Kvadratrøtter og grønne kanarifugler-

på jakt etter rota til minus en...

Kristiansand 19. februar 2004, Olav Nygaard

Kvadratrot

Å finne et tall som er slik at $x^2 - 1 = 0$ går greit. Hvis vi har lært at $(-1) \cdot (-1) = 1$, så greier vi endatil å finne to *x*'er som passer, nemlig 1 og -1. Men forsøker vi å finne tall *x* slik at $x^2 + 1 = 0$, må vi gi opp. Alle tall, enten de nå måtte finne på å være positive, null eller negative er minst 0 når de blir kvadrert. Så $x^2 = -1$ går ikke! I allefall ikke hvis vi synes *x* skal være et tall.

Hvilket bilde har vi av det å trekke kvadratrot? På skolen lærte jeg at hvis vi skal trekke kvadratrota av for eksempel 16, så tenker vi oss at arealet av et kvadrat er 16 og så skal vi finne lengden på en av sidene i kvadratet. Vi skal altså rive fra hverandre et kvadratisk bur og måle lengda på en av sidene.

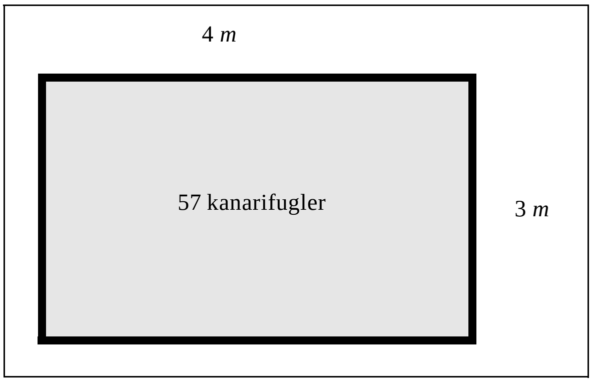
Hvorfor stemmer dette bildet? Jo, fordi å multiplisere to positive tall, for eksempel 3 og 4, er liksom å ta et bord på 3 meter og et bord på 4 meter og så tenke på arealet av det rektangulære "huset" som disse danner lengde og bredde i. Bildet er fint det, men det virker bare for positive tall. Vi kan ikke bruke det bildet til å forklare at $(-3) \cdot 4 = -12$ for eksempel. Til det trenger vi andre bilder, for eksempel kan vi tenke oss at vi tar ut 3 kroner fra ei kasse fire ganger.

I denne lille artikkelen vil jeg, med utgangspunkt i at vi tenker på multiplikasjon av positive tall som å finne areal av et rektangel, lage et bilde som gjør at vi finner kvadratrøtter til negative tall også. La oss bare først være enige om at negative tall ikke har noen kvadratrøtter som er vanlige, reelle tall. Så hvis en rot til et negativt tall skulle finnes, må de være et annet sted enn blant de reelle tallene.

Denne ideen "let et annet sted" er langt skritt mot å finne masse røtter.

Multiplikasjon når det er grønne kanarifugler til stede

Da vi bygget et rektangel av planker var det ingen grønne kanarifugler i nærheten. Men det kunne det jo ha vært! Det kunne for eksempel ha sittet 23 grønne kanarifugler på den ene og 34 på den andre. Og hvis vi forutsetter at de synes spikring er festlig og ikke noe skremmende, så ville det være, etter vi hadde laget rektanglet vårt på 3 ganger 4 meter, nøyaktig 23 + 34 kvitrende, grønne kanarifugler inni det rektangulære buret. Jeg har laget en tegning:



FIGUR 1. Illustrasjon av multiplikasjonen $4 \cdot 3$ **med 23 og 34 kanarifugler.**

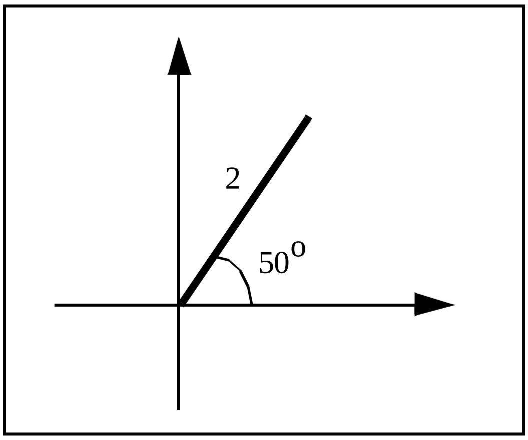
Denne måten å tenke på blir en utvidelse av den gamle måten å tenke på; da er det ingen kanarifugler å ta hensyn til.

