

Matematisk modellbygging

Leiv Storesletten
Olav Nygaard

16. januar 2007

Forord

I masterstudiet i matematikdidaktikk ved Høgskolen i Agder inngår emnet *Matematisk modellering*. Denne teksten omfattar eit utval av model-
lar, hovudsakleg frå mekanikk og økologi. Målet er å gi studentane innsikt i
matematisk modellering og ei reflektert haldning til bruk av matematikk.

I dette emnet har vi lagt vekt på å arbeida med gode, velvalde model-
lar der heile modelleringsprosessen blir illustrert med modellformulering,
modellutforming med forenkling av problemstillinga, matematisk analyse
av modellen, tolking av resultata og testing av modellen. Vi ser det som
ein styrke at studentane blir kjende med nokre berømte modellar som har
spelt ei viktig rolle innan modellering og vellukka bruk av matematikk. Ei
slik innføring vil gi studentane god bakgrunn for å kunna vurdere model-
lar i lærebøker, tilpassa modellar i eiga undervisning og sjølv utvikla nye,
høvelege modellar.

Første utgåva av denne læreboka vart trykt i desember 2004. I den an-
dre utgåva har vi gjort fleire endringar i teksten, lagt til appendiks 1.3 og
omarbeidt nokre figurar. Vidare har vi retta opp trykkfeil.

Høgskolen i Agder
Institutt for matematiske fag

November 2005.

Leiv Storesletten

Olav Nygaard

Innhold

1	Modellbygging	1
1.1	Innleiing	1
1.2	Modelleringsprosessen	1
1.3	Appendiks: Andre ordens lineære og homogene differensiallikningar med konstante koeffisientar	3
1.4	Oppgåver	6
	Litteratur	8
2	Matematiske modellar frå klassisk mekanikk	9
2.1	Innleiing	9
2.2	Pendelen	9
2.3	Fall i konstant tyngdefelt med luftmotstand	15
2.4	Fall i variabelt tyngdefelt	17
2.5	Dempa harmoniske svingingar	20
2.6	Keplers lover	24
2.7	Oppgåver	31
	Litteratur	34
3	Modellar i økologi	35
3.1	Innleiing	35
3.2	Vekst i populasjonar	36
3.2.1	Ekspontiell vekst (Malthus' modell.)	37
3.2.2	Logistisk vekst (Verhulsts modell)	39
3.2.3	Generalisering av Verhulsts modell	41
3.3	Periodiske svingingar i dyrebestandar. Lotka-Volterras modell	42
3.3.1	Lotka-Volterras likningar.	44
3.4	Dempa svingingar. Generalisering av Lotka-Volterras modell .	50
3.5	Konkurrerende artar – Eksklusjonsprinsippet	54
3.6	Modellar med grensesyklar - Kolmogoroffs modell	58
3.7	Appendix: Om stabilitet - Viktige resultat	64
3.8	Oppgåver	72

Litteratur	77
4 Modelltilpassing	79
4.1 Innleiing	79
4.2 Minste kvadrats metode	80
4.2.1 Lineær samanheng	80
4.2.2 Kvadratisk samanheng	83
4.2.3 Eksponentiell samanheng	83
4.3 Oppgåver	84
5 Dimensjonsanalyse	87
5.1 Innleiing	87
5.2 Eining og dimensjon	87
5.2.1 Viktige prinsipp i samband med dimensjon:	88
5.3 Innleiande eksempel	89
5.4 Dimensjonslause produkt og Buckingham's teorem	93
5.5 Oppgåver	98

Kapittel 1

Modellbygging

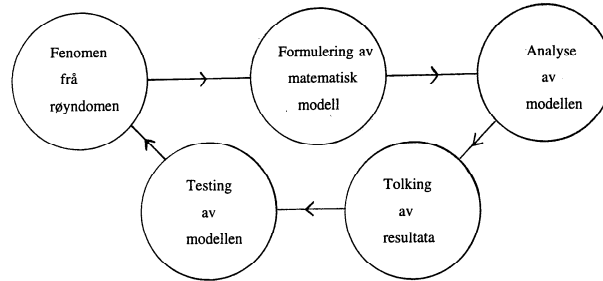
1.1 Innleiing

Med ein matematisk modell meiner vi gjerne ein matematisk tankebygning (liten eller større) som blir nytta til å analysa eit problem i eit anna fag. Vi tek altså i bruk matematisk kunnskap og tenkjemåte for å løysa problem i ulike fag som til dømes fysikk, økonomi eller økologi.

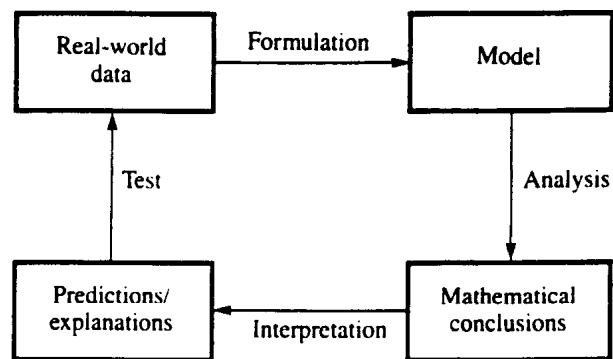
Ein slik bruk av matematikken er ikkje ny, men tvert imot like gammal som matematikkfaget sjølv (jamfør landmåling/geometri, astronomi/trigonometri o.l.). I mange tilfelle kan vi sjå at nettopp behovet for slik modellbygging gav støytet til framveksten av nye matematiske teoriar. Eit godt døme er utviklinga av naturvitskaplege fag som mekanikk, fysikk og astronomi. Frå midten av 1600-talet og fram til vår tid har matematiske modellar vore sjølve grunnlaget og drivkrafta i utviklinga av desse faga, og sjølv har matematikken fått rike impulsar gjennom ei nær sagt endelaus rekkje av fruktbare omgrep og problemstillingar. Lenge var det også slik at nesten alle matematikarar arbeidde innan ei eller fleire greiner av naturvitskapen. I vår tid er matematiske modellar tekne i bruk i ei rekkje nye område, som økonomi, samfunnsfag, økologi, o.a.

1.2 Modelleringsprosessen

Når vi skal konstruera ein matematisk modell t.d. i mekanikk eller fysikk, går vi gjennom visse steg eller stadium. Vi startar med det fenomen eller problem vi vil studera eller analysa, la oss kalla det den fysiske røyndomen. Ut frå denne røyndomen (real world problem) konstruerer vi ein forenkla og ofte idealisert modell der vi fjernar alle komponentar som synest å vera meir eller mindre uvesentlege for fenomenet. Vidare anvender vi grunnleggjande fysiske lover, t.d. Newtons lover. Vi får dermed formulert ein matematisk modell for fenomenet, gjerne uttrykt ved eit sett differensiallikningar med visse tilleggskrav som start- eller randkrav. Tredje steg er å gjennomføra



Figur 1.1: Prosessen i samband med matematisk modellbygging.



Figur 1.2: Flytdiagram i samband med matematisk modellbygging.

ein matematisk analyse av modellen, dvs. finna ei matematisk løysing av det problemet vi har formulert. Vi må så tolka denne matematiske løysinga fysisk, dvs. finna kva fysiske resultat løysinga gir. Siste steg blir då å testa modellen. Vi må då jamføra dei resultat som modellen gir med dei resultat ein får ved å gå direkte til røyndomen, gjennom observasjon og eksperiment. Er modellen god, er det godt samsvar. I motsett fall må vi prøva å byggja ein betre modell.

Modelleringsprosessen kan framstillast på ulike måtar. I Figur 1.1 ser vi prosessen i samband med matematisk modellbygging noko forenkla framstilt ved eit enkelt prinsippskjema eller flytdiagram. I Figur 1.2 ser vi eit flytdiagram henta frå boka Giordano, Weir and Fox [1].

1.3 Appendiks: Andre ordens lineære og homogene differensiallikningar med konstante koeffisientar

I studiet av matematiske modellar spelar differensiallikningar ei dominerande rolle. Særleg er likningar av 2. orden og første ordens system av to likningar viktige. I kapittelet med modellar frå klassisk mekanikk, gjer vi mellom anna bruk av 2. ordens lineære og homogene likningar med konstante koeffisientar. Sidan ikkje alle studentane har emnet *MA-203 Differensiallikningar*, gir vi her ei kort innføring i emnet.

Ei 2. ordens lineær og homogen differensiallikning med konstante koeffisientar kan skrivast på forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0 \quad (1.1)$$

der a, b og c er reelle konstantar, $a \neq 0$. Dividerer vi med a , får likninga forma

$$y'' + Ay' + By = 0. \quad (1.2)$$

Ei tilsvarande første ordens likning på forma $y' + ay = 0$, har løysinga $y = ce^{-at}$, der c er ein vilkårleg integrasjonskonstant. Vi prøver derfor om funksjonen $u = e^{rt}$ er ei løysing for visse verdier av konstanten (parameteren) r . Innsett u i likninga (1.2) gir

$$r^2 e^{rt} + A r e^{rt} + B e^{rt} = e^{rt} [r^2 + Ar + B] = 0, \quad \text{for alle } t. \quad (1.3)$$

Frå (1.3) konkluderer vi at $u = e^{rt}$ er løysing av likning (1.2) dersom og berre dersom r er rot i den *karakteristiske likninga*

$$r^2 + Ar + B = 0. \quad (1.4)$$

La r_1 og r_2 vera løysingar av den karakteristiske likninga (1.4), dvs.

$$r_1 = -\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B}, \quad r_2 = -\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B} \quad (1.5)$$

Dette gir tre ulike tilfelle

1. $A^2 > 4B$. To ulike reelle røter, $r_1 \neq r_2$.
2. $A^2 = 4B$. Ei reell dobbelrot, $r_1 = r_2$.
3. $A^2 < 4B$. To komplekskonjugerte røter.

Tilfelle 1: $A^2 > 4B$. **To ulike reelle røter, $r_1 \neq r_2$.**

Metoden gir to ulike løysingar, $y_1 = e^{r_1 t}$ og $y_2 = e^{r_2 t}$. Desse er lineært uavhengige, dvs. dei genererer alle løysingar av likninga. Den generelle løysinga er

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad \text{for alle } t. \quad (1.6)$$

Tilfelle 2: $A^2 = 4B$. **Reell dobbelrot,** $r_1 = r_2 = -\frac{A}{2}$.

Metoden gir berre *ei* løysing, $y_1 = e^{r_1 t}$. Vi oppnår ei anna, lineært uavhengig løysing ved å nytta metoden med *reduksjon av orden*. Vi innfører ny avhengig variabel, $v(t)$ og set $y = v(t)e^{r_1 t}$, slik at $y' = (r_1 v + v')e^{r_1 t}$ og $y'' = (r_1^2 v + 2r_1 v' + v'')e^{r_1 t}$. Innsett i likning (1.2) gir dette:

$$y'' + Ay' + By'' = e^{r_1 t} [(r_1^2 + Ar_1 + B)v + (2r_1 + A)v' + v''] = 0. \quad (1.7)$$

Dette gir likninga $v'' = 0$, som har ei løysing $v = t$. Dermed har vi funne ei lineært uavhengig løysing

$$y_2 = te^{r_1 t}. \quad (1.8)$$

Den generelle løysinga er:

$$y = \underline{c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}} = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{A}{2} t} \quad \text{for alle } t. \quad (1.9)$$

Tilfelle 3: $A^2 < 4B$. **Komplekskonjugerte røter.**

I dette tilfellet har den karakteristiske likninga (1.4) løysingane

$$r = -\frac{A}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - 4B} = -\frac{A}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{4B - A^2}, \quad (1.10)$$

som gir

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

der

$$\alpha = \operatorname{Re}(r_1) = -\frac{A}{2}, \quad \beta = \operatorname{Im}(r_1) = \frac{1}{2} \sqrt{4B - A^2}. \quad (1.11)$$

Som i Tilfelle 1 vil funksjonane $y_1 = e^{r_1 t}$ og $y_2 = e^{r_2 t}$ vera lineært uavhengige løysingar, men vi vil presentera løysingane på reell form. For dette formålet nyttar vi *Eulers formel*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \text{der } x \text{ er ein reell variabel.} \quad (1.12)$$

Den generelle løysinga er

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} \{c_1 e^{i\beta t} + c_2 e^{-i\beta t}\} \\ &= e^{\alpha t} \{c_1(\cos \beta t + i \sin \beta t) + c_2(\cos \beta t - i \sin \beta t)\} \\ &= \underline{e^{\alpha t}(c_1^* \cos \beta t + c_2^* \sin \beta t)} \quad \text{for alle } t, \end{aligned} \quad (1.13)$$

der $c_1^* = c_1 + c_2$ og $c_2^* = i(c_1 - c_2)$.

