $|\pi_n| \to 0$ *og hvert valg av tilhørende evalueringssteder* $(\varepsilon_i^n)_{i=1}^{k_n}$ *har at* $S_n \to A$. *Vi kaller* A *for* Riemannintegralet av f over $[a, b]$ *og skriver* $A = \int_a^b f(x)\, dx$.

Eksempel 4.2. La oss nå se at

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

ikke er Riemannintegrerbar over $[0, 1]$. La π være en vilkårlig partisjon. Da kan vi velge rasjonale evalueringssteder (ε_i). Dette gir $S = 1$. Eller vi kan velge irrasjonale evalueringssteder (ε_i). Dette gir $S = 0$.

Et problem med Definisjon 4.1 er at det er så mange størrelser involvert. Vi skal nå innføre alternative størrelser for å gjøre dette kravet lettere å argumentere med: La π være en partisjon med delintervaller (E_i). På hvert delintervall E_i har f et supremum M_i og et infimum m_i (her bruker vi kompletthet). Differensen $D_i = M_i - m_i$ kaller vi *oscillasjonen* til f over E_i. Siden f er forutsatt å være begrensa, er D_i'ene alle endelige tall. Som et hendig verktøy innførte nå Riemann en ny sum:

$$R = \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots \delta_n D_n.$$

Du ser et bilde som illusterer R i Figur 4.1. Vi skriver R_π^f hvis det er nødvendig å presisere over hvilken partisjon π og hvilken f vi har funnet R. Av og til er det også fornuftig å skrive m_i^f, M_i^f og D_i^f.

For hvert valg av partisjon π får vi en R_π^f. Anta $|\pi| \le d$. Mengda av tall R_π^f med $|\pi| \le d$ er opptil begrensa, siden f er begrensa. Da gir kompletthetsaksiomet at det må finnes et supremum for denne mengda, et slags «verre enn verste valg av delintervaller E_i.» La oss kalle dette supremumet for $\Delta^f(d)$. Vi har altså

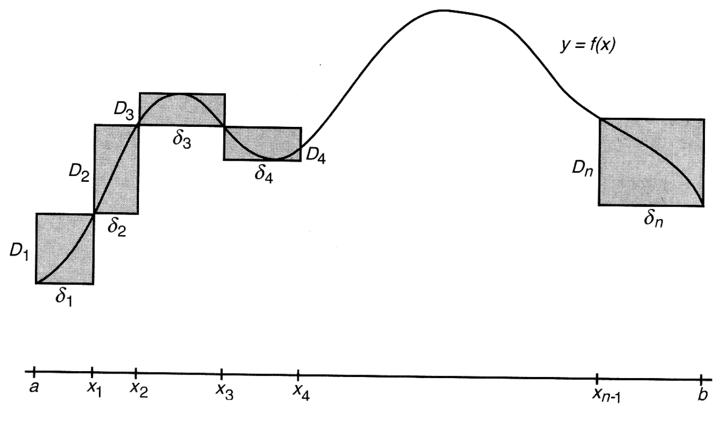
$$\Delta^f(d) = \sup_{|\pi| \le d} R_\pi^f.$$

Trenger vi ikke spesifisere hvilken funksjon f det gjelder, skriver vi bare $\Delta(d)$ og R_π. Nå er vi klare til å gi en alternativ test for Riemannintegrerbarhet:

Proposisjon 4.3. *En begrensa funksjon definert på* $[a, b]$ *er Riemannintegrerbar hvis og bare hvis* $\lim_{d \to 0} \Delta(d) = 0$.

Bevis. At $\lim_{d \to 0} \Delta(d) = 0$ betyr at $\sup_{|\pi| \le d} R_\pi^f \to 0$. Dette betyr at for enhver følge $d_n \to 0^+$ vil $\sup_{|\pi| \le d_n} R_\pi^f \to 0$. Men det må medføre at for enhver følge $d_n \to 0^+$ og enhver følge $|\pi_n|$ av partisjoner med $|\pi_n| \le d_n$, så må $R_{\pi_n}^f \to 0$. La oss tenke oss $\pi_n = (E_i^n)_{i=1}^{k_n}$. Med $M_i^n = \sup_{E_i^n} f$ og $m_i^n = \inf_{E_i^n} f$ får vi da at

$$\delta_1^n M_1^n + \delta_2^n M_2^n + \cdots \delta_{k_n}^n M_{k_n}^n - (\delta_1^n m_1^n + \delta_2^n m_2^n + \cdots \delta_{k_n}^n m_{k_n}^n) \to 0$$



Figur 4.1: Illustrasjon av summen R (bildet er stjålet fra [2, s.103]).

når $n \to \infty$. La nå $(\varepsilon_i)_{i=1}^{k_n}$ være vilkårlige evalueringssteder tilhørende π_n og la S_n være tilhørende Riemannsum. Vi må ha at

$$\delta_1^n M_1^n + \delta_2^n M_2^n + \cdots \delta_{k_n}^n M_{k_n} \geq S_n \geq \delta_1^n m_1^n + \delta_2^n m_2^n + \cdots \delta_{k_n}^n m_{k_n}.$$

Nå følger det at $\lim_{d\to 0} \Delta(d) = 0$ er tilstrekkelig krav til å sikre Riemannintegrerbarhet.

At $\lim_{d\to 0} \Delta(d) > 0$ betyr at det finnes et $\gamma > 0$ med $\sup_{|\pi|\leq d} R_\pi^f > \gamma$ for alle $d > 0$. Dette betyr at for enhver d finnes partisjon π_d med $|\pi_d| \leq d$ men $R_\pi^f > \gamma$. Altså, for enhver d finnes partisjon π_d med $|\pi_d| \leq d$ men

$$\delta_1^d M_1^d + \delta_2^d M_2^d + \cdots \delta_{k_d}^d M_{k_d}^d - (\delta_1^d m_1^d + \delta_2^d m_2^d + \cdots \delta_{k_d}^d m_{k_d}^d) > \gamma.$$

Velg nå evalueringspunkter $(\varepsilon_i^1)_{i=1}^{k_d}$ og $(\varepsilon_i^2)_{i=1}^{k_d}$ slik at de tilhørende Riemannsummer, S_d^1 og S_d^2, oppfyller

$$\delta_1^d M_1^d + \delta_2^d M_2^d + \cdots \delta_{k_d}^d M_{k_d}^d - S_d^1 < \gamma/4 \quad \text{og} \quad S_d^2 - \delta_1^d m_1^d + \delta_2^d m_2^d + \cdots \delta_{k_d}^d m_{k_d}^d < \gamma/4.$$

Da er $S_d^1 - S_d^2 > \gamma/2 > 0$ for alle og kan følgelig ikke konvergere til samme tall A når $d \to 0$.

□

Eksempel 4.4. La oss se at

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

ikke er Riemannintegrerbar på $[0, 1]$ ved å bruke Proposisjon 4.3. For hver partisjon er nemlig $D_i = M_i - m_i = 1 - 0 = 1$ for alle i. La nå $d > 0$. La n slik at $1/n < d$. Del $[0, 1]$ i n like lange biter. Over denne partisjonen får vi $R = n \cdot \frac{1}{n}$. Så for hver d er $\Delta(d) \geq 1$. Men da kan ikke $\lim_{d\to 0} \Delta(d) = 0$.

La oss kalle mengda av Riemannintegrerbare funksjoner på $[a, b]$ for $R[a, b]$. Vi har følgende teorem, som vel må betraktes som en god nyhet:

Teorem 4.5. *$R[a, b]$ er et vektorrom.*

Bevis. Vi må vise at dersom $f, g \in R[a,b]$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, så er $h = \alpha f + \beta g \in R[a,b]$. Vi skal dele problemet i to ved å vise at $R[a,b]$ er lukket under multiplikasjon med reell skalar α og at $R[a,b]$ er lukket under addisjon.

Først lar vi $\alpha \in \mathbb{R}$ og $f \in R[a,b]$ og tar sikte på å vise at $F = \alpha f \in R[a,b]$. Vi merker oss at oscillasjonen til F over et delintervall E_i er lik α ganger oscillasjonen til f over E_i. Dermed er R^F for denne partisjonen lik αR^f. Men det må bety at $\Delta^F(d) = \alpha\Delta^f(d)$. Siden $\Delta^f(d) \to 0$, vil også da $\Delta^F(d) \to 0$.

Litt verre for summen $G = f + g$. La $\varepsilon > 0$. Det finnes en d_1 slik at $\Delta^f(d_1) < \varepsilon/2$ og en d_2 slik at $\Delta^g(d_2) < \varepsilon/2$. Om vi setter $d = \min(d_1, d_2)$, vil vi ha både $\Delta^f(d) < \varepsilon/2$ og $\Delta^g(d) < \varepsilon/2$. Kan vi si noe om $\Delta^G(d)$? Ja, la (E_i) være en partisjon der hver E_i har en lengde høyst d. Vi har

$$\sup_{E_i} G = \sup_{E_i}(f + g) \leq \sup_{E_i} f + \sup_{E_i} g$$

og

$$\inf_{E_i} G = \inf_{E_i}(f + g) \geq \inf_{E_i} f + \inf_{E_i} g.$$

Men da har vi at oscillasjonen til G over E_i må være begrensa av summen av oscillasjonene til f og g. Dermed er $R^G \leq R^f + R^g$. Men da må $\Delta^G(d) \leq \Delta^f(d) + \Delta^g(d) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. □

4.1.2 Uniform kontinuitet og Riemannintegrerbarhet av kontinuerlige funksjoner

Vi skal ta et steg til side på veien mot det å vise at kontinuerlige funksjoner er Riemannintegrerbare på $[a,b]$. Hvis $f \in C[a,b]$, $\varepsilon > 0$ og $z \in [a,b]$, kan vi finne $\delta(z)$ slik at når $x \in (z - \delta, z + \delta)$, så er $f(x) \in (f(z) - \varepsilon, f(z) + \varepsilon)$. Vi kan altså påvise en δ for hver z. Men vi skal se at når f er definert over et *lukka* intervall, så kan vi finne en δ som virker for alle z'ene samtidig. Vi sier at f er *uniformt kontinuerlig over* $[a,b]$.

Teorem 4.6. *En kontinuerlig funksjon er uniformt kontinuerlig over ethvert lukka begrensa delintervall av sin definisjonsmengde.*

Bevis. Anta ikke. Velg et lukka, begrensa delintervall I der resultatet ikke holder. La $\varepsilon > 0$. Det må finnes et x_1 der $\delta = 1/2$ ikke holder i definisjonen av kontinuitet, Altså finnes et y_1 med

$$|x_1 - y_1| < 1/2 \qquad \text{men} \qquad |f(x_1) - f(y_1)| \geq \varepsilon.$$

Tilsvarende må det finnes et x_2 der $\delta = 1/4$ ikke holder i definisjonen av kontinuitet. Altså finnes et y_2 med

$$|x_2 - y_2| < 1/2^2 \qquad \text{men} \qquad |f(x_2) - f(y_2)| \geq \varepsilon.$$

Sånn holder vi på og ender opp med følger (x_k) og (y_k) der

$$|x_k - y_k| < 1/2^k \qquad \text{men} \qquad |f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon. \tag{4.1}$$

Siden I er begrensa har (x_k) ei konvergent delfølge (X_k). Siden I er lukka, ligger grensa x i I. Kall den tilsvarende delfølga av (y_k) for (Y_k). Siden $|X_k - Y_k| < 1/2^k$, må $Y_k \to x$ også.