La oss nå tenke oss at vi har endt opp med et bur som er kvadratisk på formen, med areal 16 og der det er 76 grønne kanarifugler inni. Hvor lange er da hver av sidene og hvor mange grønne kanarifugler sitter det på hver side hvis det var like mange? Jo lengden er 4 og det satt 38 kanarifugler på hver planke.

Nå har vi utvidet multiplikasjon og dermed utvidet ideen å trekke kvadratrot. Vi har ikke gjort noe galt, for når det ikke er noen kanarifugler der er alt som med det gamle multiplikasjonsbegrepet. Og vi har en multiplikasjon som er effektiv når det er kanarifugler til stede.

Nå skal vi spinne litt videre på disse ideene og se at denne uskyldige, lille utvidelsen av multiplikasjonsbegrepet gjør at vi kan finne kvadratrot til negative tall. Ikke som tall, men som plankelengder med kanarifugler på. Det første vi trenger er en effektiv måte å tegne opplysningen “vi har en plankebit som er 2 meter lang og det sitter 50 grønne kanarifugler på den”.

Kanskje synes du at punktet (2, 50) i (x,y)-planet er en grei måte å tegne denne opplysningen. Det er det forsåvidt, men da blir enheten meter i x-retning og antall kanarifugler i y-retning. Dessuten må vi ha et uhorvelig stort ark når det er 273 kanarifugler.



FIGUR 2. **En planke med lengde 2 og 50 kanarifugler på.**

Vi skal heller tegne på en annen måte: Vi lar rett og slett lengde være lengde og så viser vi hvor mange kanarifugler det sitter på planken ved å rotere lengden så mange grader som det er kanarifugler. I Figur 2 ser du et eksempel.

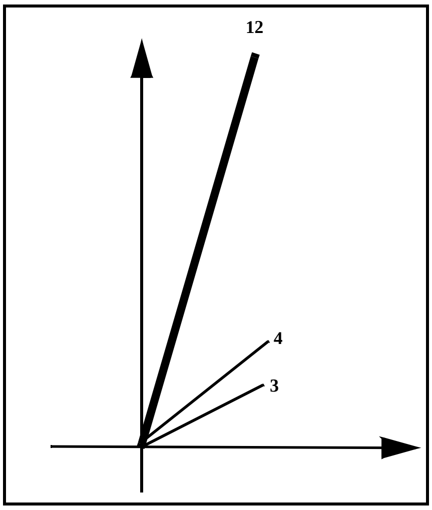
I Figur 3 har jeg tegnet multiplikasjonen vi så på i Figur 1 etter det nye systemet med lengder og vinkler.

Negative tall og multiplikasjon

Vi ser at med denne måten å tenke på, er et negativt, reelt tall en planke med 180 kanarifugler på. Og vi ser at systemet vårt har en svakhet: Vi ser ikke forskjell på om det er 360 kanarifugler eller om det ikke er noen i det hele tatt. Vi ser heller ikke forskjell på 90 og 450 kanarifugler.

Men vi ser at produktet av to negative tall må være positivt. For da er det jo 180 fugler på den ene planka og 180 på den andre, totalt 360 fugler i buret, så resultatet ligger på *x*-aksen, til høyre for null, uansett hvor lange plankene måtte være.