Eksempel 1

Vi skal løysa likninga $y'' + y' + y = 0$. Karakteristisk likning er $r^2 + r + 1 = 0$. Denne har løysingane

$$r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{dvs. } \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Løysinga blir:

$$y = e^{-(1/2)t} \left\{ c_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right) \right\}. \quad (1.14)$$

Eksempel 2

Vi skal løysa likninga $y'' + 4y' + 4y = 0$. Karakteristisk likning er $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$. Denne har løysing $r_1 = r_2 = -2$. Løysinga blir

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}. \quad (1.15)$$

Eksempel 3

Vi skal løysa likninga $y'' + y' - 2y = 0$. Karakteristisk likning er $r^2 + r - 2 = (r + 2)(r - 1) = 0$. Denne har løysing $r_1 = -2, r_2 = 1$. Løysinga blir

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t. \quad (1.16)$$

Eksempel 4

Vi skal løysa likninga $y'' + \omega^2 y = 0$ der ω er ein positiv reell konstant. Karakteristisk likning er no $r^2 + \omega^2 = 0$. Denne har løysing $r_1 = i\omega, r_2 = -i\omega$, dvs. $\alpha = \text{Re}(r_1) = 0$. Løysinga blir

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (1.17)$$

Merknad: Løysinga (1.17) kan skrivast

$$y = a_0 \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{der } a_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \phi_0 = -\arctan(c_2/c_1). \quad (1.18)$$

Prov:

$$\begin{aligned} a_0 \cos(\omega t + \phi_0) &= a_0 \cos \omega t \cos \phi_0 - a_0 \sin \omega t \sin \phi_0 \\ &= (a_0 \cos \phi_0) \cos \omega t + (-a_0 \sin \phi_0) \sin \omega t, \end{aligned}$$

dvs.

$$c_1 = a_0 \cos \phi_0, \quad c_2 = -a_0 \sin \phi_0.$$

Forma (1.18) er ofte meir tenleg i samband med matematiske modellar i mekanikk, jamfør til dømes modellen for den matematiske pendelen, Seksjon 2.2.

1.4 Oppgåver

Oppgåve 1

Ein bonde skal gjerda inn eit rektangulært jordstykke som ligg inntil ei elv. Bonden nyttar elvebreidda som gjerde i den eine sida i rektangelet.

Finndet maksimale areal eit slikt jordstykke kan ha når bonden har 100 m med gjerde. Finndet også lengda og breidda på jordstykket når arealet er maksimalt.

Oppgåve 2 (Eksamen KVANT 1, ADH, desember 1977)

Ei bedrift produserer opne kartongar med kvadratisk botnflate. Materialkostnader per flateining er tre gonger større for botnflata enn for sideflatene. Kostnadsfunksjonen (for materialet til ein kartong) er då gitt ved

$$K(x, y) = p(3x^2 + 4xy)$$

der x er sida, y er høgda og konstanten p er materialpris per flateining for sideflatene.

(a) Vis at

$$K(tx, ty) = t^2K(x, y)$$

og prøv å gi ei tolking av resultatet. Vis også at

$$x \frac{\partial K}{\partial x} + y \frac{\partial K}{\partial y} = 2K(x, y).$$

(b) Bestem dimensjonane (side og høgde) på ein kartong med gitt volum $x^2y = V_0$ slik at kostnadsfunksjonen $K(x, y)$ får minimum.

Oppgåve 3

Eit tau med lengde L blir kuttet i to deler X og Y med lengder x og y . Del X blir forma som ein sirkel og del Y som eit kvadrat. Bestem $x \geq 0$ og $y \geq 0$, der $x + y = L$, slik at det samla arealet A som er avgrensa av taudelene X og Y får

(a) minimum og finn A_{\min} ,

(b) maksimum og finn A_{\max} .

Merknad: $x = L, y = 0$ svarar til at heile tauet blir forma som ein sirkel, og $x = 0, y = L$ svarar til at heile tauet blir forma som eit kvadrat.

Oppgåve 4

Ein kvernstein på 40 kg blir knust i fire deler. Vekta av desse delene er slik at vi v.h.j.a. ei skålvekt kan vega alle heiltalsvekter frå 1 til 40 kg, dvs. 1, 2, 3, ..., 40 kg. Finndet ut kor mykje kvar del må vega.

Oppgåve 5 (Eksamen KVANT 101, ADH, desember 1988)

I ei bedrift er fortene ta gitt ved

$$\pi(x) = -10x^2 + 800x - 12000, \quad 0 \leq x \leq 80,$$

der x er talet på produserte einingar.

- Avgjer n r bedrifta er i balanse, $\pi(x) = 0$, og n r bedrifta går med overskot.
- Finn det produksjonsnivå som gir størst fortene te. Avgjer også når fortene te pr. eining $\pi(x)/x$ er maksimal.

Oppgåve 6 (Eksamen KVANT 1, ADH, desember 1979)

I ei bedrift er fortene ta gitt som funksjon av produksjonskvantumet x ($x > 0$) ved formelen

$$F(x) = 25x - \frac{x^2}{100} - 10000 \quad (\text{kr}).$$

- Avgjer n r bedrifta går med overskot, dvs. når $F(x) > 0$.
- Finn det produksjonskvantum som gir størst fortene te. Kor stor er den maksimale fortene ta?
- Finn også det produksjonskvantum som gir maksimal fortene te per eining. (Fortene te pr. eining er gitt ved $F(x)/x$).

Oppgåve 7 (Eksamen KVANT 1, ADH, desember 1985)

Kostnadene ved   produsere x enheter av en vare er gitt ved

$$k(x) = x^3 - 65x^2 + 3685x + 57000.$$

Pris per enhet er gitt ved

$$p(x) = x^2 - 80x + 5575$$

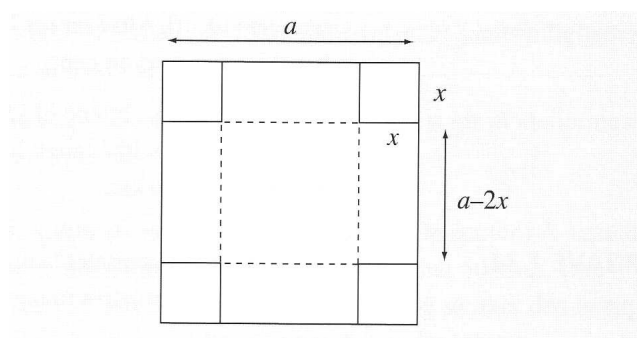
- Finn et uttrykk for profitten ved salg av x enheter. (Vink: Profitten er gitt ved $\pi(x) = xp(x) - k(x)$.)
- Hvor mange vare-enheter må produseres og selges for at inntekten akkurat skal dekke kostnadene?
- Hvilke verdier av x gir overskudd?
- Finn x -verdien som gir maksimal profitt.

Oppgåve 8

Ein fabrikk produserer jordb erkorger av kvadratiske papplater med side a . I kvart hjørne blir det klipt bort ei kvadratisk rute med side x . Sidekantane blir så bretta opp langs dei stipla linjene (sj  figur). Forklar at volumet til ei slik korg er

$$V = (a - 2x)^2 x.$$

Bestem x slik at volumet blir størst mogeleg. Finn det maksimale volumet.



Litteratur

- [1] F. R. Giordano, M. D. Weir and W. P. Fox: *A First Course in Mathematical Modeling*, 2nd. Ed. Brooks/Cole Pub. Company, Pacific Grove 1997.

Kapittel 2

Matematiske modellar frå klassisk mekanikk

2.1 Innleiing

Mekanikk er ein av dei første vitskapane som vart utvikla og har hatt ein sterk innverknad på andre vitskapar. Faget er ein basisvitskap som dannar grunnlag for alle greiner av fysikk, astrofysikk, geofysiske fag og dels kjemi og biologiske fag. I mekanikk møter vi alle grunnleggjande omgrep som tid, rom, masse, kraft, energi, partikkel, bølge, osv. Faget har òg vore ei viktig inspirasjonskjelde til utvikling av nye idear og teoriar innan ulike greiner av matematikken, særleg analyse og differensiallikningar.

I dette kapittelet vil vi illustrera matematisk modellbygging ved å analysera følgjande fem modellar frå klassisk mekanikk:

- (i) Pendelen
- (ii) Fall i konstant tyngdefelt med luftmotstand
- (iii) Fall i variabelt tyngdefelt
- (iv) Dempa harmoniske svingingar
- (v) Keplers lover

Desse modellane er såpass enkle at dei kan forståast utan større kunnskapar i fysikk. Samtidig er dei interessante og spelar framleis ei rolle i dagens fysikk. I denne analysen vil vi dels følgja det prinsippskjemaet vi har formulert i kapittel 1.

2.2 Pendelen

Vi vil nytta ein analyse av pendelrørsla som eit skuleeksempel på matematisk modellbygging.

Fenomenet / problemet:

Pendelen er samansett av ei tynn, lett snor med lengde l og ei lita blykule med masse m , sjå figur 2.1. Tyngdeakselerasjonen er g . Målet er å studera svingingane, dvs. finna samanhengen mellom svingetida T og visse parametarar som l , m , g , osv. Ved små utslag har vi gjort visse observasjonar:

- svingetida (perioden) aukar med pendellengda l
- svingetida synest å vera uavhengig av massen m
- svingetida synest å vera uavhengig av amplituden a_0 (amplitude = maksimalutslag)

Formulering av matematisk modell:

Vi vil no konstruera ein matematisk modell med følgjande føremål:

1. Finna eit eksakt uttrykk for samanhengen mellom T og l , m , a_0 og g .
2. Gi ei dynamisk forklaring på denne samanhengen.

Dei ytre kreftene som verkar på pendelen er:

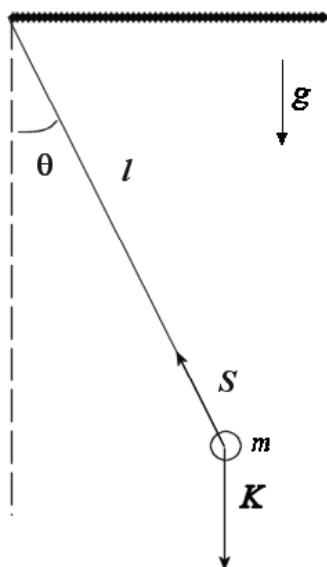
- tyngdekrafta
- friksjonskrefter som luftmotstand og friksjon i opphengingspunktet
- Corioliskrafta (pga. jordrotasjonen)

Neste steg er å forenkla, dvs. laga ein idealisert modell for pendelen der ein fjernar alle komponentar som er uvesentlege for problemet. Vi neglisjerer:

- massen til pendelsnora (antar at pendelsnora er vektlaus og uelastisk)
- dimensjonane til pendelkula (antar at pendelkula er eit materielt punkt med masse m)
- Corioliskrafta
- friksjonskreftene
- høgdevariasjon i tyngdefeltet (antar homogent tyngdefelt)

Merknader:

- (i) Tyngdefeltet er i røynda kulesymmetrisk om jordsenteret. Men å anta at feltet er homogent, er ei uhyre god tilnærming i vårt problem. Elles måtte pendelen ha kolossale dimensjonar.



Figur 2.1: Pendelen.

- (ii) Corioliskrafta er ei treghetskraft som skuldast jordrotasjonen, og som verkar inn på svingeplanet til pendelen (påvist eksperimentelt av Foucault i Paris i 1851). Ved polane vil svingeplanet bli dreia 360° i eit døger, medan dreinga vil avta og gå mot null når vi nærmar oss ekvator. I vårt problem kan vi trygt neglisjera denne krafta.

Vi nyttar så den dynamiske grunnlikninga (Newtons 2. lov):

Kraft = masse \times akselerasjon:

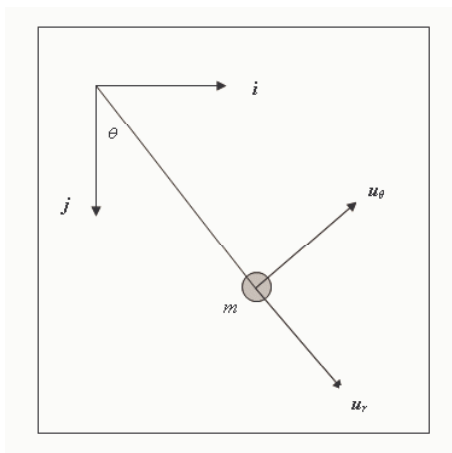
$$\mathbf{K} = m\mathbf{a}$$

I vårt problem er rørsla plan (todimensjonal) og det er tenleg å innføra polarkoordinatar (r, θ) definert ved

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Vi legg inn eit nytt koordinatsystem med sentrum i opphengingspunktet og med ein einingsvektor \mathbf{u}_r radielt utover. \mathbf{u}_θ står ortogonalt på \mathbf{u}_r slik at det vert danna eit høgrehandssystem. Då får vi, når positiv vertikal retning er rekna nedover, at

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$



Figur 2.2: Det gamle og det nye koordinatsystemet.