Nå begynner det å tette seg til her; siden f er kontinuerlig, må

$$\lim_{k\to\infty} f(X_k) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(X_k).$$

Men det må bety at før eller siden har vi $|f(X_k) - f(Y_k)| < \varepsilon$, som er i dyp konflikt med (4.1). $\square$

Nå kan vi vise at kontinuerlige funksjoner på $[a, b]$ er integrerbare funksjoner på $[a, b]$.

Teorem 4.7. $R[a, b] \supset C[a, b]$.

Bevis. La $f \in C[a, b]$ og la $\varepsilon > 0$. Vi må finne en $d > 0$ slik at $\Delta^f(d) < \varepsilon$. Vi kan, ved uniform kontinuitet, finne et $\delta > 0$ slik at når $|x - y| < \delta$, så er $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Hva står det her? Jo, for intervaller E med bredde mindre enn δ, så er oscillasjonen til f over E begrensa av $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Skal vi forsøke med $d = \delta$? Velg da en vilkårlig partisjon $(E_i)_{i=1}^n$ med største delintervall ikke lenger enn δ. Da er

$$\begin{aligned} R &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\delta_1 + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\delta_2 + \cdots + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\delta_n \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^n \delta_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Men da får vi $\Delta^f(d) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. $\square$

4.1.3 Riemanns integrerbarhetskriterium (Ikke pensum)

Vi greide nå å vise at kontinuerlige funksjoner er integrerbare og at rommet av integrerbare funksjoner er lineært. Men Riemann var en ærgjerrig kar, han gikk videre for å finne alternative formuleringer av at $\int_a^b f(x)\,dx$ har mening. I Eksempel 4.4 gikk ting galt fordi oscillasjonen til f aldri kommer under 1 på noe delintervall. Vi skal se at Dirицletfunksjonen er ganske langt fra å være Riemannintegrerbar, den oscillerer mye for mye. La oss gjøre dette mer presist, igjen følger vi Riemanns egen framstilling:

La $\sigma > 0$ og $(E_i)_{i=1}^n$ være en partisjon av $[a, b]$. Vi kan dele E_i'ene i to typer: Type A er de der oscillasjonen til f er større enn σ. De andre er av Type B. Så vi har at

$$b - a = \sum_{\mathrm{T}ypeA} \delta_i + \sum_{\mathrm{T}ypeB} \delta_i \overset{\text{def}}{=} s(\sigma) + \sum_{\mathrm{T}ypeB} \delta_i.$$

Hvis det for hver $\sigma > 0$ er mulig å finne en $d > 0$ slik at $s(\sigma)$ blir vilkårlig liten, må det si noe om at store endringer må foregå på mengder hvis lengder summerer seg til noe vi ikke trenger bry oss om. Uansett, her er Riemanns integrerbarhetskriterium:

Teorem 4.8. *En begrensa funksjon f er Riemannintegrerbar på $[a, b]$ hvis og bare hvis vi for hvert $\sigma > 0$ og hvert $\varepsilon > 0$ kan finne $d > 0$ slik at $s(\sigma) < \varepsilon$. Eller sagt med andre ord: For hvert $\sigma > 0$, er $\lim_{d\to 0} s(\sigma) = 0$.*

Bevis. Anta først $f \in R[a,b]$, $\sigma > 0$ og $\varepsilon > 0$. Vi skal finne d med $s(\sigma) < \varepsilon$. Vi skal vise den interessante ulikheten

$$0 \leq s(\sigma) \leq \frac{\Delta(d)}{\sigma} \qquad \text{for alle } 0 < d < b - a. \tag{4.2}$$

Siden σ er fast og $f \in R[a,b]$, vil $\frac{\Delta(d)}{\sigma} \to 0$ når $d \to 0$. Så for liten nok d, er da $s(\sigma) < \varepsilon$.

La d være gitt og la $(E_i)_{i=1}^n$ være en partisjon av $[a,b]$ med norm høyst d. Vi har

$$R = D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n \geq \sum_{\mathrm{T}ypeA} D_i\delta_i \geq \sum_{\mathrm{T}ypeA} \sigma\delta_i = s(\sigma) \cdot \sigma.$$

På den annen side er $R \leq \Delta(d)$. Vi kombinerer og får

$$0 \leq s(\sigma) \cdot \sigma \leq \Delta(d),$$

som er det samme som (4.2).

Det var halvveis: Nå skal vi vise at hvis f er begrensa på $[a,b]$ og vi for hver $\sigma > 0$ har $\lim_{d \to 0} s(\sigma) = 0$, så er f Riemannintegrerbar. Vi skal vise $\lim_{d \to 0} \Delta(d) = 0$.

Vi skal først leke litt med en vilkårlig partisjon $(E_i)_{i=1}^n$ og $\sigma > 0$. Vi har

$$R = \sum_{\mathrm{T}ypeA} D_i\delta_i + \sum_{\mathrm{T}ypeB} D_i\delta_i$$

La D være oscilasjonen til f over hele $[a,b]$, da er selvsagt $D \geq D_i$ for alle i. Dessuten vet vi at D er endelig, siden f er antatt å være begrensa. Dette gir

$$\sum_{\mathrm{T}ypeA} D_i\delta_i \leq D \cdot \sum_{\mathrm{T}ypeA} \delta_i = D \cdot s(\sigma)$$

Når det gjelder Type B intervallene, har vi

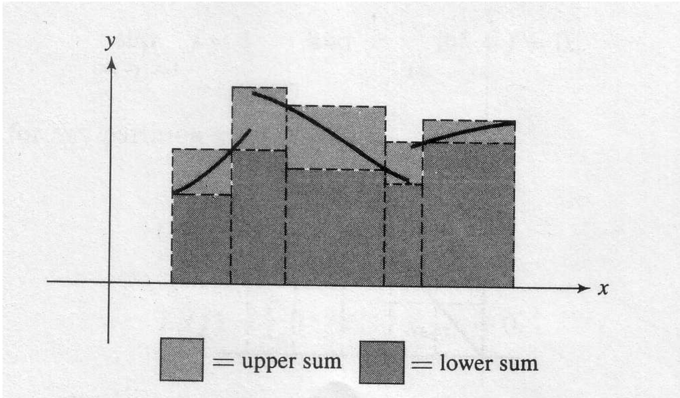
$$\sum_{\mathrm{T}ypeB} D_i\delta_i \leq \sigma \sum_{\mathrm{T}ypeB} \delta_i \leq \sigma(b-a).$$

Dette gir oss

$$R \leq D \cdot s(\sigma) + \sigma(b-a).$$

Siste innspurt gjenstår: La $\varepsilon > 0$. Velg en σ slik at $\sigma(b-a) < \varepsilon/2$. Bruk så hypotesen om at $\lim_{d \to 0} s(\sigma) = 0$ til å tvinge fram $s(\sigma) < \varepsilon/2D$. Dette viser at $\lim_{d \to 0} \Delta(d) = 0$. □

Dette argumentet er så rent og pent at en blir frista til å tro at Riemann har funnet den optimale betingelse. Likevel skal det vise seg at Riemannintegralet har mange skavanker.



Figur 4.2: Illustrasjon av øvre og nedre darbouxsummer. (Bildet er stjålet fra [1, s.135]).

4.2 Riemannintegralet à la Darboux

Darboux har en litt annen tilnærming til integrerbarhet, men den skal vise seg å gi samme klasse av integrerbare funksjoner. Utgangspunktet er to begreper som har fått hans navn: La som som før M_i og m_i være henholdsvis supremum og infimum til f over E_i, der (E_i) er en partisjon av $[a, b]$. Vi husker også at δ_i er bredden til E_i.

Definisjon 4.9. *La f være en begrensa funksjon på $[a, b]$ og la $\pi = (E_i)_{i=1}^n$ være en partisjon av $[a, b]$.* Øvre Darbouxsum *til f over $[a, b]$* relativt *π er definert ved*

$$U_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i.$$

Tilsvarende defineres nedre Darbouxsum *til f over $[a, b]$* relativt *π ved*

$$L_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i.$$

Se Figur 4.2 for lettere å forstå hva som menes med øvre og nedre Darbouxsum. Det er klart at $L_\pi(f) \leq U_\pi(f)$ for alle partisjoner π. Vi ser at $R = U_\pi(f) - L_\pi(f)$, så sammenhengen med Riemanns framstilling er sålangt klar. Men nå kommer noe som virker mye enklere enn Riemanns definisjon av integrerbarhet:

Definisjon 4.10. *La f være en begrensa funksjon på $[a, b]$. Hvis det eksisterer et entydig reelt tall A slik at*

$$L_\pi(f) \leq A \leq U_\pi(f)$$

for alle partisjoner π av $[a, b]$, så kalles f integrerbar *over $[a, b]$ og $A = \int_a^b f dx$ kalles* integralet *av f over $[a, b]$.*

En ekvivalent måte å formulere kravet i Definisjon 4.10 er simpelthen å si at *f er integrerbar over $[a, b]$ dersom*

$$\sup_\pi L_\pi(f) = \inf_\pi U_\pi(f). \tag{4.3}$$

Fordelen med Darboux's definisjon er at vi slipper dette maset om vilkårlige evalueringspunkter. Om du husker beviset for Proposisjon 4.3, så ser du kanskje at Darboux's definisjon av integral er ekvivalent til Riemanns. La oss vise dette formelt:

Teorem 4.11. *La f være en begrensa funksjon på $[a,b]$. f er integrerbar over $[a,b]$ hvis og bare hvis f er Riemannintegrerbar over $[a,b]$.*

Bevis. Anta f ikke er integrerbar i Darboux's forstand. Hvis $\sup_\pi L_\pi(f) > \inf_\pi U_\pi(f)$ så må det finnes et $\gamma > 0$ slik at $\sum_{i=1}^n M_i\delta_i - \sum_{i=1}^n m_i\delta_i > \gamma$ for alle partisjoner π av $[a,b]$. Med andre ord er da $\sum_{i=1}^n D_i\delta_i > \gamma$ for alle partisjoner π. Men da er $\Delta(d) > \gamma$ for alle d, så f er ikke Riemannintegrerbar. Dette viser at Riemannintegrerbarhet impliserer Darboux's krav til integrerbarhet.

