Den blokkerende misoppfatning

Olav Nygaard og Anja Glad Zernichow

Vi vet alle at dersom det sitter en propp i et rør, så kan ikke vannet renne gjennom det. Lengden på proppen betyr ingenting for dens evne til å blokkere. Å få bort proppen består hovedsakelig av to oppgaver: Vi må finne hvor proppen sitter og vi må finne en måte å fjerne den. Om vi nå får bort en propp, så renner vannet videre, men neste propp vil stoppe det. Først når alle proppene er borte, kan vannet renne fritt.

Omtrent på samme måte er det med misoppfatninger i matematikk. Med misoppfatning mener vi en fastlagt oppfatning omkring et begrep som ikke er den det var meningen en skulle ha. Dette kan skyldes at en har en misforståelse eller manglende oppfatning av begrepet. Det kan også skyldes at en gjør en overgeneralisering, en overfører en tenkemåte som er riktig i spesielle tilfeller til situasjoner der tenkemåten ikke lenger holder.

Eksempel 1: La oss tenke oss at en elev i tilknytning til arbeid med addisjonsalgoritmen ikke har oppfattet at sifrenes verdi øker ti ganger for hvert hakk mot venstre i et tall skrevet i titallsystemet. Da vil det å arbeide med denne algoritmen bare kunne lede til en mekanisk rutineløsning av ferdigoppstilte oppgaver der det ofte ikke er mulig å avsløre misoppfatningen sin. Her er to oppgaver som begge trener addisjonsalgoritmen:

1. Regn ut:

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 4 \\ + & 6 & 3 & 5 \\ \hline = & & & \end{array}$$

2. Finn summen av tallene 635 og 33.

Vi ser at Oppgave 1 kan eleven få til uavhengig av forståelse av posisjonssystemet, mens eleven nok vil ha en tendens til å avsløre sin misoppfatning i oppgave 2 ved å skrive slik:

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 3 & 5 \\ + & 3 & 3 & \\ \hline = & 9 & 6 & 5 \\ \hline\hline \end{array}$$

Oppgavene i Eksempel 1 illustrerer forskjellen på en *ikke-diagnostisk* oppgave og en *diagnostisk* oppgave. Fra Oppgave 1 kan ikke vi som lærere ha noen mulighet til å oppdage elevens misoppfatning, mens vi i Oppgave 2 har en god mulighet til å finne en propp.

1. En propp er nok til å tette, men da er det også bare en propp å åpne…

En del elever som sliter med faget matematikk, får hjelp til *at* de sliter. Dessverre kan det se ut som få elever får hjelp til å finne ut *hvorfor* de sliter. Med andre ord gjør vi ikke noe med proppen. Vi heller kanskje på mindre vann, så ”skadene” ikke skal bli for store. Hvis en velger å la proppen bli sittende gjennom flere år i skolen, kan en lett forestille seg omfanget av skadene.

Vi skal nå studere et konkret tilfelle fra 10. trinn og se hvordan ei misoppfatning blir oppdaget og arbeidet med å få bort. Denne jenta er tildelt 4 timer med spesialundervisning per uke i matematikk. Hun har gjennom mange år prestert veldig svakt, men et stort pluss er at hun er motivert for å lære matematikk. Ønsket om å oppnå en karakter i faget er sterkt hos henne. Eleven har IOP med fritak fra karakter i faget matematikk. Det som nå følger er Anjas observasjoner og arbeid med henne. Det hele startet i en time der Anja og eleven jobbet alene sammen:

> Min store undring hadde sin utspring i en time hvor eleven jobbet med volum. Vi skulle regne om 11 dl til liter. Vi holdt på i over en time med problemstillingen. Vi tegnet litermål og "bakte boller". Vi snakket også om at ½ l inneholder 5 dl væske, og at en liter inneholder 10 dl. Eleven klarte likevel ikke å regne om de gitte 11 dl til 1,1 liter.
>
> I etterkant av denne timen hadde Olav og jeg en samtale, hvor vi tilfeldigvis kom inn på denne problemstillingen og erfaringen min fra timen sammen med jenta. Hva kan dette problemet skyldes? Etter samtalen hadde vi en aning om at dette kunne være et tilfelle av den kjente og veldokumenterte misoppfatningen "desimaltall som par av hele tall". Vi ønsket å gjøre en liten kartlegging av tallforståelsen til eleven og tok utgangspunkt i heftet "*Kartlegging av matematikkforståelse/ Veiledning til tall og tallregning"* [1] fra Læringssenteret.
>
> Tilbake i klasserommet begynte vi med, etter mine begreper, enkle oppgaver for en 10. klassing. Den første oppgaven som ble gitt var om *tallbegrepet – desimaltall.* Elevene skal utvikle begrepet de har om hele tall. Den første oppgaven eleven fikk var (se [1] s. 6):
>
> > **Sett en ring rundt det minste av disse tallene:**
> >
> > **0,625 0,25 0,3753 0,125 0,5**
>
> Her svarte eleven at 0,5 var minst. Neste spørsmål var
>
> > **Hvorfor er det minst?**
>
> Jenta svarte at 0,5 er minst fordi det har færrest siffer. Dette svaret kan kanskje tyde på misoppfatningen "korteste tallet er alltid minst" eller, sagt med andre ord, "lengste tallet er alltid størst". Vi gikk videre med oppgaven
>
> > **Sett en ring rundt det største av tallene?**
> >
> > **0,649 0,87 0,7**
>
> Eleven mente 0,649 var størst. Jeg spurte
>
> > **Hvorfor er det størst?**
>
> Eleven svarte: "Fordi dette tallet inneholder flest siffer, ergo størst". Jenta var helt sikker på at svarene var riktige. Hun var altså ikke klar over sin egen misoppfatning. Vi fortsatte med flere oppgaver (hentet fra [1] s. 8):
>
> > **Sett en ring rundt det største tallet: 5436 547 56**
> > **Sett en ring rundt det største tallet: 6,78 45,6 34,5**
> > **Sett en ring rundt det største tallet: 3,521 3,6 3,75**
> > **Sett en ring rundt det største tallet: 4,09 4,7 4,0008**
>
> Eleven svarte riktig på de to første oppgavene.

Etter tolkningene i [1] s. 8 viser dette at eleven kan sammenligne størrelser på naturlige tall og likeledes desimaltall med ulike heltallsdeler. På de to siste oppgavene svarte eleven henholdsvis. 3,521 og 4,0008. Misoppfatningen om størrelsen ved desimaltall ble med dette tydelig. Men ennå er det ikke klart hvordan hun tenker omkring desimaltall.

> For å finne ut mer jobbet vi også med å plassere tall på tallinjen. Jeg tegnet en tallinje fra 2 via 2,1 og 2,2 til 2,3. Tallene var markert med følgende intervall: 2,01 – 2,02 – 2,03; altså 10 plasser mellom 2 og 2,1. Jeg satte inn 2 piler, en på 2,03 og en på 2,27, Eleven ble så bedt om å finne tallene som hørte til pilene. Den siste pilen fikk en verdi på 2,9. Tankegangen her var at fra 2,2 til pilen, så var det 7 streker imellom. 2,2 + 7 streker blir 2,9. Sammenhengen med tallinjen ble ikke vurdert. Det samme gjaldt første pil som var tegnet inn på 2,03 – eller 3 streker etter 2. Eleven fikk da verdien til å være 5. Resonnementet som ble legt til grunn var at 2 + 3 streker = 5. Eleven satte altså inn tallene 5 der 2,03 skulle vært, og 2,9 der 2,27 skulle vært. Eleven reagerte ikke på at tallet 5 ble satt inn på tallinjen før 2,9.