Akselerasjonen er definert ved

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

der \mathbf{r} er posisjonen og \mathbf{v} er farten som tidsavhengige vektorar. I vårt tilfelle er posisjonen til ei kvar tid gitt ved $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$, der r er konstant. Men la oss visa uttrykket også når r kan variera med tida.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_r) \\ &= \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d}{dt}(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j})\frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

Frå utleiinga av \mathbf{v} såg vi at $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_r) = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta$. Tilsvarande ser vi at $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_\theta) = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_r$. Vi bruker no desse observasjonane:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r \right) + \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) \\
&= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_r) + \left\{ \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) \right\} \\
&= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + \left\{ \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_\theta) \right\} \\
&= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \left(-\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r \right) \\
&= \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} \mathbf{u}_r + \left\{ r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right\} \mathbf{u}_\theta.
\end{aligned}$$

Pendelkula er påverka av to krefter, snorkrafta S og tyngdekrafta $K = mg$. Vi dekomponerer K i to innbyrdes ortogonale komponentar (sjå figur 2.1):

$$\begin{aligned}
K_r &= mg \cos \theta && \text{(i snorretninga)} \\
K_\theta &= -mg \sin \theta && \text{(loddrett snorretninga)} \\
r &= l = \text{konst}
\end{aligned}$$

Newtons 2. lov gir:

$$K_r - S = ma_r \quad \text{dvs.} \quad mg \cos \theta - S = -ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (2.1)$$

$$K_\theta = ma_\theta \quad \text{dvs.} \quad -mg \sin \theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.2)$$

Likning (2.2) gir oss tilstrekkeleg informasjon til å finna svingetida T . Modell-likninga er:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.3)$$

Analyse av modellen. Matematisk løysing

Likning (2.3) er ei ikkje-lineær differensiallikning av 2. orden. Løysingane er elliptiske funksjonar som ikkje let seg uttrykkja ved elementære funksjonar. Fordi vi vil avgrensa oss til å studera svingingar med små utslag, kan vi tillata oss å linearisera modell-likninga, i det vi set

$$\sin \theta = \theta \quad \text{(tilnærma riktig ved små utslag)}$$

Merknad:

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \dots$$

Er vinkelen 6° , vert $\theta = 0.1047$ og $\sin \theta = 0.1045$. Er vinkelen 10° , vert $\theta = 0.1745$ og $\sin \theta = 0.1736$. Altså, mindre enn 0.6% feil ved 10° .

Ved linearisering får vi dermed følgjande modell-likning, gjeldande for små utslag,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad (2.4)$$

eller

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \quad \text{der } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (2.5)$$

som er ei lineær 2.ordens differensiallikning med konstante koeffisientar. Likninga gir udempa harmoniske svingingar (sinus-cosinus løysingar). Ei vilkårleg løysing kan skrivast på forma

$$\theta = a_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad (2.6)$$

der amplituden a_0 og fasevinkelen ϕ_0 er integrasjonskonstantar som blir bestemt ut frå startvilkåra.

Tolking av resultatata

For alle startvilkår gir løysinga (2.6) *periodiske svingingar* med svingefrekvens $\omega = \sqrt{g/l}$. Svingetida T er definert som den tid som trengst for *ei* svinging, og må derfor oppfylle:

$$\cos[\omega(t + T)] = \cos(\omega t + \omega T) = \cos \omega t \quad \text{for alle } t. \quad (2.7)$$

Dette krev at $\omega T = 2\pi$, som gir svingetida

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.8)$$

Ved små utslag får vi dermed følgjande konklusjonar:

- T er proporsjonal med \sqrt{l}
- T er uavhengig av pendelmassen m
- T er uavhengig av amplituden a_0
- T er omvendt proporsjonal med \sqrt{g}

Vidare ser vi at desse konklusjonane er konsekvensar av Newtons 2. lov.

Merknader:

- (i) Ei rekkje ulike problem innan mekanikk og fysikk fører til likningar av typen (2.4). Difor er den lineariserte modellen for pendelen ein særskilt viktig matematisk modell.
- (ii) Metoden med å linearisera likningane er mykje nytta i anvendt matematikk. Dette fordi dei opphavelige likningane kan vera for kompliserte. Ved linearisering må vi vera merksame på at bruksområdet for modellen vert mindre omfattande. Dette er prisen ein må betala for å få ein enklare modell.

2.3 Fall i konstant tyngdefelt med luftmotstand

Fenomenet/problemet

Ein lekam med masse m fell i konstant tyngdefelt med luftmotstand. Vi ynskjer å analysera denne fallrørsla.

Formulering av matematisk modell

I tillegg til konstant tyngdefelt antar vi at luftmotstanden er proporsjonal med farten v og motsett retta. Det verkar dermed to krefter på lekamen: Tyngdekrafta, $K_1 = mg$ og friksjonskrafta $K_2 = -kv$, der g er tyngdeakselerasjonen, v er farten og k er ein proporsjonalitetskonstant. Vidare er vertikalretninga (x -retninga) rekna positiv nedover.

Målet er å finna farten v som funksjon av tida t , gitt at $v = 0$ ved $t = 0$. I følgje Newtons 2. lov er rørslelikninga gitt ved:

$$K_1 + K_2 = mg - kv = m \frac{dv}{dt} \quad (2.9)$$

mens startkravet er

$$v(0) = 0 \quad (2.10)$$

Likninga (2.9) med startkravet (2.10) utgjer den matematiske modellen.

Analyse av modellen. Matematisk løysing

Likning (2.9) er ei 1.ordens separerbar differensiallikning og kan skrivast på forma:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v = -\frac{k}{m} \left(v - \frac{mg}{k} \right)$$

som gir

$$\frac{dv}{v - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m} dt.$$

Integrasjon gir likninga:

$$\ln \left| v - \frac{mg}{k} \right| = -\frac{k}{m} t + \ln |c|, \quad c = \text{konstant}$$

$$\ln \left| \frac{v - \frac{mg}{k}}{c} \right| = -\frac{k}{m} t$$

$$v - \frac{mg}{k} = \pm ce^{-\frac{k}{m} t}$$

Dermed er:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{k}{m} t} \quad (\text{kan sløyfa } \pm)$$

Ved å nytta startkravet (2.10) kan vi bestemma konstanten c :

$$v(0) = \frac{mg}{k} + c = 0$$

som gir

$$c = -\frac{mg}{k}.$$

Løysinga av problemet er dermed gitt ved uttrykket

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right). \quad (2.11)$$

Tolking av resultatet

Vi har funne farten v som funksjon av tida t . Det følgjer frå likning (2.11) at farten også er avhengig av dei tre grunnleggjande parametrane i problemet, m , g og k .

Frå likning (2.11) ser vi at v går mot ein konstant *grensefart* v_0 når $t \rightarrow \infty$:

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{mg}{k} \quad (2.12)$$

Når $v \rightarrow v_0$, må akselerasjonen og dermed krafta K gå mot null:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K = \lim_{t \rightarrow \infty} (mg - kv) = mg - kv_0 = 0 \quad (2.13)$$

Likning (2.13) gir oss grensefarten direkte, utan å gå vegen om utleiinga av likning (2.11).

Testing av modellen

Ei skikkelig testing av modellen kan berre gjennomførast ved eksperiment, dvs. ved å samanlikna dei resultata modellen gir med det vi kan observera. Men ein kan få visse indikasjonar på om modellen gir rimelege resultat ved ein meir teoretisk analyse. Ein kan undersøkje korleis visse resultat eller storleikar er avhengige av dei grunnleggjande parametrane i problemet. I dette problemet følgjer det frå likning (2.12) at:

$$\begin{aligned} v_0 \rightarrow \infty & \text{ når } k \rightarrow 0^+, & v_0 \rightarrow 0 & \text{ når } k \rightarrow \infty \\ v_0 \rightarrow 0 & \text{ når } m \rightarrow 0^+, & v_0 \rightarrow \infty & \text{ når } m \rightarrow \infty \\ v_0 \rightarrow 0 & \text{ når } g \rightarrow 0^+, & v_0 \rightarrow \infty & \text{ når } g \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Desse resultata verkar logiske, og vi har så langt ikkje avslørt urimelege sider eller inkonsekvensar ved modellen.

2.4 Fall i variabelt tyngdefelt

Fenomenet/problemet

Ein lekam (prosjektil) med masse m blir skoten loddrett opp frå jordoverflata. Vi vil analysere denne fallrørsla: Vil mellom anna finna kor stor utskytingsfarten må vera for at prosjektilet skal overvinna jorda sitt gravitasjonsfelt og forsvinna ut i verdsrommet.

Formulering av matematisk modell

Luftmotstanden er viktig nær jordoverflata, men spelar liten rolle lenger oppe i atmosfæren. Vi tillet oss difor å neglisjere luftmotstanden slik at jordas tyngdefelt utgjer einaste ytre kraft.

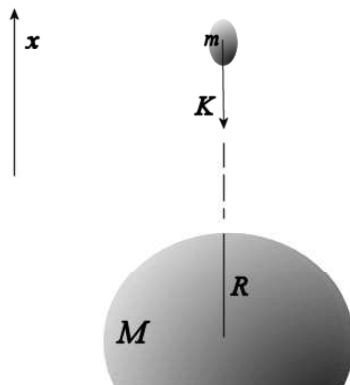
Målet er å finna:

- (i) Den maksimale høgda ξ som prosjektilet oppnår, gitt at utskytingsfarten er v_0 .
- (ii) Rømingfarten (escape velocity) v_e , som er den minste utskytingsfart v_0 slik at prosjektilet forsvinn ut i verdsrommet.

I følge Newtons gravitasjonslov er krafta K mellom prosjektilet og jorda gitt ved

$$K = -G \frac{Mm}{(R+x)^2} \quad (2.14)$$

der G er den generelle gravitasjonskonstanten, M er massen til jorda, R er jordradius og x er avstanden frå jordoverflata til prosjektilet, sjå figur 2.3.



Figur 2.3: Fall i variabelt tyngdefelt.

Innfører vi tyngdeakselerasjonen g ved

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (2.15)$$

kan likning (2.14) skrivast

$$K = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} = -\frac{mg}{(1+\frac{x}{R})^2} \quad (2.16)$$

der $K \rightarrow -mg$ når $R \rightarrow \infty$.

Newtons 2. lov gir den dynamiske grunnlikninga:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2} \quad t \text{ er tidskoordinaten} \quad (2.17)$$

mens startkrava kan formulerast

$$x = 0 \quad \text{ved} \quad t = 0 \quad (2.18)$$

og

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{ved} \quad t = 0 \quad (2.19)$$

Differensiallikninga (2.17) med startkrava (2.18) og (2.19) utgjør den matematiske modellen.

Analyse av modellen. Matematisk løysing.

Likning (2.17) er ei ikkje-lineær differensiallikning av 2. orden. For å løysa likninga innfører vi x som ny uavhengig variabel og nyttar kjerneregelen. Dette gir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (2.20)$$

som innsett i (2.17) gir denne likninga

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} \quad (2.21)$$

som er av 1. orden i v . Integrasjon gir

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{gR^2}{(R+x)} + c \quad (2.22)$$

Startkravet blir no: $v = v_0$ ved $x = 0$, som gir

$$c = \frac{1}{2}v_0^2 - gR \quad (2.23)$$

dvs.

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{(R+x)}} \quad (2.24)$$

der farten v er gitt som funksjon av x . Vi når maksimal høgd ξ når $v = 0$; dvs.

$$v_0^2 = 2gR - \frac{2gR^2}{R+\xi} \quad (2.25)$$

Maksimal høgd er:

$$\xi = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2} - R = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2} \quad (2.26)$$

Rømingfarten v_e svarar til $\xi \rightarrow \infty$, dvs. $v_0 \rightarrow v_e$ når $\xi \rightarrow \infty$ i likning (2.25). Dette gir rømingfarten

$$v_e = \lim_{\xi \rightarrow \infty} v_0 = \sqrt{2gR} \quad (2.27)$$

Resultata i ein slik modell er enkle å tolka. Her er maksimal høgd ξ og rømingfart v_e enkle funksjonar av parametrane i problemet, v_0 , R og g .