Anta så f ikke er Riemannintegrerbar. Da er $\Delta(d) > 0$ for alle d. Det finnes altså et $\gamma > 0$ slik at for alle partisjoner gjelder at $R_\pi > \gamma$. For alle partisjoner π gjelder altså $\gamma < \sum_{i=1}^n D_i\delta_i = \sum_{i=1}^n M_i\delta_i - \sum_{i=1}^n m_i\delta_i$. Sagt på annen måte: For alle partisjoner er $U_\pi(f) - L_\pi(f) > \gamma$. Et entydig A blir da umulig, så f er ikke integrerbar i Darboux's forstand. □

Fra nå av sier vi Riemannintegrerbar om det å oppfylle Riemanns eller Darboux's krav. Nå kommer et nyttig resultat:

Teorem 4.12. *La f være en begrensa funksjon på $[a,b]$. f er Riemannintegrerbar over $[a,b]$ hvis og bare hvis det for hvert $\varepsilon > 0$ finnes en partisjon π slik at $U_\pi(f) - L_\pi(f) < \varepsilon$.*

Bevis. Anta først f er Riemannintegrerbar. Vi bruker definisjonen av supremum og infimum til å finne partisjoner π_1 og π_2 slik at

$$\sup_\pi L_\pi(f) < L_{\pi_1}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{og} \qquad U_{\pi_2}(f) < \inf_\pi U_\pi(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Nå lager vi en partisjon Π ved å bruke alle x_i som danner π_1 og alle y_i som danner π_2. Det er da klart at Π er en minst så fin oppdeling av $[a,b]$ som π_1 og π_2 er, hver for seg. Men det betyr at (4.4) holder om vi skifter ut π_1 og π_2 med Π fordi $L_\pi(f)$ vokser når π forfines, mens $L_\pi(f)$ avtar (Oppgave 5). Vi har altså

$$\sup_\pi L_\pi(f) < L_\Pi(f) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{og} \qquad U_\Pi(f) < \inf_\pi U_\pi(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessuten er f Riemannintegrerbar, så det står bare:

$$A < L_\Pi(f) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{og} \qquad U_\Pi(f) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Men hva oppfyller nå Π? Jo,

$$U_\pi(f) - L_\Pi(f) < A + \frac{\varepsilon}{2} - (A - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

Det var ene veien; anta nå vi for hver $\varepsilon > 0$ kan finne partisjon π_ε slik at $U_{\pi_\varepsilon}(f) - L_{\pi_\varepsilon}(f) < \varepsilon$. Anta f ikke var integrerbar. Da er

$$A_1 = \sup_\pi L_\pi(f) < \inf_\pi U_\pi(f) = A_2. \tag{4.5}$$

Men velg nå $\varepsilon = \frac{1}{2}(A_2 - A_1)$ og tilhørende partisjon π slik at $U_\pi(f) - L_\pi(f) < \varepsilon$. Da har vi en motsigelse til (4.5). □

4.2.1 Noen regneregler for Riemannintegralet

Vi har sett at $R[a,b]$ er et vektorrom. Vi skal nå bevise at integralet er en lineær reell funksjon på vektorrommet $R[a,b]$:

Teorem 4.13. *La f og g være Riemannintegrerbare på $[a,b]$ og la $\alpha \in \mathbb{R}$. Da gjelder*

(i)

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii)

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Bevis. (i) Vi ser at $U_\pi(\alpha f) = \alpha U_\pi(f)$. Siden f og αf er Riemannintegrerbare (Teorem 4.5) får vi

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \inf_\pi U_\pi(\alpha f) = \inf_\pi \alpha U_\pi(f) = \alpha \inf_\pi U_\pi(f) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

(ii) Å vise at integralet er additivt er noe mer arbeid. Et argument lik det i beviset for Teorem 4.5 gir oss (se Oppgave 4) at

$$U_\pi(f+g) \le U_\pi(f) + U_\pi(g) \qquad \text{og} \qquad L_\pi(f+g) \ge L_\pi(f) + L_\pi(g).$$

Først velger vi partisjoner π_1 og π_2 slik at vi nesten har integralene til f og g via øvre Darbouxsum: La $\varepsilon > 0$ og finn partisjoner π_1 og π_2 slik at

$$U_{\pi_1}(f) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{og} \qquad U_{\pi_2}(g) < \int_a^b g(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hvis vi nå lager en ny felles partisjon π ved å bruke punktene fra både π_1 og π_2, så holder fortsatt ulikhetene over (se Oppgave 5) og

$$U_\pi(f+g) \le U_\pi(f) + U_\pi(g) < \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon.$$

Siden $f+g$ er integrerbar (Teorem 4.5) gir dette $\int_a^b (f+g)(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Så velger vi partisjoner π_1 og π_2 slik at vi nesten har integralene til f og g via nedre Darbouxsum: La $\varepsilon > 0$ og finn partisjoner π_1 og π_2 slik at

$$L_{\pi_1}(f) > \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{og} \qquad U_{\pi_2}(g) > \int_a^b g(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

For partisjonen π der punktene fra både π_1 og π_2 brukes, så holder igjen ulikhetene over (se Oppgave 5) og

$$L_\pi(f+g) \ge L_\pi(f) + L_\pi(g) > \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon.$$

Siden $f+g$ er integrerbar gir dette $\int_a^b (f+g)(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, og beviset er fullført.

$\square$

Her kommer et resultat til som du sikkert har brukt mange ganger.

Teorem 4.14. *Hvis f er Riemannintegrerbar over $[a,b]$ og $a \leq c \leq b$, så gjelder*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Bevis. La

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,c] \\ 0, & x \in [c,b] \end{cases} \quad \text{og} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,c] \\ f(x), & x \in [c,b] \end{cases}$$

Resultatet følger nå fra Teorem 4.13 siden $f = g + h$ og siden $\int 0\,dx = 0$. $\square$

Så følger to praktiske ulikheter:

Teorem 4.15. *La f og g være Riemannintegrerbare og la $\alpha \in \mathbb{R}$. Da gjelder*

(i) Hvis $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in [a,b]$, så er $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

(ii) $|f|$ er Riemannintegrerbar og $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Bevis. (i) Dette er Oppgave 6.

(ii) At $|f|$ er Riemannintegrerbar er et spesialtilfelle av Lemma 4.16 under. Så gir trekantulikheten at vi for enhver partisjon $\pi = (E_i)_{i=1}^n$ må ha

$$|\sum_{i=1}^n M_i^f \delta_i| \leq \sum_{i=1}^n |M_i^f| \delta_i.$$

Vi tar infimum over alle partisjoner på begge sider av ulikheten og får den ulikheten vi ville bevise.

$\square$

Lemma 4.16. *Hvis f er Riemannintegrerbar over $[a,b]$ og g er kontinuerlig over $[c,d]$ der $[c,d] \supset V_f$, så er sammensetningen $h = g \circ f$ Riemannintegrerbar. Spesielt er $|f|$ og f^2 integrerbare.*

Bevis. Vi skal prøve å tilpasse en partisjon $\pi = (E_i)_{i=1}^n$ av $[a,b]$ slik at $U_\pi(h) - L_\pi(h)$ blir liten. Resultatet følger da fra Teorem 4.12.

La $\gamma > 0$ og la nå δ være slik at hvis $|f(x) - f(y)| < \delta$, så er $|h(x) - h(y)| < \gamma$ (g er uniformt kontinuerlig på $[c,d]$). Vi kommer nå opp i to tilfeller, nemlig de E_i der $M_i^f - m_i^f < \delta$ og de E_i der $M_i^f - m_i^f \geq \delta$. I det første tilfellet har vi $|M_i^h - m_i^h| < \gamma$. I det andre tilfellet har vi også en viss kontroll fordi $|g(f(x))|$ er begrenset av ett eller annet tall M. Dermed må vi ha at $|h(x) - h(y)| \leq 2M$ på hvert av de E_i der $M_i^f - m_i^f \geq \delta$. Vi har altså

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (M_i^h - m_i^h)\delta_i &= \sum_{i: M_i^f - m_i^f < \delta} (M_i^h - m_i^h)\delta_i + \sum_{i: M_i^f - m_i^f \geq \delta} (M_i^h - m_i^h)\delta_i \\
&\leq \gamma \sum_{i: M_i^f - m_i^f < \delta} \delta_i + 2K \sum_{i: M_i^f - m_i^f \geq \delta} \delta_i \\
&\leq \gamma(b-a) + 2K \sum_{i: M_i^f - m_i^f \geq \delta} \delta_i
\end{aligned}$$

Hvis vi kunne vise at $\sum_{i:M_i^f - m_i^f \geq \delta} \delta_i$ også er en funksjon av γ som minker proporsjonalt med γ, så vil vi kunne tvinge $U_\pi(h) - L_\pi(h)$ til å bli vilkårlig liten ved bare å krympe δ. La oss regne videre. Vi bruker at $\delta \leq (M_i^f - m_i^f)$, slik at $1 \leq (M_i^f - m_i^f)/\delta$ og får

$$\sum_{i:M_i^f - m_i^f \geq \delta} \delta_i \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i:M_i^f - m_i^f \geq \delta} (M_i^f - m_i^f)\delta_i.$$

Men dette kan vi skaffe oss kontroll over: Anta vi starta med en partisjon $\pi = (E_i)_{i=1}^n$ av $[a, b]$ slik at $U_\pi(f) - L_\pi(f) < \delta^2$. Da får vi $\sum_{i:M_i^f - m_i^f \geq \delta} \delta_i < \delta$ og vi har

$$U_\pi(h) - L_\pi(h) < \gamma(b - a) + 2K\delta.$$

Det er ingenting i veien for at vi i utgangspunktet også kunne forutsette $\delta < \gamma$. Da har vi

$$U_\pi(h) - L_\pi(h) < \gamma(b - a) + 2K\gamma = (2K + (b - a))\gamma,$$

en funksjon av γ som minker proporsjonalt med γ. □

4.3 Litt om Lebesgueintegralet

I denne seksjonen skal vi på ingen måte utvikle Lebesgueintegralet i slik detalj som vi utvikla Riemannintegralet. Men vi skal forsøke å få en idé om tanken bak konstruksjonen av Lebesgueintegralet. Vi starter med et tankeeksempel: Tenk deg at du skal summere opp en masse tall. To strategier melder seg. 1) Vi kan starte fra en kant og summere til vi har addert alle tallene. 2) Vi kan sortere tallene i hauger, telle opp hvor mange det er i hver haug, multiplisere med verdien tallene i den enkelte haug har og så legge sammen.

La oss se dette om vi vil integrere $f(x) = x^2$.

Eksempel 4.17. Vi lar $f(x) = x^2$ og bruker de to strategiene for å approksimere arealet under kurva på intervallet $[0, 1]$. Med første summeringsstrategi kan vi tenke oss partisjonen $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ av intervallet $[0, 1]$ på x-aksen. La oss evaluere i midtpunktene av delintervallene. Vi får da Riemannsummen

$$(\frac{1}{8})^2 \cdot \frac{1}{4} + (\frac{3}{8})^2 \cdot \frac{1}{4} + (\frac{5}{8})^2 \cdot \frac{1}{4} + (\frac{7}{8})^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \cdot 64}(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) = \frac{21}{64},$$

eller ca 0.328.

Med andre summeringsstrategi kan vi lage hauger ved å dele inn intervallet $[0, 1]$ på y-aksen med samme partisjon. Første haug kommer fra de x som er slik at $x^2 \in [0, 1/4]$, altså $A_1 = [0, 1/2]$. Andre haug kommer fra de x som er slik at $x^2 \in [1/4, 1/2]$, altså $A_2 = [1/2, \sqrt{2}/2]$. Tredje haug kommer fra de x som er slik at $x^2 \in [1/2, 3/4]$, altså $A_3 = [\sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2]$. Fjerde og siste haug kommer fra de x som er slik at $x^2 \in [3/4, 1]$, altså $A_4 = [\sqrt{3}/2, 1]$. La oss approksimere f med middelverdien over hvert av delintervallene vi delte y-aksen med. La $\ell[c, d]$ bety lengden av intervallet $[c, d]$, altså $d - c$. Nå får vi noe vi kan kalle Lebesguesummen

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{8} \cdot \ell(A_1) + \tfrac{3}{8} \cdot \ell(A_2) + \tfrac{5}{8} \cdot \ell(A_3) + \tfrac{7}{8} \cdot \ell(A_4) \\ &= \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{\sqrt{2}-1}{2} + \tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{2-\sqrt{3}}{2} \\ &= \tfrac{6-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{8}, \end{aligned}$$

altså sånn omtrent 0.36.