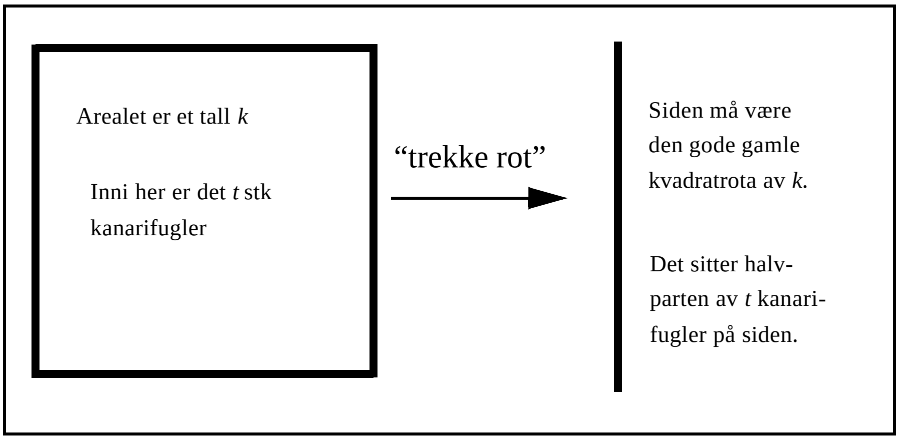
Og vi ser at produktet av et positivt tall og et negativt tall må være negativt, for i buret blir det nå garantert 180 kanarifugler.



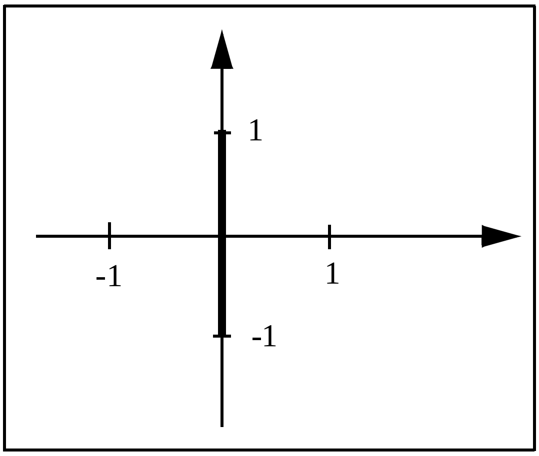
FIGUR 3. **Som du sikkert forstår illustrerer de tynne linjene sidene og den tykke linja viser areal og antall kararifugler i buret.**

Negative tall og kvadratrot

La oss minne oss selv om hva det er å trekke kvadratrot i den utvidede multiplikasjonen med både lengde og antall: Da skal vi splitte et kvadratisk bur med et gitt antall kanarifugler i en lengde og en bredde, slik at lengden og bredden er like store og slik at det er like mange kanarifugler på lengden som på bredden. Vi kan tegne tankeprosessen sånn:



FIGUR 4. **Tankeprosessen “å trekke rot”.**



FIGUR 5. **De to røttene til -1.**

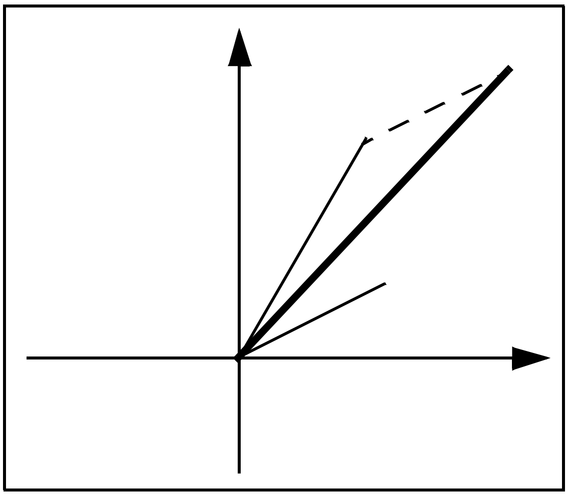
Gjør vi dette med -1, ser vi at sidelengden må være 1 og at det satt 90 kanarifugler på den. Eller kanskje satt det 270 kanarifugler der? Ikke vet jeg, men det jeg vet er at vi har funnet to røtter til -1. La oss tegne de to røttene; du ser dem i Figur 5:

Røttene er altså ikke tall men steder i planet. Vi kan si at vi har *utvidet* multiplikasjon fra tallinja til planet, slik at den ganle multiplikasjonen er uendret, og dette har gitt oss røtter til negative tall. Tenker vi oss bittegrann om, ser vi at alle punkter i planet faktisk får akkurat to røtter på denne måten. Det var jo en del mer enn med den gamle kvadratrota som bare gav røtter til den høyre delen av *x*-aksen! Spesielt ser vi at vi får fram to røtter til positive tall, fordi 0 + 0 = 0 og 180 + 180 = 360, altså en positiv rot og en negativ rot.