Når det gjeld ei grundig testing av modellen, må vi igjen ty til eksperiment og observasjonar. Følgjande parameteranalyse gir meningsfylte resultat:

$$\begin{array}{llll} \xi \rightarrow \frac{v_0^2}{2g} & \text{når} & R \rightarrow \infty & \text{i likning 2.26} \\ \xi \rightarrow 0 & \text{når} & g \rightarrow \infty & \text{i likning 2.26} \\ v_e \rightarrow \infty & \text{når} & R \rightarrow \infty & \text{i likning 2.27} \\ v_e \rightarrow \infty & \text{når} & g \rightarrow \infty & \text{i likning 2.27} \end{array}$$

2.5 Dempa harmoniske svingingar

I samband med pendelen neglisjerte vi ulike former for friksjon som luftmotstand og friksjon i opphengingspunktet. Dette førte til udempa harmoniske svingingar. Vi vil no studera eit mekanisk system der ein tek med friksjon. Systemet er representert ved ei *elastisk fjør*, men kunne like godt ha vore ein dempa pendel.

Vi antar at følgjande lover gjeld for fjørkrafta K_s og friksjonsskrafta K_f :

(i) *Hookes lov*:

K_s er proporsjonal med utslaget x , og motsatt retta, dvs.

$$K_s = -kx \quad (2.28)$$

der $k > 0$ er fjørkonstanten. Hookes lov er korrekt ved små utslag.

(ii) *Friksjonskrafta*:

K_f er proporsjonal med farten v , og retta mot rørsla, dvs.

$$K_f = -cv \quad (2.29)$$

der $c \geq 0$ er dempingsfaktoren og $v = \frac{dx}{dt}$.

Her er:

$$K_s < 0 \quad \text{når} \quad x > 0 \quad \text{og} \quad K_s > 0 \quad \text{når} \quad x < 0$$

og

$$K_f < 0 \quad \text{når} \quad \frac{dx}{dt} > 0, \quad \text{dvs. når } x \text{ aukar.}$$

$$K_f > 0 \quad \text{når} \quad \frac{dx}{dt} < 0, \quad \text{dvs. når } x \text{ minkar.}$$

La s vera utslaget i likevekt, dvs. når fjøra heng i ro med masse m , sjå figur 2.4. Tyngdekrafta er $K_1 = mg$. Fjørkrafta (i likevekt) er $K_2 = -ks$, der g er tyngdeakselerasjonen.

Likevekt krev:

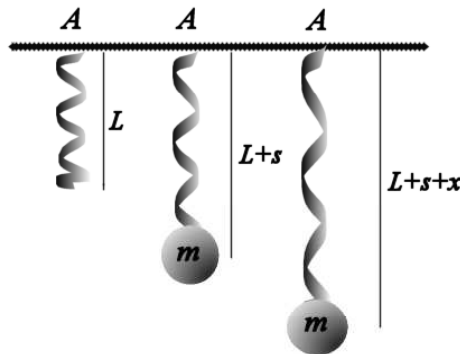
$$K_1 + K_2 = mg - ks = 0 \quad (2.30)$$

Dermed er utslaget s i likevekt gitt ved

$$s = \frac{mg}{k} \quad (2.31)$$

Vi ser at s er proporsjonal med m og g , og omvendt proporsjonal med k . Den dynamiske grunnlikninga er gitt ved Newtons 2. lov:

$$ma = K_1 + K_2 + K_s + K_f,$$



Figur 2.4: Ei elastisk fjør med naturleg lengd L er hengt opp i eit fast punkt A . Eit lodd med masse m er festa til fjøra slik at fjøra får lengda $L + s$. Utslaget frå likevektstillinga er x (positivt rekna nedover).

dvs.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - ks - kx - c \frac{dx}{dt} = -kx - c \frac{dx}{dt},$$

der vi har nytta likevektsvilkåret (2.30). Dette gir rørslelikninga

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (2.32)$$

der

$$2b = \frac{c}{m} \quad \text{og} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.33)$$

Svingerørsla er dermed styrt av ei homogen, 2. ordens differensiallikning med konstante koeffisientar. Vi ser at likninga (2.32) er uavhengig av g , korleis skal vi tolka det?

Vi får ulike typar rørsle alt ettersom:

- (a) $b > \omega$ Overkritisk demping
- (b) $b = \omega$ Kritisk demping
- (c) $0 < b < \omega$ Dempa svingingar (underkritisk demping)
- (d) $b = 0$ Udempa svingingar (inga demping)

Vi løyser no likning (2.32): Den karakteristiske likninga og løysingane av denne er

$$r^2 + 2br + \omega^2 = 0, \quad r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}, \quad r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}.$$

Vi tek så for oss kvart av dei fire tilfella over:

(a) *Overkritisk demping*, $b > \omega$:

r_1 og r_2 er reelle og negative: Inga svingerørsle. Løysinga er:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (2.34)$$

Vi ser at $x(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$ (sjå figur 2.5) Konstantane c_1 og c_2 blir eintydig bestemte ut frå startkrava:

$$x(0) = x_0 \quad \text{utslag ved } t = 0$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0 \quad \text{fart ved } t = 0$$

(b) *Kritisk demping*, $b = \omega$:

$r_1 = r_2 = -b < 0$ reell: Inga svingerørsle. Løysinga er

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-bt} \quad (2.35)$$

Vi ser at $x(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$ (sjå figur 2.5)

(c) *Underkritisk demping*, $0 < b < \omega$:

$$r = -b \pm \sqrt{(-1)(\omega^2 - b^2)} = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}.$$

Løysinga er:

$$x(t) = e^{-bt} \left\{ c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - b^2} t + c_2 \sin \sqrt{\omega^2 - b^2} t \right\} \quad (2.36)$$

som gir dempa harmoniske svvingingar, $x(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$ (sjå figur 2.5)

(d) *Inga demping*, $b = 0$:

I dette tilfellet er $r = \pm i\omega$. Vi får *udempa* harmoniske svvingingar, gitt ved

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = C \cos(\omega t + \phi) \quad (2.37)$$

der C og ϕ er integrasjonskonstantar (sjå figur 2.6)

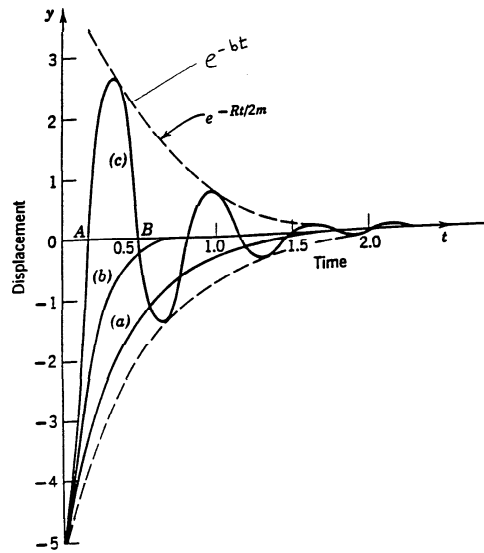
Ved *underkritisk demping*, $0 < b < \omega$, finn vi svingetida (perioden) T ved å løysa likninga

$$\cos \left[(\sqrt{\omega^2 - b^2})(t + T) \right] = \cos \left[(\sqrt{\omega^2 - b^2})t \right] \quad \text{for alle } t. \quad (2.38)$$

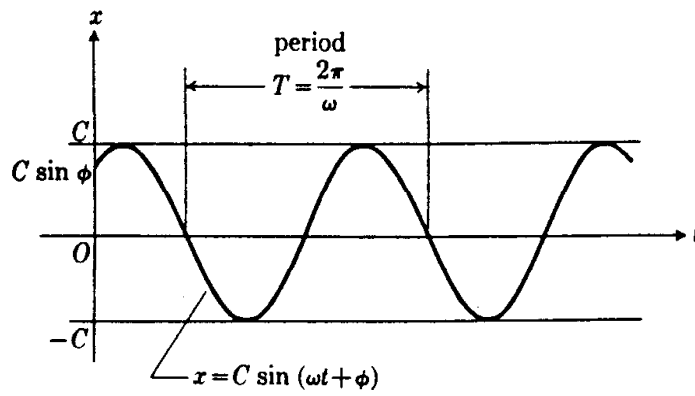
Dette krev at $(\sqrt{\omega^2 - b^2})T = 2\pi$, som gir svingetida

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}. \quad (2.39)$$

Ved *udempa* svvingingar, $b = 0$, er svingetida $T = 2\pi/\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$.



Figur 2.5: Posisjonen til loddet med masse m etter som tida går.
 (a) Overkritisk demping, (b) Kritisk demping, (c) Dempa svingingar



Figur 2.6: Svingerørsle utan demping

Merknad 1: Når $b = 0$, blir likning (2.32) redusert til

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (2.40)$$

som er identisk med pendellikninga, jamfør likning (2.4) i seksjon 2.2. På tilsvarende måte er også likning (2.32) i dette kapitlet ei modell-likning for såkalla dempa pendel. Vi ser såleis at ulike fenomen/problem kan la seg beskriva av ei og same modell-likning. Spesielt finn ein mange ulike problem som let seg beskriva meir eller mindre presist ved likning (2.40).

Merknad 2: Figur 2.6 er henta frå Thomas [1]. Figur 2.5 er henta frå Stephensen [2].

2.6 Keplers lover

I uminnelege tider har mennesket undra seg over stjernehimmelen og dei rørsler som planetane utfører mellom fiksstjernene på himmelkvelven. Ordet *planet* kjem av det greske ordet *planetes* som tyder "vandrar". Astronomi som fag har røter mange tusen år attende i historia. I det meste av denne tida har studiet av stjernehimmelen vore knytt til astrologiske og religiøse tradisjonar. Bak alle teoriar som utvikla seg om planetrørslene, låg det eit ynske om å kunna foråtseia sola, månen og planetene sine posisjonar i framtida. Målet var dels motivert ut frå astrologi, men også ut frå ynsket om å konstruera ein påliteleg kalender, ikkje minst med tanke på religiøse høgtider.

Sjølv om astronomar i det gamle Egypt og Babylonia stendig observerte rørslene til sol, måne og planetar, nytta dei ikkje geometriske modellar for å beskriva desse rørslene. Men etter kvart som gresk tenkjemåte gjorde seg gjeldande, var ein ikkje nøgd med observasjonar åleine, men ynskte innsikt og rasjonelle forklaringar. Ein formulerte geometriske modellar for planetrørslene og ein prøvde å tilpassa desse til observerte data. Dei første forsøka var ikkje særleg vellukka i det modellen passa dårleg med observerte data. Men fram mot det andre århundre e.Kr. vart det konstruert ein betre modell, som bygde på det såkalla *geosentriske verdsbilete*. Denne modellen er framstilt i det store astronomiverket *Almagest*, skrive av den gresk-egyptiske astronomen *Claudius Ptolemaios* frå Alexandria (d. ca. 151 e.Kr.). Ptolemaios hevda at jorda låg i sentrum av universet, mens måne, sol og planetar gjekk i bane rundt henne. Han prøvde å tolka og forklara rørslene på himmelkvelven, ikkje dei verkelege banane i rommet, så modellen var eit reint geometrisk hjelpemiddel til å bestemma planetane sine posisjoner i høve til fiksstjernene.

Den Ptolemaiske teorien vart ståande uendra fram til 1500-talet. I 1543 gav den polske munken *Nikolaus Kopernikus* (1473-1543) ut (på dødsleget) eit bokverk der han presenterte det heliosentriske systemet. Her valde han

å plassera sola i sentrum i staden for jorda. Dette var eit viktig framsteg, men tanken var ikkje ny, oldtidsastronomen *Aristark* frå Samos (ca. 310-230 f.Kr.) hadde lagt fram slike tankar, men vann ikkje fram med idéen sin.

Kopernikus sin teori samsvara godt med resultatata for planetbanar som var nesten sirkulære, men planeten Merkur var framleis eit problem. For *Johannes Kepler* (1571-1630) var teorien til Kopernikus difor utilfredsstillande. Han meinte det måtte finnast ein enkel geometrisk samanheng som kunne beskriva og forklara planetrørslene. Men for å finna ut av dette måtte han først finna ut kvifor Merkur ikkje oppførte seg i samsvar med den heliosentriske teorien til Kopernikus. Studiet av Merkurbanen vart påbyrja under leiing av den danske astronomen *Tycho Brahe* (1546-1601) omkring år 1600. Brahe hadde gjennom lengre tid gjort nøyaktige observasjonar og samla data om planeten Mars.

Då Brahe døyddde i 1601, fekk assistenten Kepler overta dette framifrå gode observasjonsmaterialet. I byrjinga nytta Kepler same tankegangen som Kopernikus, der alle rørslar var samansett av sirklar og episyklar, men dette førde ikkje fram til eit heilt tilfredsstillande resultat og han måtte innføre ellipsar. Etter mange års arbeid greidde Kepler å gje ei fullgod tolking og forklaring på dei nøyaktige observasjonane. Han summerte opp resultatata sine i tre empiriske lover, seinare kjende som *Keplers lover*. Dei to første lovene vart publiserte i verket *Astronomia Nova* i 1609, mens den tredje lova kom først i 1619 i verket *Harmonices Mundi*. Lovene kan formulerast slik:

1. *Banelova:*

Planetane går i ellipsebanar med sola i eine brennpunktet.