Vi generaliserer det vi gjorde i Eksempel 4.17 til begrensa f definert på $[a, b]$. La $[c, d] \supset V_f$ og del $[c, d]$ inn i intevaller $(B_i)_{i=1}^n$. La b_i være midtpunktet i B_i. Til hver B_i finner vi de x som er slik at $f(x) \in B_i$. Samlinga av slike x kaller vi A_i. Nå vet vi ikke riktig hvordan A_i'ene blir seende ut, men la oss anta vi kan måle lengda $m(A_i)$ av dem. Da får vi Lebesguesummen

$$L = f(b_1)m(A_1) + f(b_2)m(A_2) + \cdots + f(b_n)m(A_n) = \sum_{i=1}^{n} f(b_i)m(A_i).$$

Med denne strategien for å approksimere arealet under grafen ser vi at vi får to ting å undersøke:

1. Hvilke mengder A kan gis en fornuftig lengde? En kunne jo håpe at alle delmengder av $\mathbb{R}$ har denne egenskapen, men det var allerede før år 1900 kjent at hvis lengdemålet både skal summere opp lengden av tellbare disjunkte unioner riktig og samtidig være translasjonsinvariant, så må antall delmengder av $\mathbb{R}$ begrenses. Lebesgue greide å finne fram til ei stor samling $\mathcal{L}$ av delmengder av $\mathbb{R}$ der lengdemålet har disse to egenskapenene. Vi ser at vi bør kreve at $f^{-1}([r, s]) \in \mathcal{L}$ for alle intervaller $[r, s] \subset [c, d]$. Slike begrensa funksjoner kalles *målbare* . Elementene i $\mathcal{L}$ kalles *målbare mengder.*

2. Vi ser at Lebesguesummen L er arealet under grafen til en stykkevis konstant funksjon. Vi skriver denne funksjonen som $\phi = \sum_{i=1}^{n} f(b_i)\mathbf{1}_{A_i}$. Nå må vi spørre: For hvilke f vil prosedyren med å approksimere f med funksjoner $\phi_j = \sum_i f(b_i^j)\mathbf{1}_{A_i^j}$, der vi tar finere og finere partisjoner π_j av $[c, d]$ lede til at $L_j \to A$, der L_j er Lebesguesummen tilhørende π_j og A er det entydige arealet mellom grafen til f og x-aksen?

Etter å ha innsett dette, kan vi tenke slik: Definisjonsmengda til f kan deles i to delmengder, P og N, der $f|_P \geq 0$ og $f|_N < 0$. Disse to mengdene må være målbare når f er målbar. Vi får altså splitta den målbare f i to positive, målbare funksjoner f^+ og f^- slik at $f = f^+ - f^-$ ved å sette $f^+ = f|_P$ og $f^- = -f|_N$. Så kan vi integrere f ved å integrere de to positive funksjonene hver for seg. Hvis de hver for seg har et endelig integral definerer vi $\int f = \int f^+ - \int f^-$.

Altså må vi i første omgang studere integrasjon av ikke-negative funksjoner. La oss gjøre det.

4.3.1 Lebesgueintegralet til ikke-negative funksjoner

Lebesgue droppa nå antakelsen om at f er begrensa og sa at f er målbar hvis $f^{-1}([r, s]) \subset \mathcal{L}$ for alle $[r, s] \subset [0, \infty)$. Det er klart at simple funksjoner av typen $\sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$, der $(A_i) \in \mathcal{L}$ er målbare. Så viste Lebesgue at en litt smartere variant av metoden som vi brukte til å approksimere f og arealet under grafen til f i Eksempel 4.17 leder til følgende resultat:

Proposisjon 4.18. *Hvis f er målbar, så finnes ei følge (ϕ_n) av målbare simple funksjoner slik at hver gang vi velger $x \in D_f$, så vil $\phi_n(x) \to f(x)$. Vi kan velge følga ϕ_n slik at $\phi_{n+1} \geq \phi_n$, altså slik at hver følge $\phi_n(x)$ er monotont økende. Vi skriver $\phi_n \nearrow f$. Hvis f er begrensa kan konvergensen antas uniform.*

Vi kan tenke oss en haug av simple, målbare funksjoner ϕ under grafen til f, altså $\phi \leq f$. For hver av disse ϕ'ene kan vi definere integralet enkelt ved å addere arealer av rektangler; hvis $\phi = \sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}$, så setter vi

$$\int \phi = \sum a_i m(A_i).$$

Mengda $I = \{\int \phi \ : \phi \leq f\}$ må ha et supremum ved kompletthetsegenskapen. Dette kan være endelig (dersom I er opptil begrensa) eller uendelig. Uansett, så definerer vi, for positive reelle funksjoner,

$$\int f = \sup_{\phi \leq f} \left\{ \int \phi \ : \phi \text{ er simpel målbar} \right\}.$$

Så er det jo å håpe at hvis vi har ei følge (ϕ_n) slik at $\phi_n \nearrow f$, slik som i Proposisjon 4.18, så vil $\int \phi_n$ konvergere til dette supremumet. Da har vi en prosedyre for å approksimere f og en tilhørende prosedyre med å finne tall $\int \phi_n$ som konvergerer mot $\int f$. Håpet, og mer enn det, viser seg å holde, vi har nemlig følgende berømte sats:

Teorem 4.19. *[Lebesgues monotone konvergensteorem] La (f_n) være ei følge av målbare funksjoner slik at $f_n \nearrow f$. Da er f målbar og $\int f_n \nearrow \int f$.*

Det viser seg at dette integralet blir tellbart additivt og ellers har de egenskaper vi vil at et integral skal ha. Og allerede nå kan vi vise at dette integralet har krefter som Riemannintegralet ikke har:

Eksempel 4.20. Vi studerer igjen Dirichletfunksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{ellers på } [0,1] \end{cases}$$

La $(q_i)_{i=1}^{\infty}$ være ei opplisting av de rasjonale talla i $[0,1]$. Se på de simple funksjonene $\phi_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{1}_{\{q_i\}}$. Da ser vi at $q_n \nearrow f$, at hver ϕ_n er målbar (punkter er målbare mengder med lengde 0). Det monotone konvergensteoremet gir oss at f er målbar og at $\int f = \lim_n \int \phi_n = \lim_n 0 = 0$. f er altså integrerbar når vi bruker Lebesgues metode, og har integral 0.

4.3.2 Lebesgueintegrerbare funksjoner

Med skytset fra Delseksjon 4.3.1 kan vi nå fyre løs på det å integrere funksjoner som ikke nødvendigvis har verdimengde i $[0, \infty)$. Vi splitter altså f i to ikkenegative deler f^+ og f^- slik som beskrevet like før Delseksjon 4.3.1. Så må vi tenke oss om litt: La oss si vi skal integrere $f(x) = x$ over hele $\mathbb{R}$. Her er $P = [0, \infty)$ og $N = (-\infty, 0)$. Metoden vi har utvikla for å integrere ikkenegative funksjoner vil nå gi at f^+ og f^- begge har uendelig integral. Sånne tilfeller vil vi ha bort og definerer samlinga av Lebesgueintegrerbare funksjoner slik som dette:

Definisjon 4.21. *Samlinga $L_1(E)$ av Lebesgueintegrerbare funksjoner over mengda $E \in \mathcal{L}$ er de funksjoner f slik at $\int f^+$ og $\int f^-$ begge er endelige. Videre defineres $\int f = \int f^+ - \int f^-$.*

Når f er Lebesgueintegrerbar over E, skriver vi $f \in L_1(E)$. Ofte skriver vi bare $f \in L_1$ hvis vi mener $f \in L_1(E)$ for en eller annen $E \in \mathcal{L}$ eller det er underforstått hvilken E det er snakk om.

Så kommer jobben med å bevise at integralet er lineært. Det viser seg å være tilfelle. Svært viktig er dette resultatet som vi pleier si kjapt som at Lebesgueintegralet er en tellbar additiv mengdefunksjon:

Proposisjon 4.22. *Hvis $f \in L_1(E)$ og delmengdene $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}$ av $\mathcal{L}$ oppfyller $E_i \cap E_j = \emptyset$ når $i \neq j$ (de er parvis disjunkte), så gjelder $\int_{\cup_i E_i} = \sum_i \int f$.*

Det aller mest bejublede og kanskje aller nyttigste resultatet for Lebesgueintegralet, tror jeg må være

Teorem 4.23. *[Lebesgues dominerte konvergensteorem] La $E \in \mathcal{L}$ og (f_n) være ei følge i $L_1(E)$ og f være slik at hver gang vi velger $x \in E$, så vil $f_n(x) \to f(x)$. Hvis det finnes en funksjon $g \in L_1(E)$ slik at alle f_n er dominert av g, dvs $|f_n| \leq g$ for alle n, så er $f \in L_1(E)$ og $\int f_n \to \int f$.*

Dette viser et nytt fortrinn over Riemannintegralet. Se på de simple funksjonene i Eksempel 4.20. De er dominert av den integrerbare funksjonen $g(x) = 1$. Grensa er ikke Riemannintegrerbar, men Lebesgueintegrerbar. Det dominerte konvergensteoremet sier at det er mye vanskeligere å konvergere ut av $L_1(E)$ enn ut av $R(E)$. For Riemannintegralet greide Cesare Arzelà i 1885 å vise noe som likner på Lebesgues dominerte konvergensteorem:

Teorem 4.24. *[Det begrensede konvergensteorem for Riemannintegral] La (f_n) være ei følge i $R[a,b]$ og f være slik at hver gang vi velger $x \in [a,b]$, så vil $f_n(x) \to f(x)$. Hvis $f \in R[a,b]$ og det finnes et reelt tall $M < \infty$ slik at $|f_n| \leq M$ for alle n, så gjelder $\int f_n \to \int f$.*

Vi ser at dette er mye svakere enn Lebesgues dominerte konvergensteorem. Vi avslutter med å svare på spørsmålet om Lebesgueintegralet er en ekte utvidelse av Riemannintegralet. Én utvidelse er at vi ikke bare definerer integrerbarhet over intervaller og ikke bare kan integrere begrensa funksjoner, men det kunne jo fortsatt tenkes at om $[a,b]$ er et intervall, så finnes det Riemannintegrerbare funksjoner over $[a,b]$ som ikke kan Lebesgueintegreres. Slik er det ikke, som følgende flotte resultat av Lebesgue viser:

Teorem 4.25. *Hvis $f \in R[a,b]$, så er $f \in L_1([a,b])$ og de to integralene gir samme verdi over hvert delintevall av $[a,b]$. En begrensa funksjon er Riemannintegrerbar hvis og bare hvis mengda av diskontinuiteter har mål null.*

Vi får etpar fine korollarer som vi kan skrive opp:

Korollar 4.26. *Begrensa funksjoner med høyst tellbart mange diskontinuiteter er Riemannintegrerbare.*

Korollar 4.27. *Monotone, begrensa funksjoner er Riemannintegrerbare.*

Vi skal også bevise Korollar 4.27 direkte ved hjelp av Teorem 4.12 i Oppgave 7.

4.4 Uekte Riemannintegraler

Vi har tre hovedtilfeller som vi kaller uekte (Riemann-) integraler, nemlig tilfellene

1. Der vi forsøker å integrere over mengder av typen $[a,\infty)$ eller $(-\infty,a], a\in\mathbb{R}$.
2. Der vi forsøker å integrere over hele $\mathbb{R}$.
3. Der vi forsøker å integrere en ubegrensa funksjon som har en asymptote i venstre eller høyre endepunkt av intervallet $[a,b]$.

La oss se konkrete eksempler som viser at slike tilfeller naturlig kan dukke opp:

Eksempel 4.28. Følgende er konkretiseringer av de tre tilfellene av uekte integraler.