Hvis du er sånn som jeg synes du sikkert jeg har juksa litt: Jeg har liksom lagt til noe som ikke fins for å løse det problemet jeg ikke greide å løse ved hjelp av det jeg allerede hadde. Men er ikke det lov da? Hvis du i utgangspunktet bare har hele tall, greier du ikke å finne $\sqrt{3}$, så du trenger fler, nemlig de reelle tallene. Nå trengte jeg mer “tall” og i tillegg trengte jeg utvidet multiplikasjon. Jeg laget begge deler og det ser konsistent ut.

Selvsagt er det ikke jeg som har kommet på denne utvidelsen, jeg har bare konkretisert den for deg. Den første som fikk ideen ser ut til å ha vært nordmannen Caspar Wessel i 1797, det er jo litt artig. Han var forresten broren til forfatteren Johan Hermann Wessel og han var fetter til Tordenskjold (Petter Wessel). Det finnes andre måter å tenke på også, som leder til røttene til negative tall, og disse er eldre.

Den komplekse tallkroppen



FIGUR 6. Den tykke streken er summen av de to tynne

Når vi tenker på punktene i planet som lengder med en viss vinkel, har vi altså laget en multiplikasjon i planet. Vi kan lage oss en addisjon også, på mest naturlige måte, nemlig ved å legge lengdene etter hverandre, slik som i Figur 6.

Nå gir det ikke noe mening å tenke på kanarifugler lenger, men du ser kanskje at denne måten å plusse på faller sammen med den vanlige måten å plusse reelle tall på. Det lærer vi gjerne å tenke på som å legge piler etter hverandre. Det er også den samme måten å plusse på som vi lærer om i vektorregningen i videregående skole.

Og addisjonen har en fysisk tolkning som er nyttig: Hvis to personer trekker en kjelke med kraft lik lengden av de tynne strekene i Figur 6 og retning lik strekenes retning, så trekker de tilsammen med en kraft så stor som lengden av den tykke pilen og i den tykke pilens retning. Det synes jeg virker rimelig, synes ikke du?

Når vi har planet med addisjon og multiplikasjon slik vi har lært her, så kaller vi alt dette (planet, addisjonen, multiplikasjonen) for de komplekse tallene eller *den komplekse tallkroppen*. De reelle tallene sammen med sin addisjon og multiplikasjon kaller vi tilsvarende for den reelle tallkroppen. Jeg har aldri riktig forstått hvorfor vi kaller det en kropp. På engelsk heter det *field*. Tenk på det: Det komplekse talljordet! Det er litt morsomt, synes jeg.

Vi arbeider på det komplekse talljordet og gjør oss kjent der

Jeg har laget noen oppgaver som du kan kose deg med. I nesten alle oppgavene trenger du det geometriske bildet av den komplekse tallkroppen som du har lært om.

Kvadratrot og grønne kanarifugler

Oppgave 1. Alle posisjoner på det komplekse talljordet er gitt ved en avstand fra origo og en vinkel. Finn og tegn disse stedene:

a) Stedet med avstand $r = 1$ og vinkel $v = 60$ grader.

b) Stedet med $r = 2$ og vinkel $v = 225$ grader.

c) Stedet som er summen av posisjonene i a) og b).

d) Stedet som er produktet av posisjonene i a) og b).

Forsøk å finne koordinatene til stedet i a). (For å finne koordinater generelt trenger du å kunne *trigonometri*, dvs sinus og cosinus.)

Oppgave 2. La oss skrive (r,v) for posisjonen med avstand r fra origo og vinkel v. Legg sammen (1,90) og (1,0) ved å tegne. Finn r og v i summen. Hva blir produktet? Hva skjer når vi multipliserer en posisjon med (1,0) ?

Oppgave 3. Beregn og tegn de to røttene til

a) Punktet (1 , 90)

b) Punktet (4 , 270)

c) Punktet (4 , 60)

Oppgave 4. Stedet (1,90) kalles i (den ***i**maginære* enhet). Stedet (1,0) kan vi kalle 1 (som før).

a) Tegn stedet $1 + 2i$.

b) Hvor tror du de tre stedene $-1 + i$, $2 - i$ og $-3 - \frac{1}{2}i$ er?

c) Hva blir i^2 ?

d) Hva blir $\sqrt{i}$?