2. *Areallova:*

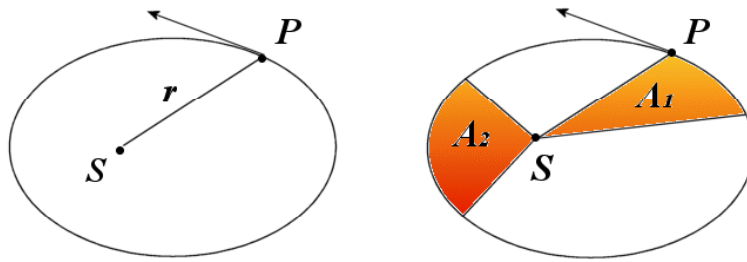
Radius vektor sveiper over like store areal i like store tidsrom.

3. *Harmonilova:*

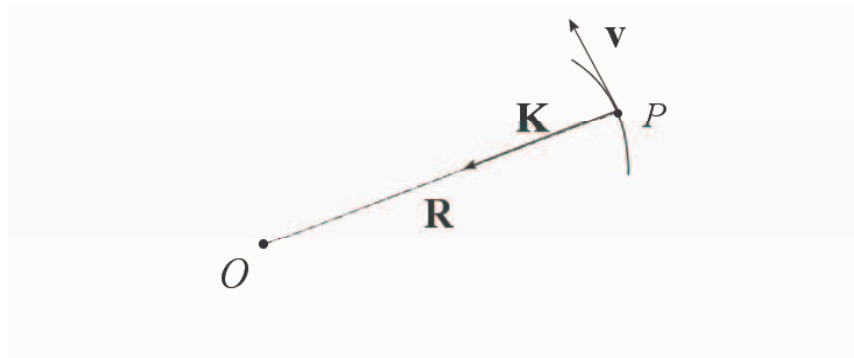
Kvadratet av omlaupstida (perioden) T for ein vilkårleg planet er proporsjonal med 3. potens av middelavstanden \bar{r} frå sola, dvs.

$$\frac{T^2}{\bar{r}^3} = \text{konstant (den same for alle planetar)}.$$

Desse lovene er reint empiriske ettersom dei er utleidde direkte frå observerte data utan å nytta grunnleggjande fysiske lover. Det var *Isaac Newton* (1642-1727) som ein mannsalder seinare var istand til å visa Keplers lover ut fra *Newtons 2. lov* og den *generelle gravitasjonslova* (som han sjølv hadde formulert). Resultata var publiserte i Newtons store vitenskaplege verk frå 1687, *Principia*. Dette var ei vitenskapleg bragd og ein stor siger for Newtons teori. Samtidig fekk dette mykje å seia for den raske utviklinga som fysikken fekk i tida som følgde.



Figur 2.7: Til venstre: Illustrasjon av banelova. Til høgre: Illustrasjon av areallova.



Figur 2.8: Ei sentralkraft \mathbf{K} er ei kraft som er retta inn mot eit fast punkt O . Figuren viser dessutan radius vektor \mathbf{R} frå O til lekamen P . Farten til lekamen er \mathbf{v} og akselerasjonen $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$, som er parallell med \mathbf{R} .

Utleiing av Keplers lover

Vi vil no visa Keplers lover ut frå Newtons 2. lov og gravitasjonslova, men utan å følgja Newtons opphavlege utleiing. Først vil vi visa ei nyttig

Hjelpesetning: Ein lekam påverka av ei sentralkraft vil utføra ei plan rørsle (sjå Figur 2.8.)

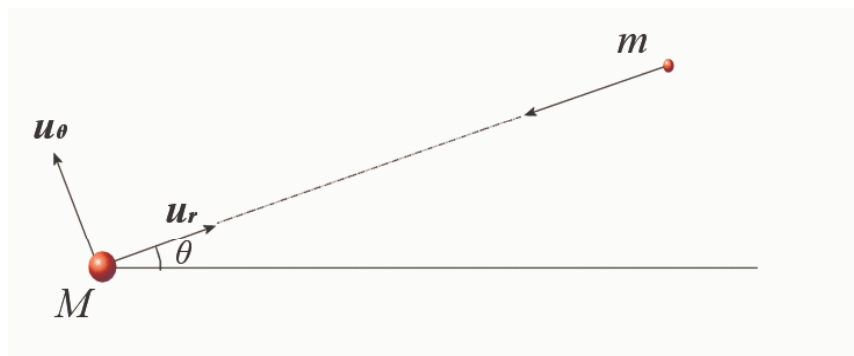
Prov: .

Derivasjon av produktet $\mathbf{R} \times \mathbf{v}$ med omsyn til tida t gir

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times \mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt}) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \mathbf{R} \times \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0}. \quad (2.41)$$

Altså er $\mathbf{R} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ (konstant vektor), som gir at både \mathbf{R} og \mathbf{v} ligg i eit plan loddrett den konstante (tidsuavhengige) vektoren \mathbf{c} . Dermed vil planet gjennom senteret O og lekamen P vera fast, som igjen medfører at rørsle er plan. ■

Vi konstruerer så ein matematisk modell for dette problemet som byggjer på enkle føresetnader:



Figur 2.9: Hjelpesfigur for oppstilling av likninga for plan rørsle.

- (i) Newtons gravitasjonslov gjeld
- (ii) Den innbyrdes vekselverknaden (gravitasjonen) mellom planetane er neglisjerbar samanlikna med gravitasjonskrafta frå sola.

Krafta \mathbf{K} mellom sola med masse M og ein planet med masse m er i følgje gravitasjonslova gitt ved

$$\mathbf{K} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (2.42)$$

der G er den generelle gravitasjonskonstanten, r er avstanden frå sola til planeten og \mathbf{u}_r einingsvektor i radiell retning.

Gravitasjonskrafta er uttrykt i polarkoordinatar r, θ . Akselerasjonen \mathbf{a} i polarkoordinatar (jamfør pendelen) er

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{u}_\theta, \quad (2.43)$$

der

$$\mathbf{R} = r \mathbf{u}_r, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{osv.}$$

Rørslelikninga (Newtons 2. lov) gitt i polarkoordinatar er dermed:

$$-G \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r = m \mathbf{a} = m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{u}_r + m(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{u}_\theta \quad (2.44)$$

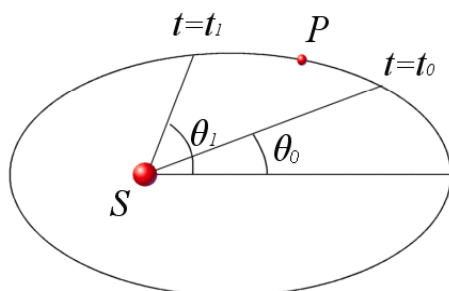
som gir to skalare rørslelikningar:

$$-G \frac{mM}{r^2} = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad (2.45)$$

$$r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (2.46)$$

Frå likning (2.46) følgjer det at

$$r^2 \dot{\theta} = k \text{ (konstant)} \Leftrightarrow r^2 d\theta = k dt \quad (2.47)$$



Figur 2.10: Hjelpefigur til prov av areallova.

Prov av areallova:

Sjå figur 2.10. I tidsrommet $\Delta t = t_1 - t_0$ vil radius vektor sveipa over ein sektor med areal A der

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Ved å nytta likning (2.47) og variabelskifte $\theta \rightarrow t$, kan vi rekna ut arealet:

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} k dt = \frac{1}{2} k(t_1 - t_0) = \frac{1}{2} k \Delta t \quad (2.48)$$

Dette viser areallova i det

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} k \Delta t_1 \\ A_2 &= \frac{1}{2} k \Delta t_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 = A_2 \text{ når } \Delta t_1 = \Delta t_2.$$

Prov av banelova:

Likningane (2.45) og (2.46) utgjer eit ikkje-lineært system av ordinære differensiallikningar av 2. orden. For å løysa dette systemet innfører vi ein ny avhengig variabel u , samtidig som vi eliminerer tida t og innfører θ som uavhengig variabel:

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{u}, \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \quad (2.49)$$

Likning (2.47) og (2.49) gir at

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = ku^2 \quad (2.50)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \cdot ku^2 = -k \frac{du}{d\theta} \quad (2.51)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r} = \frac{d}{d\theta} \left\{ -k \frac{du}{d\theta} \right\} \frac{d\theta}{dt} = -k \frac{d^2u}{d\theta^2} \{ku^2\} = -k^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad (2.52)$$

Likningane (2.50) og (2.52) innsett i (2.45) gir (i det $\dot{\theta}^2 = k^2 u^4$):

$$-GMu^2 = -k^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - k^2 u^3,$$

det vil seia:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{k^2} \quad (2.53)$$

Dette er ei inhomogen likning av 2. orden, med konstante koeffisientar. Ei partikulær løysing er

$$u_0 = \frac{GM}{k^2}. \quad (2.54)$$

Den generelle løysinga er

$$u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{GM}{k^2} = C \cos(\theta + \alpha) + \frac{GM}{k^2} \quad (2.55)$$

der C, α og k er integrasjonskonstantar. Vi vel akse i polarkoordinatar slik at $\alpha = 0$. Løysinga vert:

$$r = \frac{1}{C \cos(\theta + \alpha) + \frac{GM}{k^2}} = \frac{\frac{k^2}{GM}}{1 + e \cos \theta} \quad (2.56)$$

der

$$e = C \frac{k^2}{GM} \quad \text{er kalla eksentrisiteten,}$$

$e^2 = 1 - (\frac{b}{a})^2$ der a og b er største og minste halvakse i ellipsen.

Vi vil så visa at likning (2.56) representerer eit kjeglesnitt (ellipse, parabel eller hyperbel) med eine brennpunktet i origo, og eksentrisitet e . Vi innfører først $c_0 = k^2/GM$ slik at likning (2.56) kan skrivast

$$r + er \cos \theta = c_0 \Leftrightarrow r = c_0 - ex.$$

Kvadrering gir:

$$r^2 = x^2 + y^2 = c_0^2 - 2ec_0x + e^2x^2$$

dvs.

$$(1 - e^2)x^2 + 2ec_0x + y^2 = c_0^2. \quad (2.57)$$

Det følgjer no at planetbanen gitt ved likning (2.57) er:

$$\begin{array}{ll} \textit{Ellipse} & \text{når } 0 \leq e < 1 \quad (\text{lukka kurve}) \\ \textit{Parabel} & \text{når } e = 1 \quad \text{og} \\ \textit{Hyperbel} & \text{når } e > 1 \end{array}$$

Spesialtilfellet $e = 0$ svarar til *sirkel*.

Det er startkrava (integrasjonskonstantane k og C) som avgjer kva type bane ein himmellekam vil få. For alle planetane i solsystemet vårt er eksentrisiteten $e < 1$, dvs. ellipsar. Dei fleste planetane har ein svært liten eksentrisitet og banane er dermed nesten sirkulære.

Prov av harmonilova:

Keplers 3. lov kan visast greitt ut frå rørslelikningane (2.45) og (2.46), når ein i tillegg nyttar enkle geometriske eigenskapar ved ellipsar. Til dømes er middellavstanden mellom ein planet og sola lik største halvakse i ellipsebanen som planeten følgjer. La oss no avgrensa oss til sirkelebanar, der eksentrisiteten $e = 0$. Frå likning (2.56) følgjer det at radius $r =$ konstant og frå likning (2.47) at $\dot{\theta} =$ konstant. Vidare er:

$$k^2 = GMr \quad \text{og} \quad r^2 \dot{\theta} = k. \quad (2.58)$$

Banefarten

$$v = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = r \dot{\theta} = \text{konstant}. \quad (2.59)$$

Omlaupstida (perioden) er

$$T = \frac{\text{banelengd}}{\text{banefart}} = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{og} \quad rv = r^2 \dot{\theta} = k \quad (2.60)$$

Dette gir relasjonen

$$T^2 = \left(\frac{2\pi r^2}{rv} \right)^2 = 4\pi^2 \frac{r^4}{k^2} = \frac{4\pi^2}{GM} r^3. \quad (2.61)$$

For ellipsebanar vil vi få same relasjon som (2.61), der radius r er erstatta med middellavstanden $\bar{r} = a$. Her er a største halvakse i ellipsen. Dermed er:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (\text{konstant}). \quad (2.62)$$

Dette viser at forholdet T^2/a^3 er det same for alle planetar i solsystemet, berre avhengig den generelle gravitasjonskonstanten G og solmassen M .

Merknader:

- (i) Oppgåvene i dette kapitlet er i hovudsak henta frå Boyce and Di Prima [4], dels i omarbeidd form.
- (ii) Eit godt oppslagsverk om universet er [5]. Meir om Kopernikus og Newton kan ein lesa i [6].