1. Vi vil undersøke arealet mellom grafen til $f(x)=1/x^2$ og $x$aksen på intervallet $[1,\infty)$.
2. Vi vil undersøke arealet under Gauss-kurva gitt ved grafen til $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
3. Vi vil undersøke arealet under grafen til $h(x)=e^{-x}$ på intervallet $[0,1]$.

Tilfelle 1 behandler vi ved at vi ser på $\int_a^b f(x)\,dx$. Da er det to muligheter om vi lar $b\to\infty$. Enten konvergens eller divergens. Vi sier at f er Riemannintegrerbar over $[a,\infty)$ dersom $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ eksisterer, og definerer i såfall $\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$. Vi får dermed

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^b=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1})=\lim_{b\to\infty}(1-\frac{1}{b})=1.$$

$f(x)=1/x^2$ er altså Riemannintegrerbar over $[1,\infty)$ med integral lik 1. Tilsvarende behandler vi integraler over $(-\infty,a]$. OBS! Med denne metoden blir det funksjoner som er Riemannintegrerbare over $[a,\infty)$ som ikke er Lebesgueintegrerbare over $[a,\infty)$.

Tilfelle 2 krever litt mer forsiktighet fordi om vi bare generaliserer metoden fra Tilfelle 1 ved å definere $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx$, så ville vi få at $f(x)=x$ er integrerbar på hele $\mathbb{R}$ med integral 0, og det virker kanskje ikke veldig lurt. Vi legger derfor på tilleggskravet at $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a |f(x)|\,dx$ skal eksistere. Med dette tilleggskravet blir alle Riemannintegrerbare funksjoner over $\mathbb{R}$ også Lebesgueintegrerbare.

Tilfelle 3 behandler vi også ved en grense. Anta f har en vertikal asymptote for $x=a$ og at f er Riemannintegrerbar for hvert intervall $[c,b]$ der $a<c<b$. Vi ser da på integralene $\int_c^b f(x)\,dx$ og sier at det uekte Riemannintegralet til f over $[a,b]$ eksisterer dersom $\lim_{c\to a}\int_c^a f(x)\,dx$ eksisterer. I såfall setter vi naturligvis $\int_a^b f(x)dx=\lim_{c\to a}\int_c^a f(x)dx$. Om vi tar eksemplet med $f(x)=e^{-x}$ på intervallet $[0,1]$, så får vi altså

$$\int_0^1 e^{-x}\,dx=\lim_{c\to 0}[-e^{-x}]_c^1=\lim_{c\to 0}(-e^{-1}+e^c)=\lim_{c\to 0}(e^c-\frac{1}{e})=1-\frac{1}{e}.$$

4.5 Analysens fundamentalteorem

Vi husker tilbake fra Newtonintegralet at $\int_0^x f(z)\,dz = F(x)$, der $F'(x) = f(x)$. Omvendt kan vi spørre: Hvis $F'(x) = f(x)$ for alle x i intervallet $[0, a]$, har vi da automatisk at $F(z) = \int_0^z f(x)\,dx$, der integralet er utført enten ved Riemanns eller Lebesgues metode? Svaret er faktisk nei i begge tilfellene.

For Riemannintegralet kan vi risikere at F er deriverbar, men F' er så skikkelig diskontinuerlig at den ikke er Riemannintegrerbar. Slike eksempler er ikke enkle å produsere. Italieneren Vito Volterra gav i 1881 et eksempel på en F med en begrensa derivert f som var så håpløs at den ikke kan Riemannintegreres. Men fra 1875 har vi likevel en gladnyhet, æren tilfaller Gaston Darboux:

Teorem 4.29. *Anta F er deriverbar over $[a, b]$ og at F' er Riemannintegrerbar over $[a, b]$. Da er*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Med Lebesgues måte å integrere på er det litt mindre som kan gå galt. Henry Lebesgue beviste selv dette:

Teorem 4.30. *Anta F er deriverbar over $[a, b]$ og at F' er begrensa på $[a, b]$. Da er F' automatisk Lebesgueintegrerbar over $[a, b]$ og*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

der integralet selvsagt må utføres med Lebesgues metode.

Noen matematikere synes et integral bør være slik at deriverbarhetskravet er nok til å sikre $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Et slikt integral er utvikla, men sålangt virker det som om Riemanns og Lebesgues integraler er det de fleste bruker. Det mer generelle integralet kalles *Kurzweil-Henstock integralet.*

4.6 Oppgaver

Oppgaver til Seksjon 4.1

Oppgave 1. (a) Finn en partisjon av $[0, 1]$ med norm $1/4$.

(b) Hvordan kan du lage partisjoner med norm 2^{-n}?

(c) Hva har dette med dyadiske brøker å gjøre....?

Oppgave 2. La $f(x) = \sin x$. Bestem oscillasjonen til f over intervallene $[0, \pi]$ og $[\pi/4, \pi/2]$

Oppgave 3. La $f(x) = x^2$ og π være en partisjon av $[0, 1]$ der $\pi = \{0, 1/4, 1/2, 1\}$

(a) Finn normen til π.

(b) La $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$ og $\varepsilon_3 = 1/2$. Bestem Riemannsummen S.

(c) Hva er det minste S kan bli? Hva er de tilhørende $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ og ε_3?

(d) Hva er det meste S kan bli? Hva er de tilhørende $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ og ε_3?

(e) Finn R.

Oppgaver til Seksjon 4.2

Oppgave 4. Forklar at

$$U_\pi(f+g) \le U_\pi(f) + U_\pi(g) \qquad \text{og} \qquad L_\pi(f+g) \ge L_\pi(f) + L_\pi(g).$$

Oppgave 5. La π_1 og π_2 være to partisjoner av $[a,b]$ og la π være partisjonen med alle punkter fra både π_1 og π_2. Vi skriver $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$.

(a) La $[a,b] = [0,1]$, $\pi_1 = \{0, 1/4, 1/2, 1\}$ og $\pi_2 = \{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\}$. Finn $\pi_1 \cup \pi_2$. Finn også $|\pi_1|$, $|\pi_2|$ og $|\pi|$. Forklar at vi alltid har $|\pi_1 \cup \pi_2| \le |\pi_1| + |\pi_2|$.

(b) En partisjon τ_1 kalles en forfining av partisjonen τ dersom τ_1 inneholder alle punktene fra τ. Finn en forfining av π_1 fra punkt (a). Når τ_1 er en forfining av partisjonen τ, skriver vi $\tau_1 \supset \tau$.

(c) Finn en felles forfining av generelle partisjoner π_1 og π_2 av $[a,b]$.

(d) Vis at hvis $\tau_1 \supset \tau$, så vil $U_{\tau_1}(f) \le U_\tau(f)$ for alle funksjoner f på $[a,b]$.

(e) Vis at hvis $\tau_1 \supset \tau$, så vil $L_{\tau_1}(f) \ge L_\tau(f)$ for alle funksjoner f på $[a,b]$.

Oppgave 6. Vis Teorem 4.13 (i). (Hint: Start med å sammelikne $U_\pi(f)$ og $U_\pi(g)$.)

Oppgave 7. Vi skal vise at hvis f er monoton og begrensa på $[a,b]$, så er f Riemannintegrerbar.

(a) Sett $h = (b-a)/n$ og lag en uniform partisjon π av $[a,b]$. Forklar at vi nå har $x_i = a + ih$. Hva er $|\pi|$?

(b) La $E_i = [x_{i-1}, x_i]$. Bruk monotoniteten til å bestemme M_i^f og m_i^f.

(c) Vis at $U_\pi(f) - L_\pi(f) = |\pi|(f(b) - f(a))$

(d) Bruk Teorem 4.12 til å fullføre beviset.

Oppgave 8. Vi liker gladnyheter; Vis at hvis $f \in R[a,b]$, så er $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx \in C[a,b]$ (Hint: Bruk Teorem 4.13 (ii) til å finne et tall M slik at $|F(x) - F(y)| \le M(x-y)$ for alle $y < x, x, y \in [a,b]$. Vis så at dette medfører kontinuitet.)

Litteratur

[1] Colin Clark, *Elementary Mathematical Analysis, 2. ed.* Wadsworth Publishers of Canada, 1982.

[2] William Dunham, *The calculus gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue.* Princeton University Press, 2005.

[3] Gerald B. Folland, *Real analysis, modern techniques and their applications, 1. ed.* Wiley, 1984.

[4] Manfred Stoll, *Real Analysis, 2. ed.* Addison-Wesley, 2000.

Kapittel 5

Grenseprosesser

Vi har allerede jobba med mange grenseprosesser.

- Vi har studert grenser av følger av rasjonale og reelle tall.
- Vi har studert grenser for funksjoner i forbindelse med studiet av kontinuitet og deriverbarhet.
- Da vi studerte integral, viste det seg at Riemannintegralet var grensa for Riemannsummene S når normen av partisjonene går mot 0. Egentlig er dette også ei funksjonsgrense, om vi skriver $S = S^f(\pi)$, så ser vi at S er en reell funksjon av π definert for positive π.
- I Kapittel 1, Seksjon 1.7 generaliserte vi grenseprosesser til metriske rom og studerte som spesialtilfeller følger i planet (under flere ulike metrikker) og følger i $C[a, b]$ (også under minst to ulike metrikker).

5.1 Funksjonsfølger

Det er studium av konvergens av følger i *funksjonsrom* som $C[a, b]$, $D[a, b]$, $D^1[a, b]$ og $R[a, b]$ vi skal drive med i dette kapitlet. Og vi har allerede vært borti noen spørsmål av den typen vi skal stille: Vi har f.eks. sett at ei følge av Riemannintegrerbare funksjoner ikke trenger ha ei Riemannintegrerbar grense (se Eksempel 4.20 i forrige kapittel).

Men før vi går videre, må vi være sikre på at vi vet hva det vil si å studere *punktvis konvergens.*

5.1.1 Punktvis konvergens

Kanskje den mest naturlige måten å studere grenser for funksjoner er slik som i dette eksemplet:

Eksempel 5.1. Vi har funksjonene $f_1, f_2, \cdots$ definert på $[0, 1]$ ved at

$$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, \cdots, f_n(x) = x^n, \cdots$$

For hver x dannes da ei tallfølge, $(x^n)_n$. For $x = 1/2$ dannes f. eks tallfølga $((1/2)^n)$, som klart konvergerer mot null. Tenker vi oss litt om, det kan neppe skade, så ser vi at alle tallfølgene (x^n) konvergerer mot null når $0 \leq x < 1$. For $x = 1$ får vi tallfølga (1^n) som bare er den konstante følga av ett-tall. Den konvergerer altså mot 1.

Vi kan tenke oss en funksjon g definert ved at $g(x)$ er det tallet som tallfølga $f_n(x)$ konvergerer mot. I vårt tilfelle blir, som vi har sett

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

For hver x har vi altså $g(x) = \lim_n f_n(x)$. Vi skriver dette som $g = \lim_n f_n$ og kaller g den punktvise grensa av funksjonsfølga (f_n). Legg merke til at selv om alle f_n'ene var kontinuerlige over $[0,1]$ (faktisk uendelig mange ganger kontinuerlig deriverbare over $[0,1]$) så er grensefunksjonen $g = \lim_n f_n$ diskontinuerlig.