La oss stoppe opp og tenke etter: At jenta ikke syntes det var et problem at 5 står før 2,9 følger opp misoppfatningen om at lengste tallet er størst. Når hun regner 2,2 + 7 streker blir 2,9, demonstrerer hun at hun behandler desimaltall som par av hele tall. Men vi ser at bak disse to velstuderte misoppfatningene ligger noe enda mer fundamentalt; hun tar ikke hensyn til, eller ser ikke, sammenhengen mellom tallinja og desimaltallene. Med denne informasjonen fortsatte arbeidet:

> Vi jobbet deretter med å sette navn på de tallene som lå på tallinjen vår. Eleven kom fram til - etter en del tankeeksperimenter - at både 2,9 og 5 lå utenfor den oppgitte tallinjen. Begge tallene som ble satt inn var altså større enn siste tall på linjen, og hørte derfor ikke til i det oppgitte tallområdet. Vi var veldig stolte da vi kom så langt. Neste utfordring lå så i å forsøke å få inn de riktige tallene i rutene.
>
> Vi gikk over på en ny oppgave. Eleven fikk spørsmål om hvilke tall som lå mellom tallene 0,47 og 0,48. Til svar fikk jeg at det var tallene 0,30 og 0,31 og 0,32 osv. Her kunne det ikke gis noen begrunnelse på hvorfor disse tallene ble valgt. Ved arbeid med tallinjen, kunne eleven se at tallene ikke hørte hjemme mellom 0,47 og 0,48, men hvilke tall som hørte hjemme mellom dem, kunne hun ikke se.
>
> I flere uker jobbet vi mye med å systematisere størrelsene på tallene. Det var veldig givende å se gleden eleven gav utrykk for når tallene ”falt på plass”. Sakte men sikkert ble det laget en sammenheng for henne mellom stedene på tallinjen og desimaltallene. Hun fikk oppdage at desimaltallene er en måte å si nøyaktig hvor på tallinjen vi er, en kunnskap hun skulle ha hatt for 7-8 år siden.

For denne jenta var det nok mye sannhet i ”en propp er nok til å tette.” Den lykkelige fortsettelsen av historien er nemlig at på juletentamen oppnådde hun karakteren 3, en opplevelse og prestasjon hun aldri har vært i nærheten av før. Denne fundamentale misoppfatningen hennes har selvsagt ødelagt for læringen av nesten alle temaer i matematikk, så det er en lang vei å gå for henne enda, men nå har hun i alle fall fått ryddet ett kjempehinder av veien.

> Eleven har nå utover vårsemesteret stabilisert seg på en solid 3’er. Hennes handikap er at ”proppen” har skapt flere tomme områder i matematikkunnskapene hennes. Hun har mange huller som må tettes. Dette jobber vi nå med på en strukturert måte. Hun er utrolig stolt når hun kan forklare *hvorfor* hun gjør som hun gjør og ikke bare hvordan ei oppgave skal løses. Et viktig aspekt i denne prosessen er også å registrere at gleden ved matematikken er på vei tilbake. Nå gjelder det bare å være tålmodig.

Vi vil i fortsettelsen holde fram med å kalle jentas manglende kunnskaper for misoppfatninger, selv om vel egentlig misoppfatningene hun viste oss alle var naturlige konsekvenser av en helt fundamental manglende oppfatning. Svarene hennes på de neste fire oppgavene må også ses i lys av det vi nå vet om henne:

a) **5,1 + 0,46.**
Jenta sier 0,47. Alt med null blir null (altså 5 + 0 = 0). Da står vi igjen med 0,46 + 0,1 = 0,47. Hun behandler altså tallene som par av hele tall.

b) **37 – 0,16**
Jenta fikk svaret 716. Kunne ikke begrunne hvorfor. Oppgaven er meningsløs med hennes begreper om desimaltall.

c) **4 x 2,4** Svarte ikke på denne – vanskelig. Ja, hva skulle dette bety?

d) **0,12 : 2** Her var svaret at dette ikke var mulig. En skulle kanskje forvente at hun ville svare 6 her?

2. Misoppfatninger – hva skyldes de?

Vi har sett en elev som tydelig demonstrerte noen av de mest kjente misoppfatninger litteraturen beskriver, og som har vært i spesialpedagogisk undervisning i noen år. Likevel ble elevens problem ikke funnet. Det er et tankekors. Et annet tankekors er hvordan en ressurssterk og motivert elev kunne få en slik misoppfatning.