Planet	Semimajor axis a^*	Eccentricity e	Period T
Mercury	57.95	0.2056	87.967 days
Venus	108.11	0.0068	224.701 days
Earth	149.57	0.0167	365.256 days
Mars	227.84	0.0934	1.8808 years
Jupiter	778.14	0.0484	11.8613 years
Saturn	1427.0	0.0543	29.4568 years
Uranus	2870.3	0.0460	84.0081 years
Neptune	4499.9	0.0082	164.784 years
Pluto	5909	0.2481	248.35 years

*Millions of kilometers

Figur 2.11: Data for store halvakse a (million km), eksentrisitet e og periode T for planetane. Tabellen er henta frå *Finney and Thomas* [3].

2.7 Oppg aver

Oppg ave 1

Ein lekam med masse m blir kasta vertikalt oppover med startfart v_0 . Anta at tyngdekrafta er einaste ytre kraft, dvs. vi neglisjerer luftmotstanden og eventuelle andre ytre krefter. Tyngdeakselerasjonen er g .

- Vis at tida t_m der lekamen n r maksimal høgde er gitt ved $t_m = v_0/g$.
- Vis at den maksimale høgda $x_m = v_0^2/2g$.
- Finn tida der lekamen n r bakken (utskytingspunktet).

Oppg ave 2

Ein lekam med masse m vert kasta vertikalt nedover med startfart v_0 i eit medium der motstanden (friksjonen) er proporsjonal med farten, dvs. friksjonskrafta er $K_f = -kv$ (n r positiv retning blir rekna nedover), og der k er friksjonskoeffisienten. Tyngdeakselerasjonen er g .

- Vis at

$$v = \frac{mg}{k} + \left[v_0 - \frac{mg}{k} \right] e^{-\frac{k}{m}t}.$$

- Finn grensefarten $v_g = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$.

Oppgåve 3

Ein lekam med masse m fell fr  ro (ved $t = 0$) i eit medium der friksjonen er proporsjonal med farten (sj  Oppgåve 2). Finn tida t_0 der farten er 90 prosent av av grensefarten v_g .

Oppgåve 4

Eit prosjektil vert skote opp med utgangsfart v_0 i ei retning som dannar vinkelen α ($0 < \alpha < \pi/2$) med horisontalretninga. Rekn med konstant tyngdekraft og neglisjer luftmotstanden.

- (a) Finn den maksimale høgda z_m i den banen som prosjektilet følgjer.
- (b) Finn avstanden x_m frå utskytingspunktet til nedslagspunktet (n r desse punkta ligg i same høgde over havet).
- (c) Finn den vinkel α_m som gir maksimal verdi for x_m . Finn også den maksimale verdien for x_m .

Oppgåve 5

Ein lekam med masse m fell fr  ro (ved $t = 0$) i eit medium der friksjonen er proporsjonal med kvadratet av farten (jamfør oppgåve 2 og 3). Friksjonskoeffisienten er k og tyngdeakselerasjonen g .

- (a) Finn farten som funksjon av tida.
- (b) Finn grensefarten.

Oppgåve 6

Ein lekam med masse m fell fr  ro i eit medium der friksjonen er proporsjonal med $|v|^r$, der r er ein positiv konstant. Friksjonskoeffisienten er k og tyngdeakselerasjonen g . Finn grensefarten v_g .

Oppgåve 7

Ein lekam med masse m vert skoten vertikalt oppover med startfart v_0 . Luftmotstanden er proporsjonal med farten og motsett retta. Friksjonskoeffisienten er k og tyngdeakselerasjonen g .

- (a) Vis at farten $v = v(t)$ er gitt ved

$$v = -\frac{mg}{k} + \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

- (b) Vis at den maksimale høgda x_m og tida t_m for å oppnå denne høgda er gitt ved

$$t_m = \frac{m}{k} \ln \left[\frac{kv_0}{mg} + 1 \right], \quad x_m = -\frac{m^2 g}{k^2} \ln \left[\frac{kv_0}{mg} + 1 \right] + \frac{m}{k} v_0.$$

- (c) Vis at når $kv_0/mg < 1$, kan t_m og x_m skrivast

$$t_m = \frac{v_0}{g} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right]$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right]$$

- (d) Vis at resultatata i punkt (c) samsvarar med resultatata i Oppgåve 1 når $k \rightarrow 0$.

Oppgåve 8

Gitt farten $v = v(t)$ i oppgåve 7(a). Vis at

(a) $\lim_{k \rightarrow 0^+} v(t, k) = v_0 - gt.$

(b) $\lim_{m \rightarrow 0^+} v(t, m) = 0.$

Oppgåve 9

Ein rakett vert skoten vertikalt oppover frå jordoverflata med startfart $v_0 = \sqrt{2gR}$, der R er jordradius og g er tyngdeakselerasjonen. Rekn med variabelt tyngdefelt, men neglisjer luftmotstanden.

- (a) Vis at farten $v = R\sqrt{2g/(R+x)}$, der x er avstanden frå raketten til jordoverflata.

- (b) Vis at tida t_0 for at raketten skal nå distansen (avstanden til jordoverflata) x_0 er

$$t_0 = \frac{2/3}{R\sqrt{2g}} \left[(R+x_0)^{3/2} - R^{3/2} \right].$$

- (c) Finn tida t_0 når $x_0 = 384\,000$ km.

Oppgåve 10

Ein rakett vert skoten vertikalt oppover med startfart v_0 frå eit punkt $x_0 = \xi R$, der R er jordradius. Rømfingsfarten (escape velocity) v_e er minste startfart slik at raketten forlet jordas tyngdefelt (forsvinn ut i verdsrommet). Rekn med variabelt tyngdefelt, men neglisjer luftmotstanden.

- (a) Vis at rømingfarten $v_e = \sqrt{2gR/(1 + \xi)}$.
- (b) Finn den høgda $x_0 = \xi R$ som har ein rømingfart som er 50 prosent av rømingfarten ved jordoverflata.
- (c) Finn den høgda som er 85 prosent av rømingfarten ved jordoverflata.

Oppgåve 11

Ein sylinderforma tank med vatn har konstant tverrsnitt A . Vatn blir pumpa inn med konstant rate k , og lek (renn) ut gjennom eit lite hol med areal a i botn av tanken. I følgje Toricelli's setning i hydrodynamikk vil vatnet strøyma ut gjennom holet med ein rate $\alpha a \sqrt{2gh}$, der h er høgda på vassstanden i tanken, g er tyngdeakselerasjonen og α er konstant, $0.5 \leq \alpha \leq 1$.

- (a) Vis at høgda h oppfyller differensiallikninga:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(k - \alpha a \sqrt{2gh})}{A}.$$

- (b) Finn likevektshøgda h_e og vis at likevektstilstanden er stabil. Er likevektshøgda h_e avhengig av A ?

Vink: Bruk stabilitetsteorien i kapittel 3 (Appendiks).

Oppgåve 12

Likninga for dempa harmoniske svingingar, dvs. likning (2.32), er uavhengig av tyngdeakselerasjonen g . Forklar kva konsekvensar dette har. Kva rolle spelar gravitasjonsfeltet (tyngdeakselerasjonen) i dette problemet?

Litteratur

- [1] G. B. Thomas jr., *Calculus*, 3. ed, Addison-Wesley, 1969.
- [2] R. J. Stephenson, *Mechanics and properties of matter*, John Wiley & Sons, 1961.
- [3] R. L. Finney and G. B. Thomas jr., *Calculus* Addison-Wesley, 1989.
- [4] E. B. Boyce and R. C. Di Prima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 5. ed, John Wiley & Sons, 1986.
- [5] *Astronomi - Det internasjonale standardverket om vårt univers*, Utarbeidd ved Universitetet i Cambridge. Gyldendal Norsk Forlag, 1979.
- [6] Trond Berg Eriksen (red.), *Vestens tenkere, bind 1-3*, Aschehoug, 1993.

Kapittel 3

Modellar i økologi

3.1 Innleiing

Økologi er læra om samspelet i naturen, dvs. korleis levande organismar vekselverkar med kvarandre og med den ikkje-levande naturen. Nemninga økologi vart opphaveleg innført av den tyske biologen Ernst Haeckel i 1869. Eit par andre vanlege definisjonar av økologi er ”læra om struktur og funksjon i den levande naturen” eller ”biologi over individnivå”.

Sentrale omgrep i økologi er *populasjon*, *samfunn* og *økosystem*.

- Ein *populasjon* er ein bestand av organismar av same art, lokalisert til eit visst geografisk område, t.d. reinsdyr-stamma på Hardangervidda, blåkvalbestanden i Antarktis eller isbjørnstamma på Svalbard.
- Eit *samfunn* er ei samling av populasjonar i eit visst geografisk område.
- Eit *økosystem* omfattar både levande organismar og deira ikkje-levande omgivnad.

Innsikt i økologi er i dag nødvendig for å oppnå rasjonell utnytting av naturressursane, og for å unngå uheldige inngrep i naturen som kan få alvorlege konsekvensar. Økologi er såleis ei viktig grein av biologien. Viktige hjelpevitenskapar i studiet av økologien er matematikk, informatikk, fysikk, kjemi, geofysiske fag og ulike teknologiske fag.

På bakgrunn av den store framgangen innan matematisk fysikk sidan Newtons tid var det i byrjinga av 1900-talet ein naturleg tanke at matematiske metodar også ville kunna nyttast med hell i biologi, mellom anna i økologiske problem. Dei første meir omfattande forsøka på å nytta matematiske metodar i økologi vart gjorde av den amerikanske demografen *Alfred Lotka (1880-1949)* tidleg i 1920-åra, Lotka [1]. Frå og med 1925 og utover gjenoppdaga den italienske matematikaren og fysikaren *Vito Volterra (1860-1940)* fleire av modellane og resultatane til Lotka, og førde den matematiske

teorien langt vidare, Volterra [2]. Desse to forskarane blir rekna som pionerar på området.

På 1960-talet fekk matematisk økologi eit sterkt oppsving ved at ein kunne ta i bruk datamaskinmodellar av økologiske system. Sidan den tid har matematiske modellar og numeriske metodar i stigande grad vunne innpass i økologien. Det er i hovudsak to framgangsmåtar ein kan nytta for å studera økologiske problem ved hjelp av matematiske metodar. Den eine er *simulering* på datamaskin, der formålet normalt er ei mest mogeleg naturtru etterlikning av eit økologisk system, eller del av eit slikt, til dømes Hardangervidda, Østersjø-bassenget, osv. Den andre framgangsmåten er å nytta *kvalitative modellar*, der målet er å avdekka generelle lovsamanhengar i økologien og finna generelle idéar om økologiske forhold.

Dei to metodane utfyller kvarandre. Simuleringar er aktuelle som ei form for dynamisk kartlegging av økosystem, for å studera ressursutnytting, forurensing, osv. I mange tilfelle er derimot kvalitative aspekt ved økosystem det mest interessante, mens presise numeriske verdiar spelar mindre ei rolle. Dessutan er kvalitative modellar det einaste mogelege i mange tilfelle på grunn av manglande empiriske data.

I dette kapitlet vil vi ta for oss nokre relativt enkle, men viktige og velkjende døme på kvalitative modellar. Framstillinga byggjer i stor grad på to publikasjonar av Jon Reed, den første er eit hefte i økomatematikk utgitt ved Universitetet i Tromsø, Reed [3], mens den andre er ein artikkel i Nordisk Matematisk Tidskrift, Reed [4]. Vi takkar Jon Reed for at vi har fått høve til fritt å nytta stoff frå desse framstillingane.

3.2 Vekst i populasjonar

Vi vil først studera visse enkle former for vekst i populasjonar, som eksponentiell vekst, logistisk vekst og visse generaliseringar. La N vera eit mål for storleiken på ein dyrepopulasjon: N kan vera *talet på individ* i populasjonen eller alternativt kan N vera total *biomasse*. I så fall vil N også vera eit mål for middeltettleiken av populasjonen.

Storleiken på populasjonen vil variera over tid, $N = N(t)$, der t er tida. La oss anta at denne funksjonen, og alle andre funksjonar som inngår i modellane, er kontinuerleg og tilstrekkeleg deriverbar. Det vil seia, vi vil avgrensa oss til kontinuerlege og deriverbare modellar, sjølv om ein *diskret* modell i mange tilfelle kunne vera meir realistisk.

Vekstraten til ein populasjon i eit økosystem er i det allmenne tilfellet gitt ut frå fødsel og død, i tillegg til innvandring og utvandring. Dette gir vekstlikninga

$$\frac{dN}{dt} = B - D + I - U \quad (3.1)$$

der B er fødselsraten, D er dødsraten, I er innvandringsraten og U er ut-

vandringsraten. Alle desse storleikane vil bli påverka i naturen av ei rekkje forhold. Faktorar som innverkar på fødsels- og dødsratar er alderssamansetjing i populasjonen, tilgang på mat og plass, fysiske og kjemiske forhold i omgivnaden, rovdyr, parasittar og eventuelt andre forhold. Modellar for populasjonsvekst kan derfor lett bli ganske kompliserte. I første omgang vil vi avgrensa oss til dei enklaste former for vekst i ein populasjon, vekstformer som kan vera realistiske under visse vilkår.