Er du lur nå, så gjør du Oppgave 1 før du leser videre. Vi generaliserer det vi gjorde i Eksempel 5.1 og Oppgave 1:

Definisjon 5.2. *La (f_n) være ei følge av reelle funksjoner, der hver f_n er definert på samme mengde A. Hvis vi for hver $x \in A$ har at tallfølga $f_n(x)$ konvergerer, definerer vi den* punktvise grensa $g = \lim f_n$ *til* funksjonsfølga (f_n) *ved at $g(x) = \lim_n f_n(x)$.*

Du har møtt funksjonsfølger mange ganger tidligere. Tenk på Taylorutvikling om $x = 0$ (MacLaurinutvikling), f.eks. Da finner vi funksjoner

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(0) + f'(0)x \\ f_1(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2}x^2 \\ f_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2}x^2 + \tfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nå forstår vi at det å studere funksjonsfølger tidlig må ha dukka opp. Og følgende situasjon må lett kunne dukke opp: Vi har en funksjon g som vi ikke kjenner den deriverte til. Men vi kjenner ei følge av funksjoner (f_n) slik at $g = \lim f_n$ og vi greier å derivere hver f_n. Da er det jo sabla fristende å tenke seg at vi kan lure fram $g'(x)$ ved å se på følga $(f_n'(x))$. Går det?

Fram til begynnelsen av 1800-tallet ble slike triks brukt nokså uhemma, og veldig ofte virker det å lure fram egenskaper til g ved å bruke den tilhørende egenskapen til hver av f_n'ene. Så sent som i 1827 publiserte Cauchy et «bevis» for at hvis hver f_n er kontinuerlig, så er grensefunksjonen også kontinuerlig. Abel og Fourier fant moteksempler og Abel forsto hva som var galt i Cauchys argument. Men det var Dirichlet som formelt ordna opp og fant kravet som må til for at grensefunksjonen g blir kontinuerlig.

Ja, hva med Maclaurinrekka? Får vi ei følge som konvergerer punktvis til f' hvis vi deriverer hver f_n, tror du?

5.1.2 Uniform konvergens

Ta en titt på Eksempel 5.1 igjen. Da ser du at jo nærmere 1 du velger x, dess større n trengs for å komme nær 0. Sagt mer presist: La $\varepsilon > 0$. For hver $x \in [0,1)$ finnes en $N(x)$ slik at når $n \geq N$, så er $f_n(x) < \varepsilon$. Men N øker når $x \to 1$. Vi kan altså ikke finne en N som gjør jobben for alle x samtidig. Hvis vi hadde studert samme funksjonsfølga på intervallet $[0,a]$, der $a < 1$, hadde situasjonen være ganske annerledes. La nå $\varepsilon > 0$. Velg N slik at $f_n(a) < \varepsilon$. Da er $f_n(x) < \varepsilon$ for alle andre $x \in [0, a]$ også. Dette at det finnes et sted der konvergensen går seinest kan vi skrive slik:

For alle $\varepsilon > 0$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n > N$, så er $\sup_x |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Vi ser dermed at det å kunne finne N som virker for alle x'ene samtidig akkurat er følgende krav:

Definisjon 5.3. *La (f_n) være ei følge av funksjoner definert på samme mengde A. (f_n) sies å konvergere uniformt til funksjonen g dersom det for alle $\varepsilon > 0$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n > N$ så er $d_\infty(f_n, g) < \varepsilon$, der d_∞ er metrikken definert ved $d_\infty(\phi, \psi) = \sup_{x \in A} |\phi(x) - \psi(x)|$.*

Denne metrikken kjenner vi fra Seksjon 1.7, spesielt jobba vi med den i Delseksjon 1.7.1 og i Oppgavene 30 og 31 i Kapittel 1. Det er sikkert lurt å repetere disse før du går videre. Nå kommer et svært viktig resultat, formelt bevist første gang av Dirichlet, men ganske sikkert også kjent og forstått av Abel tidligere.

Teorem 5.4. *La A være ei delmengde av $\mathbb{R}$ og la hver f_n være definert på A. Hvis $(f_n) \subset C(A)$ konvergerer uniformt til g, så er $g \in C[a, b]$. $(C(A), d_\infty)$ er altså et komplett metrisk rom.*

Bevis. La $a \in A$. Vi skal vise at g er kontinuerlig i a. Ideen er at grafen til g har grafen til en kontinuerlig funksjon f_N klint helt inntil seg overalt i A. Rent formelt må vi vise at det for alle $\varepsilon > 0$ finnes et $\delta > 0$ slik at når $|x - a| < \delta$, så er $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$. La da $\varepsilon > 0$. Legg merke til at for alle n er

$$
\begin{aligned}
|g(x) - g(a)| &= |g(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - g(a)| \\
&\le |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - g(a)|.
\end{aligned}
$$

Nå velger vi N slik at $|g(x) - f_N(x)| < \varepsilon/3$ for alle x (her bruker vi den uniforme konvergensen). Da har vi kontroll på første og tredje ledd over. Så utnytter vi at f_N er kontinuerlig til å finne $\delta > 0$ slik at når $|x - a| < \delta$, så er $|f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3$. Med $|x - a| < \delta$ får vi da $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$. □

Hvis $F(A)$ er vektorrommet av reelle funksjoner definert på A, kan vi gjøre det til et metrisk rom $E = (F(A), d_\infty)$. Vi har sett at subrommet $C(A)$ er komplett under denne metrikken. Anta nå vi har ei følge (f_n) i $F(A)$ som er Cauchy i denne metrikken, dvs. for alle $\varepsilon > 0$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at $d_\infty(f_n, f_m) = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ når $n, m \ge N$. For hver $x \in A$ dannes da en funksjon f ved at $f(x) = \lim_n f_n(x)$ fordi de reelle følgene $(f_n(x))_n$ er Cauchy, og dermed konvergente. Altså konvergerer Cauchyfølger i E og Teorem 1.52 gir oss at (f_n) konvergerer i E hvis og bare hvis den er d_∞-Cauchy.

Når vi har ei følge (f_n) av Riemannintegrerbare funksjoner som konvergerer til g kan vi bruke dette resultatet:

Teorem 5.5. *Anta $(f_n) \subset R[a, b]$ konvergerer uniformt mot funksjonen g. Da er $g \in R[a, b]$ (så $(R[a, b], d_\infty)$ er altså komplett) og vi har*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Legg merke til hvor mye sterkere Teoremene 4.23 og 4.24 er.

Bevis. Vi setter $\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - g(x)|$. Da vil $\varepsilon_n \to 0$ fordi $f_n \to g$ uniformt. For hver n og for alle $x \in [a, b]$ har vi

$$f_n(x) - \varepsilon_n \leq g(x) \leq f_n(x) + \varepsilon.$$

For alle partisjoner π har vi dermed

$$L_\pi(f_n - \varepsilon_n) \leq L_\pi(g) \leq U_\pi(g) \leq U_\pi(f_n + \varepsilon_n).$$

Men $L_\pi(f_n - \varepsilon_n) = L_\pi(f_n) - \varepsilon_n(b - a)$ og $U_\pi(f_n + \varepsilon_n) = U_\pi(f_n) + \varepsilon_n(b - a)$. Vi får

$$U_\pi(g) - L_\pi(g) \leq U_\pi(f_n) - L_\pi(f_n) + 2\varepsilon_n(b - a).$$

La $\varepsilon > 0$ og velg N slik at $\varepsilon_N < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Bruk så Teorem 4.12 til å velge en partisjon π slik at $U_\pi(f_N) - L_\pi(f_N) < \varepsilon/2$. For denne partisjonen har vi

$$U_\pi(g) - L_\pi(g) < \varepsilon,$$

og $g \in R[a, b]$ ved Teorem 4.12.

Det gjenstår å vise at $\lim_n \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx$. Men dette følger fra Teorem 4.13 og Teorem 4.15 (ii): Fra Teorem 4.13 har vi at $f_n - g$ er Riemannintegrerbar for alle n. Fra Teorem 4.15 (ii) har vi da at $|f_n - g|$ er Riemannintegrerbar for alle n og at $|\int_a^b f_n - g\ dx| \leq \int_a^b |f_n - g|\ dx$. Vi bruker igjen Teorem 4.13 og får at

$$|\int_a^b f_n - \int_a^b g\ dx| \leq \int_a^b |f_n - g|\ dx \leq \varepsilon_n(b - a) \to 0.$$

□

Vi skal også få opp og stå et resultat om det å derivere ledd for ledd. Her viser det seg at vi må forlange ganske mye. For Riemannintegrasjon hadde vi at det å være Riemannintegrerbar overføres til den uniforme grensefunksjonen. Sånn er det ikke for deriverbarhet.

Eksempel 5.6. La $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ være definert på $[0, 1]$ for $n = 1, 2, \cdots$. Da er

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \to 0,$$

så f_n konvergerer uniformt mot 0 på $[0, 1]$. Vi har at hver f_n er deriverbar over $[0, 1]$ med derivert $f_n' = x^{n-1}$. Vi legger merke til at f_n' ikke konvergerer uniformt på $[0, 1]$, at den punktvise grensa til f_n' ikke engang er kontinuerlig og at $f_n'(1) \to 1$ mens $(\lim_n f_n)'(1) = 0$. Så mye kan gå galt.

Fra Eksempel 5.6 ser vi at vi i det minste må legge på kravet om at f_n' konvergerer uniformt. Og det er dette kravet som er det viktige når vi vil derivere ledd for ledd.

Teorem 5.7. *Anta (f_n) er ei funksjonsfølge av funksjoner som er deriverbare over intervallet $[a, b]$ og slik at (f_n') er uniformt konvergent på $[a, b]$. Hvis nå det finnes et $c \in [a, b]$ slik at følga $(f_n(c))$ er konvergent, så konvergerer (f_n) uniformt til en deriverbar funksjon f på $[a, b]$ og $f'(x) = \lim_n f_n'(x)$ for alle $x \in [a, b]$.*

Du stusser kanskje over kravet om at det skal finnes et $c \in [a, b]$ slik at følga $(f_n(c))$ er konvergent. Men det er nødvendig; la (f_n) være som i Teorem 5.7 og lag ei ny følge (g_n) ved $g_n(x) = f_n(x) + n$. Da er $g_n^{'} = f_n^{'}$, og g_n konvergerer ikke noe sted. Det er litt artig at konvergens i ett punkt tvinger fram uniform konvergens, hva? Det kommer av middelverditeoremet, som vi snart skal se.

Legg merke til at vi ikke forlanger at $f_n^{'}$'ene skal være kontinuerlige eller Riemannintegrerbare. Gjør vi det kunne vi brukt fundamentalteoremet, men ettersom vi ikke har bevist fundamentalteoremet, er det like greit at vi ikke kan bruke det.

Bevis. Det første vi skal gjøre er å vise at (f_n) er d_∞-Cauchy. La $\varepsilon > 0$. Vi vet at $(f_n^{'})$ er d_∞-Cauchy. Altså finnes et N_1 slik at for hvert par $n, m \geq N_1$ og alle $t \in [a, b]$ gjelder

$$|f_n^{'}(t) - f_m^{'}(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Dessuten finnes N_2 slik at for $n, m \geq N_2$, er $|f_n(c) - f_m(c)| < \varepsilon/2$. La $N = \max(N_1, N_2)$. Vi skal vise at vi kan bruke denne N'en for å vise at (f_n) er d_∞-Cauchy. La da $n, m \geq N$. Siden $f_n^{'}$-ene er deriverbare over $[a, b]$, kan vi bruke middelverditeoremet på differensen $f_n^{'} - f_m^{'}$. Dette gir oss, for hvert part $x, y \in [a, b]$, et $r_{x,y} \in (a, b)$ slik at

$$f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y)) = (f_n^{'}(r_{x,y}) - f_m^{'}(r_{x,y}))(x - y).$$

Men da får vi

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Men $f_n(x) - f_m(x) = f_n(x) - f_m(x) - (f_n(c) - f_m(c)) + (f_n(c) - f_m(c))$, så trekantulikheten gir

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leq |f_n(x)-f_m(x)-(f_n(c)-f_m(c))|+|(f_n(c)-f_m(c))| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Altså konvergerer (f_n) uniformt til en kontinuerlig funksjon f på $[a, b]$, ved Teorem 5.4.