Vi kan ikke svare på disse to spørsmålene for denne konkrete eleven, men vi kan peke på allmenne grunner: Når det gjelder det å få misoppfatninger, så er etter vår oppfatning læreren den vanligste kilden. Men også lærerplaner og lærebøker kan være med på å la misoppfatninger befeste seg. Noen eksempler kan illustrere:

Eksempel 2: La oss se hvordan lærer kan forårsake en misoppfatning og hvordan lærebok og læreplan kan forårsake misoppfatninger.

1. Mange studenter i lærerutdanninga sliter med å forkorte brøker av algebraiske uttrykk. De oppgir ofte at de har lært å ”stryke tall mot hverandre”. ”Så stryker vi 2 mot 2”, sier de. Hvorfor sier lærere noe så dumt, selv om det er sant? Frasen er som skapt til å skape misoppfatning. Når eleven i tre år har hørt ”stryke den mot den”, hvordan skal vi da kunne vente at kunnskapen om hva stryking representerer, forblir? En slik misoppfatning kan enkelt unngås ved at læreren alltid sier ”så deler vi med tallet 2 i både teller og nevner”. Da peker vi på det som logisk skjer.

2. Vi leser gjerne 2,437 som ”to komma fire hundre og tretti sju”. Ved å lese tallet slik, høres det jo vitterlig ut som om dette er mye mer enn 2,5, ”to komma fem”. Dessuten høres det ut som om vi har å gjøre med to hele tall ad skilt ved et komma.
3. Den kanskje mest kjente misoppfatning i matematikk er ”multiplikasjon gjør større”. Og hvordan lærer vi om multiplikasjon? Jo, de første åra foregår alltid konkretiseringa ved hele, positive tall. Og da oppdager de fleste at svarene alltid blir større enn tallene som inngår. En *overgeneralisering* inntreffer dermed hos mange. Det at elevene har sett så mange eksempler der systemet tydelig synes, gjør at de danner seg en formening om at sånn er det alltid. Misoppfatningen er enkel å avsløre, og ikke veldig vanskelig å bli kvitt, men mest av alt, veldig unødvendig å skape. Og det er systemet selv som legger grunnlaget for at misoppfatningen dannes.
4. En misoppfatning blant lærerstudenter er ”en funksjon er noe med et funksjonsuttrykk”. Selvsagt har nesten 100% av studentene denne misoppfatningen. Allerede fra ungdomsskolen er funksjoner eksemplifisert gjennom funksjonsuttrykk. Hvordan skulle den voksne student ende opp med en annen tanke om funksjoner?

I vår utdanning av lærere og spesialpedagoger må vi vektlegge det å sørge for at den kommende pedagogen selv har dyp innsikt i begrepene som skal det skal undervises i, og deretter kunnskap om de vanligste misoppfatninger og om tilnærminger til å oppdage dem – og kurere elevene for dem.

Læreren er hjelpeløs uten selv å ha gode begreper og vil, uten å vite det, være med på å skape misoppfatninger hos mange elever.

I boka Fatte Matte [2] er det tatt utgangspunkt i misoppfatninger og manglende kunnskap vi vet at lærerstudenter har. Gjennom å studere disse studentenes kamp med sine oppfatninger, er det meningen at leserne skal ta et aldri så lite oppgjør med sine egne oppfatninger.

En kunne også tenke seg en tilnærmelse der studenten selv befester sine begreper ved å studere barns mest kjente misoppfatninger. Erfaring fra lærerutdanning tyder imidlertid på at ofte har studenten ikke gode nok begreper selv til å se hva barnet gjør feil og til – på grunnlag av disse feilene – å diagnostisere. La oss se et eksempel på akkurat dette:

Eksempel 3: Variabelbegrepet er det ofte så som så med, og misoppfatningene her tror vi nesten alltid er skapt av en lærer med manglene variabelbegrep selv. I lærerutdanninga på Høgskolen i Agder arbeidet studentene med å studere ungdomsskoleelevers løsninger av følgende oppgave:

Lag ei regnefortelling til uttrykket 6a + 8b.

Barna hadde mange forslag, veldig mange hadde skrevet noe sånn som ”Du har seks epler og åtte bananer”. Vi vet at dette er et typisk svar blant elever, men vi tror det vil også være et typisk svar blant lærere, i alle fall var det mindre enn 10 % av studentene som innså at elevenes svar er galt. I elevenes svar er ikke a og b variabler, de er symboler for noe, eller forkortelser. Et riktig svar ville være ”Et rektangel har ei grunnlinje på 6 og ei høyde som kan variere. Et annet rektangel har ei grunnlinje på 8 og ei høyde som kan variere. 6a + 8b viser arealet til de to rektanglene til sammen.”