Den enklaste typen av populasjonsvekst får vi ved å anta at vekstraten til populasjonen i kvart tidspunkt er gitt som funksjon av storleiken på populasjonen i same tidspunkt. Dette gir ei vekstlov som er ei differensiallikning på forma

$$\frac{dN}{dt} = F(N) \quad (3.2)$$

Med gitt startpopulasjon $N_0 = N(0)$ er $N(t)$ eintydig bestemt. Dette følgjer frå eksistens- og eintydighetssetninga for differensiallikningar.

Den *spesifikke vekstraten*, også kalla *per capita vekstrate*, til ein populasjon er definert som nettoveksten per individ og per tidseining,

$$r(N) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}. \quad (3.3)$$

Denne storleiken er eit mål for det enkelte individs gjennomsnittlege tilskot til populasjonsveksten, og er meir grunnleggjande enn vekstraten. Den spesifikke vekstraten kan oppfattast som eit mål for artens evne til å formeira seg under gitte ytre vilkår.

3.2.1 Eksponentiell vekst (Malthus' modell.)

Den enklaste føresetnad ein kan gjera er å anta at den spesifikke vekstraten er konstant. Dette er ein rimeleg føresetnad for ein art som kan øksla (formeira) seg fritt under relativt uforandra vekstvilkår, så lenge tettleiken av arten ikkje påverkar reproduksjonen. Vi kan anta at den spesifikke vekstraten r er bestemt berre av dei biologiske eigenskapane til arten og dei faste ytre vekstvilkåra. Dette gir følgjande vekstlov, også kalla "lova for naturleg vekst":

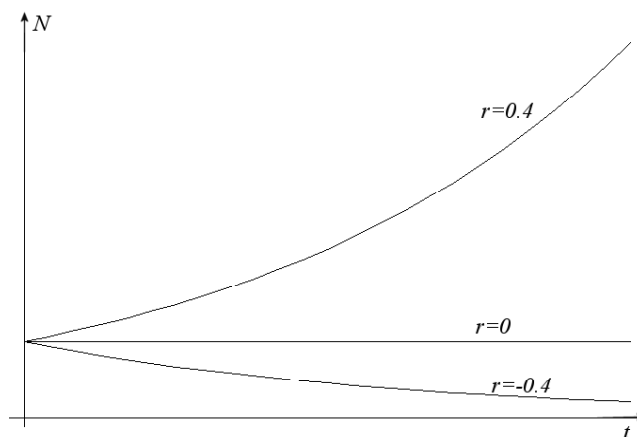
$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad r = \text{konst. (Malthus'lov)} \quad (3.4)$$

Med startkravet $N(0) = N_0$ er løysinga

$$N(t) = N_0 e^{r t} \quad (3.5)$$

som gir *eksponentiell vekst*. Når $r > 0$, går $N(t) \rightarrow \infty$ når $t \rightarrow \infty$ og når $r < 0$, går $N(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$, sjå figur 3.1.

Likninga (3.4) blir kalla *Malthus' lov* etter den engelske demografen Thomas Malthus (1766-1834), som gav ut eit verk om problemet i 1798,



Figur 3.1: Eksponentiell vekst med spesifikk vekstrate $r = 0.4, 0, -0.4$. (Malthus' modell)

Malthus [5]. Ein dyreart som får veksa fritt med konstant spesifikk vekstrate, vil følgja ei eksponentiell vekstkurve med ein populasjons-eksplasjon som følgje. Før eller seinare må derfor noko setja ein stoppar for veksten. Malthus antok derfor at det som først og frems vil hindra ei folkemengde i å veksa eksponentielt, vil vera permanent matmangel og svolt over store deler av verda. Eksempel 3.1 viser at modellen har vore realistisk over relativt lange tidsrom.

Modellen til Malthus er viktig og nyttig langt utover populasjonsvekst i økologi. Ei rekkje vekstfenomen i samfunn og næringsliv vil over avgrensa tidsrom ha ein konstant spesifikk vekstrate. Eit anna kjent døme er frå atomfysikk, ved disintegrasjon av eit radioaktivt stoff.

Eit karakteristisk trekk ved eksponentiell vekst er konstant *doblingstid*. Tida (tidsromet) T som trengst for å dubla populasjonen ved tidspunktet t er gitt ved likninga

$$N(t+T) = 2N(t), \quad \text{dvs. } N_0 e^{r(t+T)} = 2N_0 e^{r t} \quad (3.6)$$

som gir at $rt + rT = \ln 2 + rt$, dvs.

$$T = \frac{\ln 2}{r} = \text{konst.} \quad (3.7)$$

Eksempel 3.1

I lange tidsrom har folkeauken i verda vore om lag 2% per år. Det tilsvarar ein per kapita vekstrate $r = 0.02$, det vil seia ei doblingstid på om lag 35 år. Dette gir eit ganske godt, om enn tilnærma, overslag over utviklinga av folketalet i verda frå 1905 og fram til stoda slik ho er i dag:

Årstal	Folketal
1905	1 milliard
1940	2 milliard
1975	4 milliard
<hr/>	
2010	8 milliard?

3.2.2 Logistisk vekst (Verhulsts modell)

Malthus' lov kan i beste fall gi ei rimeleg nøyaktig skildring av veksten i ein populasjon i eit visst avgrensa tidsrom. Ein meir realistisk modell vil vera å innføra ei øvre grense $K > 0$ for den populasjon som omgivnaden kan livnæra. K kallast *berekapasiteten*. Studerer vi ein art med avgrensa territorium, er følgjande *veksthypotese* meir realistisk: Den spesifikke vekstraten er proporsjonal med det "ledige livsrom" $K - N$. Dette gir vekstlikninga

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{r}{K}(K - N), \quad \text{dvs.} \quad \frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (\text{Verhulsts lov}) \quad (3.8)$$

Denne likninga vart først studert av den belgiske demografen P.F. Verhulst (1804-1849) som ein enkel modell for å predikera (føråtseia) folkeauken i Belgia, sjå Verhulst [6].

Når populasjonen er liten samanlikna med berekapasiteten, $N \ll K$, er den spesifikke vekstraten tilnærma lik r . Likning (3.8) er ei separerbar differensiallikning og kan løysast ved standard metodar. Delbrøkkopp spalting og omforming gir likninga

$$\frac{K}{N(K - N)} dN = \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = r dt, \quad (3.9)$$

og integrasjon gir

$$\ln N - \ln |K - N| = \ln \left| \frac{N}{K - N} \right| = rt + \ln C \quad (3.10)$$

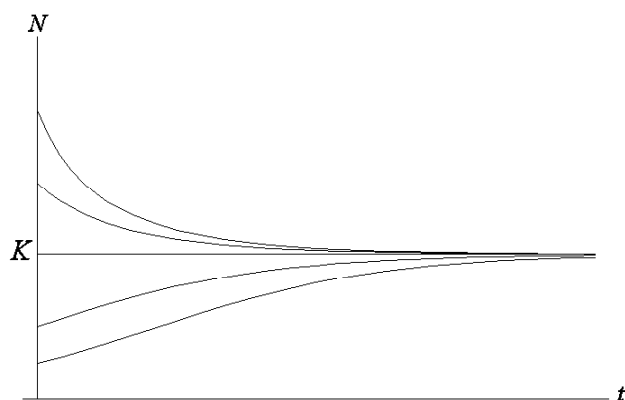
der C er ein konstant. Med startkravet $N(0) = N_0 > 0$, blir

$$C = \frac{N_0}{K - N_0}, \quad \text{og} \quad \frac{N}{K - N} = \frac{N_0}{K - N_0} e^{rt}. \quad (3.11)$$

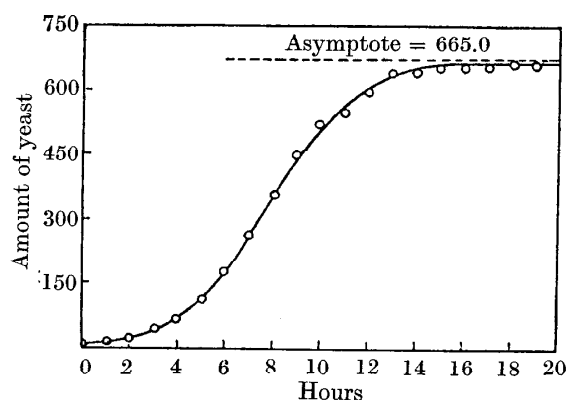
Løysinga av likning (3.8) er ein såkalla *logistisk vekst*, gitt ved

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}}, \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Når $r > 0$, vil populasjonen nærma seg bereevna K når $t \rightarrow \infty$. Vidare vil $N(t) \rightarrow N_0 e^{rt}$ når $K \rightarrow \infty$, dvs. eksponentiell vekst. Figur 3.2 viser ulike



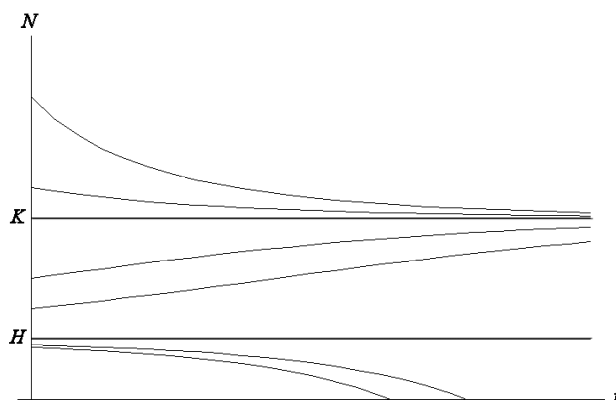
Figur 3.2: Logistiske vekstkurver for ulike startverdiar. (Verhulsts modell)



Figur 3.3: Vekst av ein koloni gjærceller med tilpassa logistisk vekstkurve (Odum [7])

integralkurver (logistiske vekstkurver) for ulike startverdiar N_0 . Løysinga $N = K$, som svarar til ein startverdi $N_0 = K$, er ei *asymptotisk stabil* likevektsløysing eller likevektstilstand, mens $N = 0$ er ei *ustabil* likevektsløysing.

Som venta er ikkje denne modellen særleg nøyaktig for eit så innfløkt problem som folkeauke, dvs. vekst i ulike lands folkemengder. Verhulst anslo Belgias berekapasitet til å vera omlag 6.6 millionar, mens det aktuelle folketalet i 1973 var på 9.7 millionar. Modellen kan derimot fungera godt for ulike vekstformer under kontrollerte forhold, som til dømes vekst av mikroorganismar. Eit eksempel er vekst av gjærceller på eit næringsmiddel, henta frå ei bok av Odum [7], der Verhulsts lov gir ei sær sars god tilnærming, sjå figur 3.3



Figur 3.4: Vekstkurver for ulike startverdier. (Verhulsts generaliserte modell)

3.2.3 Generalisering av Verhulsts modell

I Verhulsts modell antar ein at den spesifikke vekstraten er størst når bestanden er nær null og minkar jamt med aukane bestand. I røynda vil både ein for låg og ein for høg tettleik av ein art innverka negativt på reproduksjonen, og den optimale tettleiken vil liggja ein stad midt imellom. Dette kallast i økologi for *Alle effekten*, sjå t.d. Odum [7]. Vi må rekna med at bestanden døyr ut når han underskrider ein viss kritisk verdi $H > 0$. I så fall er H den *minimale levedyktige bestanden*. Vi vil no endra og byggja ut Verhulsts modell slik at dette fenomenet kan fangast opp. La oss anta følgjande hypotese (vekstlov)

$$\frac{dN}{dt} = k(N - H)(K - N) \quad (\text{Verhulsts generaliserte lov}) \quad (3.13)$$

der H er minimal levedyktig bestand, K er berekapasiteten og k er ein konstant. Det følgjer frå likn. (3.13) at vekstraten er positiv når $H < N < K$ og er negativ når $N < H$ eller $N > K$. Figur 3.4 viser integralkurvane for ulike startverdier $N_0 > 0$. Forløpet til integralkurvane indikerer at likevektsløysinga $N = H$ er *ustabil* og at likevekstløysinga $N = K$ er *asymptotisk stabil*.