Det var første del av beviset, nå må vi vise at f er deriverbar over $[a, b]$. La $s \in [a, b]$. Vi må vise at

$$Q_s(x) = \frac{f(x) - f(s)}{x - s}$$

er kontinuerlig i $x = s$. Men hver $Q_s^n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(s)}{x - s}$ er kontinuerlige, siden $f_n^{'}$ er deriverbar. Hvis vi kunne vise at $Q_s^n \to Q_s$ uniformt på $[a, b]$, ville da Q_s være kontinuerlig ved Teorem 5.4. La oss bruke ulikheten

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - y|, \qquad n, m \geq N$$

en gang til. Hvis vi setter $y = s$ i den og deler med $|x - s|$ på begge siden, står det nettopp

$$|Q_s^n(x) - Q_s^m(s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Men det betyr at $(Q_s^n)_n$ er d_∞-Cauchy. Siden Q_s er den punktvise grensa til $(Q_s^n)_n$, må $Q_s^n \to Q_s$ uniformt på $[a,b]$, og vi har bevist at f er deriverbar over $[a,b]$.

At Q_s er grensa til $(Q_s^n)_n$ er det samme som å si at $\lim_n f_n^{'} = f'$. Dette fullfører beviset. $\square$

5.2 Funksjonsrekker og konvergens

Når vi Taylorutvikler g om $x = a$ approksimerer vi g med følger av typen n'te delsummer,

$$f_n(x) = g(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Vi kan generalisere dette fenomenet kraftig:

Definisjon 5.8. *Ei funksjonsrekke er ei rekke av typen $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n=1}^\infty$, der hver f_n er definert på samme mengde A. Vi sier at ei funksjonsrekke konvergerer punktvis dersom funksjonsfølga (s_n) gitt ved $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ konvergerer punktvis. Vi sier at funksjonsrekka konvergerer uniformt på A dersom (s_n) konvergerer uniformt på A.*

Karl Weierstrass er mannen bak dette nyttige resultatet for å vise uniform konvergens av funksjonsrekker:

Teorem 5.9. *[Weierstrass' Majorantsats] Anta (f_k) er ei følge av reelle funksjoner definert på A og vi for hver k har tall M_k som majorerer f_k på A, dvs. slik at $|f_k(x)| \leq M_k$ for alle $x \in A$. Hvis $\sum_{k=1}^\infty M_k$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{k=1}^\infty M_k$ uniformt på A.*

Bevis. Vi må altså vise at de n'te delsummene $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ konvergerer uniformt. Vi skal vise at de danner ei Cauchyfølge i det metriske rommet $E = (F(A), d_\infty)$. Vi har, når $n > m$,

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k.$$

Siden rekka $\sum_{k=1}^\infty M_k$ konvergerer, danner de n'te delsummene $S_n = \sum_{k=1}^n M_k$ ei reell Cauchyfølge. Ulikheten over holder om vi tar sup på venstre side. Altså har vi vist at $(s_n)_n$ er d_∞-Cauchy, og dermed majorantsatsen. $\square$

5.2.1 Leddvis integrasjon og derivasjon av potensrekker

Ei veldig viktig gruppe av funksjonsrekker er *potensrekkene.* Dette er rekker på formen $\sum_{k=1}^\infty a_k x^k$, der $a_k \in \mathbb{R}$.

Eksempel 5.10. Se på rekka $\sum_k \frac{x^k}{2^k}$. Hvis $A = [-1,1]$, så er $|a_k x^k| \leq 2^{-k}$. Siden $\sum_k 2^{-k} = 1$ har vi fra Weierstrass' Majorantsats at $\sum_k \frac{x^k}{2^k}$ konvergerer uniformt på $[-1,1]$.

Tyner vi argumentet maksimalt, ser vi at $\sum_k \frac{x^k}{2^k}$ konvergerer på $(-2,2)$, men at den divergerer for $x = 2$. For $x = -2$ får vi den alternerende rekka $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, som også divergerer. For $|x| > 2$ divergerer rekka. Vi sier at potensrekka vår har konvergensradius 2.

Konvergensradiusen til ei potensrekke er altså det største tallet R slik at $\sum_k a_k x^k$ konvergerer for alle $|x| < R$. Eksempel 5.10 er et spesialtilfelle av følgende viktige resultat.

Teorem 5.11. *Anta potensrekka $\sum_k a_k x^k$ har konvergensradius R. Da konvergerer rekka uniformt på ethvert intervall av typen $(-r, r)$, der $r < R$.*

Bevis. På intervallet $(-r, r)$ har vi at $|a_k x^k| < |a^k||r^k| \stackrel{def}{=} M_k$. Siden $r < R$ har vi at $\sum_k M_k$ konvergerer. Resultatet følger nå fra Weierstrass' majorantsats (Teorem 5.9). ☐

Betingelsene i Teorem 5.7 er oppfylt for ei potensrekke $\sum_k a_k x^k$ ved Teorem 5.11. Altså har vi

Korollar 5.12. *La $\sum_k a_k x^k$ være ei potensrekke med konvergensradius R. Kall grensefunksjonen for f. Hvis $[c, d] \subset (-R, R)$, så er f deriverbar over $[c, d]$ med*

$$f'(x) = \sum_k k a_k x^{k-1}.$$

$\sum_k k a_k x^{k-1}$ er ei potensrekke med samme konvergensradius som $\sum_k a_k x^k$.

Fra Teorem 5.5 får vi

Korollar 5.13. *La $\sum_k a_k x^k$ være ei potensrekke med konvergensradius R. Hvis $[c, d] \subset (-R, R)$, så er*

$$\int_c^d \sum_k a_k x^k \, dx = \sum_k \frac{a^k}{k+1}(d^{k+1} - c^{k+1}).$$

$\sum_k \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ er ei potensrekke med samme konvergensradius som $\sum_k a_k x^k$.

Bevis. Det eneste vi trenger vise er at konvergensradiusen til $\sum_k \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ er R. At rekka konvergerer for $|x| < R$ er en del av konklusjonen fra Teorem 5.5. Vi må vise at rekka divergerer for $|x| > R$.

La R' være konvergensradiusen til $\sum_k \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$. Betingelsene i Teorem 5.7 er oppfylt for denne rekka. Dermed må $\sum_k a_k x^k$ konvergere på hvert intervall $(-s, s)$ der $\sum_k \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ gjør det. Dette viser at $R = R'$. ☐

Nå har vi svaret på om vi kan trikse og mikse som vi vil med MacLaurinrekka: Vi kan det!

5.3 Tallrekker

Som vi har sett, kan vi for hver reell tallfølge (a_i) danne delsummer $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Rekka $\sum_{i=1}^\infty$ konvergerer, per definisjon, akkurat når følga (s_n) konvergerer. Vi kaller a_i for ledd nr. i i rekka. Vi kan tenke oss flere tilfeller: 1) Alle leddene har samme fortegn, 2) Det er ikke noe system i fortegnet på leddene og 3) Det er system i variasjonen i fortegn på leddene (f.eks. annenhver positiv og negativ). I tilfelle 1) kan vi anta alle leddene er positive, la oss starte med å diskutere slike rekker.

Vi skal i denne seksjonen utvikle teori og metoder for å teste om rekker konvergerer eller divergerer. Fra Weierstrass' majorantsats forstår vi at det blir viktig, men det er jo også ganske naturlige spørsmål i seg selv det å studere følger av summer. Først et resultat sm gjelder uansett fortegn på leddene.

Proposisjon 5.14. *Hvis rekka* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *konvergerer, så må* $a_i \to 0$. *Det omvendte er ikke sant.*

Bevis. Siden rekka konvergerer vil delsummene (s_n) være Cauchy. Spesielt må $s_{n+1} - s_n \to 0$. Men $s_{n+1} - s_n = a_n$. At det omvendte ikke er sant er den harmoniske rekka et eksempel på. □

5.3.1 Rekker av positive tall

Vi starter med et resultat som viser seg å være veldig nyttig:

Teorem 5.15. *La* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *være ei rekke med kun positive ledd og slik at* (a_i) *er monotont minkende. Definer den stykkevis konstante relle funksjonen* f *ved at* $f(x) = a_n$ *på intervallet* $[n-1, n)$, $n = 1, 2, \cdots$. *Rekka* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *konvergerer hvis og bare hvis det uekte Riemannintegralet* $\int_1^\infty f(x)\, dx$ *konvergerer.*

Bevis. Vi har (tegn figur)

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \leq a_1 + \int_1^n f(x)\, dx.$$

$\int_1^\infty f(x)\, dx$ konvergerer per definisjon hvis og bare hvis $(\int_1^n f(x)\, dx)$ konvergerer. Så hvis $\int_1^\infty f(x)\, dx$ konvergerer er (s_n) monotont økende og begrensa. Kompletthetsaksiomet gir nå resultatet.

Vi har også

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \int_1^n f(x)\, dx.$$

Hvis ikke $\int_1^\infty f(x)\, dx$ konvergerer, må følga $\int_1^n f(x)\, dx)_n$ være ubegrensa. Da er også (s_n) ubegrensa, og følgelig ikke konvergent. □

Dette gir oss mulighet for å avgjøre konvergens av en hel familie av rekker, og dermed et arsenal av rekker til å bruke i Weierstrass majorantsats:

Korollar 5.16. *La* $0 < r < \infty$. *Rekka* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ *konvergerer hvis* $r > 1$ *og divergerer hvis* $r \leq 1$.

Rekkene i Korollar 5.16 kalles gjerne hyperharmoniske. Med utgangspunkt i at vi kjenner Korollar 5.16 blir de to neste resultatene kjappe og hendige redskaper i mange tilfeller:

Proposisjon 5.17. *[Sammenlikningskriteriet for konvergens] La* (a_k) *og* (b_k) *være to positive følger der det finnes en konstant* M *slik at* $a_k \leq M\, b_k$ *for alle* $k \in \mathbb{N}$. *Hvis* $\sum b_k$ *konvergerer så konvergerer* $\sum a_k$ *også.*

Bevis. Følga (s_n) av n'te delsummer blir monotont økende og begrensa. Kompletthetsaksiomet ordner resten. □

Proposisjon 5.18. *[Sammenlikningskriteriet for divergens] La* (a_k) *og* (b_k) *være to positive følger der det finnes en konstant* M *slik at* $a_k \geq M b_k$ *for alle* $k \in \mathbb{N}$*. Hvis* $\sum b_k$ *divergerer så divergerer* $\sum a_k$ *også.*

Bevis. Følga (s_n) av n'te delsummer blir monotont økende og ubegrensa. □

La oss ta et eksempel:

Eksempel 5.19. Rekka $\sum \frac{6n}{n^4+7}$ konvergerer fordi

$$\frac{6n}{n^4+7} \leq \frac{6n}{n^4} = 6 \cdot \frac{1}{n^3},$$

og fordi rekka $\sum \frac{1}{n^3}$ konvergerer. Vi brukte altså nå Proposisjon 5.17 med $M = 6$.