Vi vil tro en del kjenner seg igjen i å undervise algebra med fraser av typen ”vi kan ikke legge sammen torsker og makreller”. Vi lærer altså barna til å lese variablene som forkortelser eller substitutter for noe, og ikke som størrelser som kan variere over en klasse av tall eller objekter.

Studentenes reaksjon var at ”den riktige” regnefortellinga var grusom vanskelig og tungvint. De hadde svært vondt for å forkaste ”den gale” forklaringa. Nådestøtet ble satt inn da de skulle lage regnefortelling til uttrykket $6ab$. Men nå kunne nesten alle lage ei fortelling ved hjelp av å oppfatte dette som arealet av seks like rektangler med ikke oppgitte sider, a og b.

Lærebøkene kan nok være svært medskyldige i misoppfatningen ”en variabel er en forkortelse”. Tenk bare på formler for areal og omkrets i plan geometri: Vi bruker alltid O for omkrets, A for areal, d for diameter, r for radius og g for grunnlinje. Vi oppfordrer rett og slett til misoppfatninger gjennom disse skrivemåtene. Uproblematisk blir det først når læreren selv har begreper slik at elevene får lære at g ikke står for grunnlinje, men for det tallet som er lengden av grunnlinja.

3. Hvem får misoppfatninger, de dumme?

En oppfatter tradisjonelt elever med misoppfatninger som ”dummere” enn andre elever. Vi tror bildet er mye mer komplisert, og slett ikke slik. Vi har sett et eksempel på en ressurssterk og motivert elev som hadde en ødeleggende misoppfatning. Misoppfatning har neppe noe med tankeevne å gjøre. Det ligger i sakens natur at for å få en misoppfatning, må det ligge kognitive prosesser i forkant. Erfaring har vist oss at elever med misoppfatninger er akkurat like tenksomme - og ubetenksomme - som andre elever, forskjellen ligger i at de tenker på en annen måte omkring et begrep enn det som var meningen.

I arbeidet videre med misoppfatninger er det viktig at vi arbeider videre med å finne ut av hva matematikkunnskap egentlig består av. Hvilke komponenter er det som må være på plass for at vi skal få og ha de ønskelige kunnskaper? En detaljert og grundig rapport omkring dette er [3]. Her er matematikkunnskap delt inn to hoveddeler, hver med fire kompetanser. En oversikt er gitt i følgende tabell:

Å spørre og svare i, med og om matematikk	**Å omgås språk og redskaper i matematikk**
Tankegangskompetanse Problembehandlingskompetanse Modelleringskompetanse Resonnementskompetanse	Representasjonskompetanse Kompetanse i symbolbruk og formalisme Kommunikasjonskompetanse Hjelpemiddelkompetanse

En tolkning av hva disse åtte kompetansene betyr kan finnes på internettsiden

http://www.matematikksenteret.no/content.ap?thisId=307&language=0

Litteratur:

[1] Brekke, Gard: *Kartlegging av matematikkforståelse - Veiledning til tall og tallregning.* Læringssenteret, 2000.

[2] Nygaard, Olav og Pettersen, Petter: *Fatte Matte.* Høyskoleforlaget, 2001.

[3] Niss, Mogens og Højgaard Jensen, Thomas (red.): *Kompetencer og matematiklæring – ideer og inspirasjon til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* ISBN 87-603-2244-6. Finnes tilgjengelig på *http://pub.uvm.dk/2002/kom/.*

Om forfatterne: Anja Glad Zernichow er lærer i ungdomsskolen i Kristiansand med fagene matematikk, tysk og engelsk. Hun er også mastergradsstudent i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Agder. Olav Nygaard er førsteamanuensis i matematikk ved Høgskolen i Agder, med matematisk analyse som forskningsområde og med spesialpedagogiske problemstillinger som interessefelt innen matematikkdidaktikk.