Oppgave 5. I stedenfor å dele sirkelen i 360 deler, eller grader, kan vi "dele den i 2π biter". Vinkelen 90 grader svarer da til $\frac{\pi}{2}$, altså en fjerdedel av hele veien rundt. 180 grader svarer til π osv. Vi kaller denne måten å oppgi vinkler på for *radianer.*

a) Finn vinklene 30, 45 og 60 grader i radianer. (Hint: 30 grader er en sjettedel av 180 grader.)

b) Hvor mange grader er disse vinklene $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{12}$?

Oppgave 6. Leonard Euler (1707-1783) skrev stedet $z = (r,v)$ som $z = re^{iv}$ der v er oppgitt i radianer som vi lærte om i forrige oppgave.

a) Forklar at med denne skrivemåten blir $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b) Hvor ligger $e^{i\pi}$? Litt av et pseudonym -1 har!

c) Finn $e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\pi}$ på formen re^{iv}.

d) Hvordan kan du raskt finne $e^{iu} \cdot e^{iv}$?

(Det er en grunn til at vi skriver e her. Det er faktisk det samme e som du møter i videregående skole, men det krever mye kunnskap å se den sammenhengen.)

Oppgave 7. Dersom du har lært trigonometri kan du kose deg med å innse at $e^{iv} = \cos(v) + i\sin(v)$. Forklar så d'Moivres formel $(\cos(v) + i\sin(v))^n = \cos(nv) + i\sin(nv)$.

Litteratur jeg har brukt og som du kan bruke

Hvis du er ungdomsskoleelev eller går første året på videregående er ikke alle disse referansene like gode, siden de forutsetter forkunnskaper i matematikk som du kanskje ikke har ennå. Den første av referansene er veldig grundig og fin. De to siste innføringene krever nok at du har to år fra videregående.

[1] Hans Erik Borgersen: *Lineær Algebra*. 5. utg. ADH 1976. (Kapittel 0)

[2] Internettstedet **http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Wessel.html** (Her kan du lese om andre matematikere også.)

[3] Internettstedet **http://www.science.no/faqdisplay.php?fitem=100**

[4] O. Nygaard, P. S. Hundeland og P. Pettersen: *Aha, Matematikk og matematikkdidaktikk*, 2. utg. Høyskoleforlaget 2000. (Kapittel 5)
(Dette kapitlet gir en elementær og intuitiv innføring i tallutvidelser.)

[5] H. Bjørnestad, U. H. Olsson, S. Søyland, F. Tolcsiner: *Matematikk for økonomi og samfunnsfag*. 5. utg. Høyskoleforlaget 2001. (Kapittel 10)

[6] T. Gulliksen: *Matematikk i praksis*. 4. utg. Universitetsforlaget 2000. (Kap 9.5-9.6)

Et par ord til lærere som kunne tenke seg å bruke denne artikkelen

Jeg har skrevet dette med tanke på at det skulle kunne brukes i ungdomsskole (da kanskje helst i valgfag matematikk) eller som utgangspunkt for prosjekt i videregående skole. For mange elever er det ikke det at matematikken skal være nyttig som er mest motiverende; det er mer den estetiske siden som apellerer. Jakten på $\sqrt{-1}$ vil for slike elever være like spennende som den vil være aldeles meningsløs for andre.

Min erfaring, etter å ha gitt noen kull med studenter den første innføring i komplekse tall, er at det er veldig viktig å hjelpe dem til å bli vant til å tegne tallene. Etter en stund blir de kjent i tallplanet og det hele blir mer naturlig for dem. Algebra med komplekse tall må komme etter at en har fått erfaring nok med de komplekse talla som posisjoner til å kunne "verifisere" de algebraiske lovene.

Som lærer har jeg mange ganger gått i den fella å tro at ting er mer avansert enn det er fordi jeg selv fikk det servert på et tidspunkt da jeg var forutsatt å være moden for å få det presentert på en mer abstrakt og avansert måte. Etter å ha tygd noen år på det jeg lærte, og etter å ha brutt kunnskapen ned i smådeler, ser jeg at det ikke alltid er de letteste tingene en lærer først. Så en artig utfordring er nå å finne ut: Hvor vanskelig er temaet "komplekse tall" egentlig?