Andre rekker som ofte kan brukes i sammenheng med Proposisjonene 5.17 og 5.18 er geometriske rekker. Her har vi jo at rekka $\sum_k a^k$ konvergerer hvis $|a| < 1$ (til 1/(1-a)) og divergerer ellers.

Det neste resultatet er bare en annen måte å skrive sammenlikningskriteriene på:

Proposisjon 5.20. *La* $\sum a_k$ *og* $\sum b_k$ *være to rekker med kun positive ledd og slik at* $\lim_k \frac{a_k}{b_k} = L < \infty$*. Hvis* $\sum b_k$ *konvergerer, så konvergerer* $\sum a_k$ *også. Hvis* $L > 0$ *og* $\sum b_k$ *divergerer, så divergerer* $\sum a_k$ *også.*

Bevis. Siden $\lim_k \frac{a_k}{b_k}$ eksisterer må det finnes et $M < \infty$ slik at $\frac{a_k}{b_k} \leq M$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Med andre ord er $a_k \leq M \cdot b_k$ for alle k. Proposisjon 5.17 tar nå over for å sikre at hvis $\sum b_k$ konvergerer, så konvergerer $\sum a_k$ også. Hvis $L > 0$ har vi i tillegg $L \leq \frac{a_k}{b_k}$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Dette gir $a_k \geq L \cdot b_k$ for alle k. Proposisjon 5.18 fører oss nå velberga i havn. □

Nå kommer to tester som er litt mindre intuitive, kanskje.

Proposisjon 5.21. *[Rotkriteriet] La* $\sum a_n$ *være ei rekke med kun positive ledd. Se på følga av n'te røtter,* $(a_n^{\frac{1}{n}})$*. Anta det finnes et reelt tall* $0 < R < \infty$ *slik at*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = R.$$

Hvis $R < 1$*, så konvergerer* $\sum a_n$*. Hvis* $R > 1$*, så divergerer* $\sum a_n$*. Hvis* $R = 1$*, så kan ikke rotkriteriet brukes.*

Bevis. Anta først $R < 1$. Da finnes et a slik at $R < a < 1$. For stor nok n har vi $a_n^{\frac{1}{n}} < a$. Med andre ord har vi $a_n < a^n$. Nå gir Sammenlikningskriteriet for konvergens, Proposisjon 5.17, at $\sum a_n$ konvergerer fordi den geometriske rekka $\sum_n a^n$ konvergerer.

Anta så $R > 1$. Da finnes et a slik at $R > a > 1$. For stor nok n har vi $a_n^{\frac{1}{n}} > a$. Med andre ord har vi $a_n > a^n$. Nå gir Sammenlikningskriteriet for konvergens, Proposisjon 5.18, at $\sum a_n$ divergerer.

Rekka $\sum 1$ oppfyller $R = 1$ og divergerer. Siden $n^{\frac{1}{n}} \to 1$, har vi at $\sum 1/n^2$ oppfyller $R = 1$ og konvergerer. □

Proposisjon 5.22. *[Forholdskriteriet] La $\sum a_n$ være ei rekke med kun positive ledd. Se på følga $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$. Anta det finnes et reelt tall $0 < L < \infty$ slik at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Hvis $L < 1$, så konvergerer $\sum a_n$. Hvis $L > 1$, så divergerer $\sum a_n$. Hvis $L = 1$, så kan ikke forholdskriteriet brukes.

Bevis. Anta først $L < 1$. Det finnes $a < 1$ og N slik at $\frac{a_{n+1}}{a_n} < a$ hver gang $n \geq N$. Men det betyr at

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+2}/a_{n+1}}{a_n/a_{n+1}} < \frac{a}{1/a} = a^2.$$

Kjører vi induksjon på dette argumentet ser vi at for $\geq N$ og $k \in \mathbb{N}$ gjelder $a_{n+k} < a^k a_n$. Men da er (s_n) Cauchy, vi har jo (anta $m > n$)

$$s_m - s_n = a_m + a_{m-1} + a_{m-2} + \cdots a_{n+1} < aa_n + a^2 a_n + \cdots a^k a_n,$$

der $k = n + (m - n)$. Uansett, siden $a < 1$ får vi,

$$s_m - s_n < \frac{1}{1-a} \cdot a_n.$$

Et tilsvarende argument viser at (s_n) ikke kan være Cauchy dersom $L > 1$. Samme moteksempler som i beviset for rotkriteriet fungerer også her. □

Når du kommer i konkrete situasjoner og klør det i hodet over hvilken test du skal bruke, så bruk litt psykologi. Tenk gjerne slik: Hvilket av kriteriene gir noe pent når du bruker det? Er f. eks. a_n noe av typen opphøyd i n'te, så prøv rotkriteriet.

5.3.2 Alternerende rekker

Ei *alternerende rekke* er simpelthen ei rekke der leddene annenhvert er positivt og negativt. Vi kan skrive ei slik rekke $\sum_n (-1)^n a_n$, der $a_n > 0$ (hvis ikke første ledd er negativt setter vi bare fortegnet utenfor rekka (se Oppgave 11) og studerer ei rekke av typen $\sum_n (-1)^n a_n$.)

Det er ikke allverdens å si om alternerende rekker. Men de er ofte enkle å avgjøre konvergens av:

Proposisjon 5.23. *Anta $\sum c_n$ oppfyller $|c_1| \geq |c_2| \geq \cdots$. Da konvergerer $\sum c_n$ hvis og bare hvis $c_n \to 0$.*

Bevis. Fra Proposisjon 5.14 ser vi at det eneste vi må vise er at $c_n \to 0$ er tilstrekkelig for konvergens. Vi kan anta første ledd c_1 er positivt. □

5.3.3 Absolutt konvergens

Ei *absolutt konvergent* rekke er ei rekke $\sum a_n$ der $\sum |a_n| < \infty$. Rekka $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ konvergerer, men ikke absolutt. Har vi derimot ei rekke som konvergerer absolutt, så konvergerer den:

Proposisjon 5.24. *Ei absolutt konvergent rekke konvergerer alltid.*

Bevis. Vi må ha at de positive leddene konvergerer og at de negative leddene konvergerer (ved sammenlikningskriteriet). Ved Oppgave 11 (b) følger resultatet. □

5.4 Oppgaver

Oppgaver til Seksjon 5.1

Oppgave 1. La $f_n(x) = \sin^n(x)$, der hver f_n er definert på intervallet $[0, \pi]$.

(a) Tegn grafene til f_1, f_2 og f_3.

(b) Tegn grafen til f_{100}.

(c) Finn et uttrykk for grensefunksjonen. Tegn også grafen til grensefunksjonen.

Oppgave 2. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig og $(x_n) \subset \mathbb{R}$ ei følge med $x_n \to a$. La nå

$$f_n(x) = f(x + x_n)$$

(a) Forklar at (f_n) konvergerer punktvis. Bestem grensefunksjonen.

(b) Vis at dersom f er uniformt kontinuerlig, så konvergerer (f_n) uniformt.

(c) Gi et eksempel som viser at vi trenger uniform kontinuitet for å trekke slutninga i (b).

Oppgave 3. La $f_n(x) = \frac{5+3x^n}{1+x^n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

(a) Finn den punktvise grensa $f = \lim f_n$ på $[0, \infty)$.

(b) Konvergerer (f_n) uniformt til f på $[0, \infty)$.

(c) Vis at (f_n) konvergerer uniformt til f på $[0, \delta]$, der $0 < \delta < 1$.

(d) Bestem $L = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$.

Oppgave 4. La $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

(a) Vis at $f_n(x) \to 1$ punktvis på $(-\infty, \infty)$ og uniformt på ethvert lukka og begrensa intervall $[a, b]$.

(b) Beregn $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$. Forklar hvordan du tenker.

Oppgaver til Seksjon 5.2

Oppgave 5. La $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$, der hver f_n er definert på hele $\mathbb{R}$.

(a) Vis at $\sum_n f_n(x)$ konvergerer uniformt på hele $\mathbb{R}$ mot en funksjon g.

(b) Vis at g er deriverbar på $\mathbb{R}$. (Hint: Vis at g er deriverbar over et vilkårlig intervall $[a, b]$.)

(c) Forklar at g' er kontinuerlig over $\mathbb{R}$.

Oppgave 6. Vis at hvis $\sum_k |a_k| < \infty$, så konvergerer $\sum_k a_k \cos(kx)$ uniformt på $\mathbb{R}$.

Oppgave 7. La $f_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$, der hver f_k er definert på $[0, 1]$. Vi studerer $\sum_k f_k$.

(a) Forklar at du ikke kan bruke Weierstrass' majorantsats her. (Hint: La $x = 1$.)

(b) Bruk at rekka alternerer og at leddene minker i absoluttverdi til å forklare at $|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ for alle $x \in [0, 1]$.

(c) Forklar at $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerer uniformt på $[0, 1]$.

(d) Ei funksjonsrekke sies å konvergere *absolutt* dersom $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty$. Kommenter følgende spørsmål: Medfører uniform konvergens absolutt konvergens?

Oppgave 8. Vis at du kan finne den deriverte til summen ved leddvis derivasjon i hvert av disse tilfellene:

$$\text{(a)} \sum \frac{1}{(1+kx)^2},\ x \in (0, \infty) \quad \text{(b)} \sum \frac{x^k}{k!} \quad \text{(c)} \sum e^{-kx} \quad \text{(d)} \sum x^k$$

Oppgaver til Seksjon 5.3

Oppgave 9. (a) Vis at hvis rekka $\sum a_i$ kun har positive ledd, så konvergerer den hvis og bare hvis følga (s_n) av n'te delsummer er begrensa.

(b) Gi et eksempel som viser at resultatet i (a) ikke holder uten antakelsen om kun positive ledd.

(c) Anta rekka $\sum a_i$ har høyst endelig mange negative ledd. Holder resultatet i (a) nå?

Oppgave 10. (a) Vis at rekka $\sum \frac{n^3-6}{3(n^2+2n-1)(n^2+5)}$ divergerer. (Hint: Sammenlikn f. eks. med $\sum \frac{1}{3n}$)

(b) Vis at rekka $\sum \frac{p^k}{k!}$ konvergerer for alle $0 \leq p < \infty$. (Hint: Prøv forholdskriteriet)

(c) Det er klart at rekka $\sum k!$ divergerer. Hva kan du si om $\lim(k!)^{\frac{1}{k}}$? (Hint: Bruk rotkriteriet)

Oppgave 11. La $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være to konvergente rekker.

(a) Vis at hvis $c \in \mathbb{R}$, så er $\sum ca_n = c \sum a_n$.

(b) Vis at $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

Oppgave 12. Avgjør konvergens eller divergens i følgende tilfeller:

(a) $\sum \frac{n-1}{2n-1}$ (b) $\sum \frac{n}{n^4+2}$ (c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(d) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ (e) $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ (f) $\sum \frac{n^4}{2^n}$

(g) $\sum \frac{3^n}{n \cdot 4^n}$ (h) $\sum \frac{2^n}{(n!)^2}$ (i) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$

(j) $\sum \frac{n!}{n^n}$ (k) $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (l) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Litteratur

[1] Colin Clark, *Elementary Mathematical Analysis, 2. ed.* Wadsworth Publishers of Canada, 1982.

[2] William Dunham, *The calculus gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue.* Princeton University Press, 2005.

[3] Manfred Stoll, *Real Analysis, 2. ed.* Addison-Wesley, 2000.