Likning (3.13) er separerbar og kan løysast ved standard metodar. Men likninga kan også tilbakeførast til ei likning av typen (3.8), logistisk vekst pluss ein konstant, ved å innføra ein ny avhengig variabel

$$M(t) = N(t) - H. \quad (3.14)$$

Når $N(0) > H$, gir likning (3.14) løysingar av typen $M(t) + H$ der M er logistisk vekst med berekapasitet $K^* = K - H$. Denne metoden blir brukt i

oppgåve 1. Med startkravet $N(0) = N_0$ er løysinga gitt ved

$$N(t) = H + \frac{K - H}{1 + [(K - N_0)/(N_0 - H)]e^{-k(K-H)t}}. \quad (3.15)$$

$N(t) \rightarrow K$ når $t \rightarrow \infty$ for alle $N_0 > H$. Dersom $0 < N_0 < H$, vil $N(t) \rightarrow -\infty$ for ein endeleg t -verdi, $t = t_s$, sjå oppgåve 5 (c).

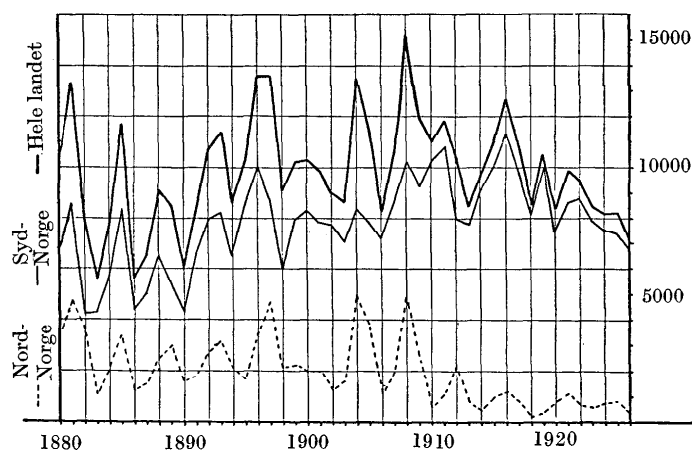
3.3 Periodiske svingingar i dyrebestandar. Lotka-Volterras modell

I naturlege omgivnader vil bestanden av ein dyreart bli regulert av mange faktorar. Ein viktig faktor i denne samanhengen er vekselverknaden mellom ulike artar i eit økosystem. At det føregår ein sterk grad av innbyrdes regulering mellom dyrebestandar, kan ein mellom anna sjå frå tilfelle der utrydding av ein dyreart ved menneskelege inngrep har ført til katastrofar for andre dyreartar. Omvendt kan innføring av nye dyreartar i eit økosystem føra til same resultat. Vekselverknaden mellom artar kan vera komplisert og inngrep kan ofte få alvorlege økologiske konsekvensar som kunne vera vanskelege å sjå på førehand.

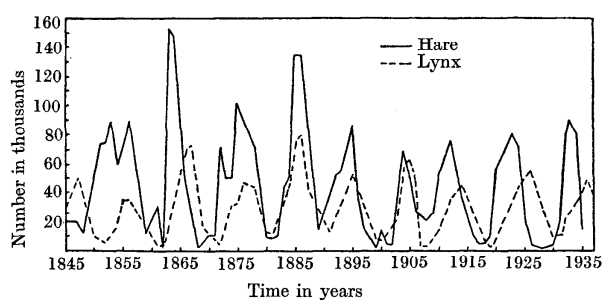
Eit spesielt interessant økologisk fenomen er regelmessige populasjonssvingingar som kan observerast for ei rekkje dyrebestandar i naturen. Eit godt eksempel er tilfellet med lemen der toppår, såkalla lemenår, førekjem kvart 3-4 år. Ei rekkje andre smågnagarar har liknande periodiske forløp med same 3-4 års periode, ofte synkront for ulike artar innan eitt og same område. I samband med desse variasjonane i smågnagarbestanden, kan ein også registrera svingingar for andre artar som *predatorar* (rovdyr) på smågnagarar, særleg rev og forskjellig rovfugl.

Slike svingingar av viltbestandane har truleg vore velkjent frå gammal tid, sidan dette fenomenet er viktig for jakt og fangst. Den første som gjorde systematiske empiriske granskingar av fenomenet, var den kjende engelske økologen Charles Elton [8] i 1920-åra. Eit viktig faktum i denne samanhengen er at tettleiken av forskjellige viltbestandar let seg anslå bakover i tid på grunnlag av statistikkar over omsetning av skinn og ut frå oversikter over utbetalte skotpremiar. Slike data har sjølv sagt mange feilkjelder og er derfor ikkje særleg pålitelege som mål for tettleiken av ein populasjon, men må nyttast i mangel på meir vitenskapleg innsamla data.

Vi viser to eksempel på relativt regelmessige, naturlege populasjonssvingingar. Figur 3.5 viser kurver for talet på utbetalte skotpremiar for rev i Noreg i tidsrommet 1880-1926. Som vi ser eksisterer det ein markert 3-4 års periode, og svingingane for nordlege og sørlege del av landet er praktisk talt i fase. Figur 3.6 viser eitt av dei klassiske eksempla på bytte-rovdyr svingingar i økologien, 9-10 års sykkelen for hare og gaupe i Canada. Kurvene byggjer på statistikkar over mottekne skinn i Hudson Bay Company. Sidan haren er



Figur 3.5: Rev i Noreg. Antal premiar utbetalt årleg.



Figur 3.6: Bestander av hare og gaupe indikert ved antal skinn mottatt av Hudson Bay Company. (Odum [7])

det naturlige byttedyret for gaupa, er det ikkje overraskande at det to kurvene svingar med same periode. Vi ser dessutan at svingingane har ei faseforskyvning med om lag $1/4$ periode. Dette har ei enkel forklaring: Ser vi bort frå andre regulerande faktorar for rovdycet si formeiring enn matferrådet, kan vi venta at formeiringa av rovdycra vil skje raskast når bestanden av byttet er på topp. Formeiringa reknast per individ. Det skulle derfor resultera i at rovdycurva får sterkast stigning litt etter toppane i byttekurva.

3.3.1 Lotka-Volterras likningar.

Det første forsøket på å forklara svingefenomenen i dyrebestandar ved ein matematisk modell er dei namngjetne *Lotka-Volterras likningar* som vart innførte av Lotka i 1920 og gjenoppdaga av Volterra i 1925. Gitt eit system av to dyreartar der den eine arten er bytte og den andre er predator, til dømes hare og gaupe, smågnagar og rovfugl, to artar fisk der den største er den minste, osv.

La $N_1 = N_1(t)$ vera talet på byttedyr og $N_2 = N_2(t)$ vera talet på predatorar, der t er tida. Lotka-Volterras likningar er gitt ved følgjande sett av differensiallikningar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} &= \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 & (\text{bytte}) \\ \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} &= -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 & (\text{predator}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

der parametrane ε_1 , ε_2 , γ_1 , γ_2 alle er positive. Det følgjer frå likningane at

- Utan rovdyr veks byttedyrbestanden eksponentielt
- Utan byttedyr minkar rovdyrbestanden eksponentielt
- Negativt tilskot i spesifikk vekstrate for byttet er proporsjonalt med N_2
- Positivt tilskot i spesifikk vekstrate for rovdyra er proporsjonalt med N_1

Likningane (3.16) blir vanlegvis skrivne på forma

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2 \quad (3.17)$$

Systemet har to *likevektstilstandar*, også kalla *likevektsstillingar* eller *likevektsløysingar*, gitt ved at begge vekstratane er null. Desse er den trivielle løysinga $N_1 = N_2 = 0$ og løysinga

$$N_1^* = \varepsilon_2/\gamma_2 \quad , \quad N_2^* = \varepsilon_1/\gamma_1 \quad . \quad (3.18)$$

Dei to artane kan teoretisk sett leva i likevekt der predatorane akkurat tek overskotet av byttet, og byttebestanden akkurat er stor nok til å gi mat nok for predatorane. For å undersøkje kva som skjer når systemet er ute av likevekt, studerer vi stabiliteten av likevektsløysingane. La oss finna Jacobi-matrisa for kvar av dei to likevektstilstandane:

$$F(N_1, N_2) = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2 \quad , \quad G(N_1, N_2) = -\varepsilon_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2 \quad (3.19)$$

som gir

$$\frac{\partial F}{\partial N_1} = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial N_2} = -\gamma_1 N_1 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial G}{\partial N_1} = \gamma_2 N_2 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial N_2} = -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 \quad (3.21)$$

Likevektsstilling I, $N_1 = N_2 = 0$:

Jacobi-matrisa

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

og eigenverdiane er $r_1 = \varepsilon_1$, $r_2 = -\varepsilon_2$.

Sidan systemet (3.17) er nesten-lineært i ei omegn om (0,0) og eigenverdiane har motsett forteikn, er likevektspunktet eit *sadelpunkt*. Dette inneber at likevektstilstanden er *ustabil*. Modellen gir dermed følgjande resultat: Når bestandane er tilstrekkeleg små, vil ikkje begge døy ut .

Likevektstilstand II, $N_1 = \varepsilon_2/\gamma_2$, $N_2 = \varepsilon_1/\gamma_1$:

Jacobi-matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_2\gamma_1/\gamma_2 \\ \varepsilon_1\gamma_2/\gamma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

og eigenverdiane er $r_1 = i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, $r_2 = -i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$.

Sidan eigenverdiane er reint imaginære, er likevektspunktet eit senter for lineærapprosimasjonen til systemet (3.17). Derfor kan det ikkje dragast konklusjonar for det ikkje-lineære systemet, og vi må nytta andre metodar for stabilitetsanalysen.

I dette tilfellet er det mogeleg å finna eit *analytisk uttrykk* for trajektoriene (løysingskurvene i faseplanet) ved å integrera Lotka-Volterras likningar. Ved å eliminera dt i system (3.17), får vi relasjonen

$$\frac{dN_1}{(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)N_1} = \frac{dN_2}{(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)N_2} ,$$

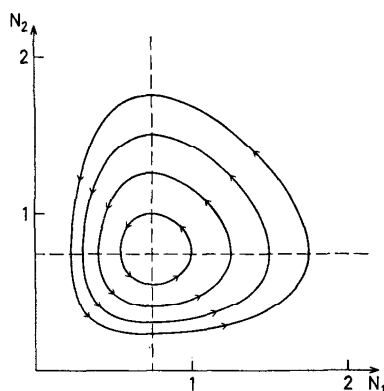
dvs.

$$\left(-\frac{\varepsilon_2}{N_1} + \gamma_2\right)dN_1 = \left(\frac{\varepsilon_1}{N_2} - \gamma_1\right)dN_2 \quad (3.22)$$

som ved integrasjon gir

$$-\varepsilon_2 \ln N_1 + \gamma_2 N_1 - \varepsilon_1 \ln N_2 + \gamma_1 N_2 = C \text{ (konst.)} \quad (3.23)$$

Vi kan skriva denne likninga på forma $V(N_1, N_2) = C$ der V er definert over den opne første-kvadranten $N_1, N_2 > 0$ av N_1, N_2 -planet. Ei løysing $N_1 = N_1(t)$, $N_2 = N_2(t)$ av likninga (3.23) representerer ei kurve i N_1, N_2 -planet, ei trajektorie for systemet. Det følgjer også at til kvar trajektorie, også kalla ei nivåkurve for V -funksjonen, svarar det ein konstant C . Det viser seg at desse trajektoriene (integralkurvane i faseplanet) er enkellukka kurver med unntak av éi, som degenererer til likevektspunktet gitt ved (3.18). Figur 3.7 viser kurvene i faseplanet, det såkalla *faseportrettet* for Lotka-Volterras likningar når $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.75$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Av uttrykka for dN_1/dt og dN_2/dt i likning (3.17) kan ein visa at kurvene vil gjennomløypast i



Figur 3.7: Faseportrett for Lotka-Volterras likningar når $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.75$ og $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

positiv omløpsretning, kvar med ei endeleg omløpstid T , som i det allmenne tilfellet er avhengig av kurva (dvs. startverdiane).

Dersom vi overfører desse resultatata frå $N_1 N_2$ -planet til løysingane $N_1 = N_1(t)$, $N_2 = N_2(t)$ av (3.23), ser vi at funksjonane er periodiske svingingar med felles periode T og har ei innbyrdes faseforskyvning på om lag $1/4$ periode. Den positive omløpsretninga for trajektoriene i fase-planet svarar til at byttebestanden $N_1 = N_1(t)$ når maksimum om lag $1/4$ periode før predator-bestanden $N_2 = N_2(t)$, sjå figur 3.8.

Ein viser lett at nær likevektspunktet er trajektoriene tilnærma *ellipsar*. Vi rekkjeutviklar ln-funksjonane nær likevektspunktet i det vi innfører nye avhengige variable u og v :

$$N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + u, \quad N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + v, \quad u, v \text{ små} \quad (3.24)$$

Innsett i likninga (3.23) gir dette

$$-\varepsilon_2 \ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + u\right) + \gamma_2\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + u\right) - \varepsilon_1 \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + v\right) + \gamma_1\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + v\right) = C. \quad (3.25)$$

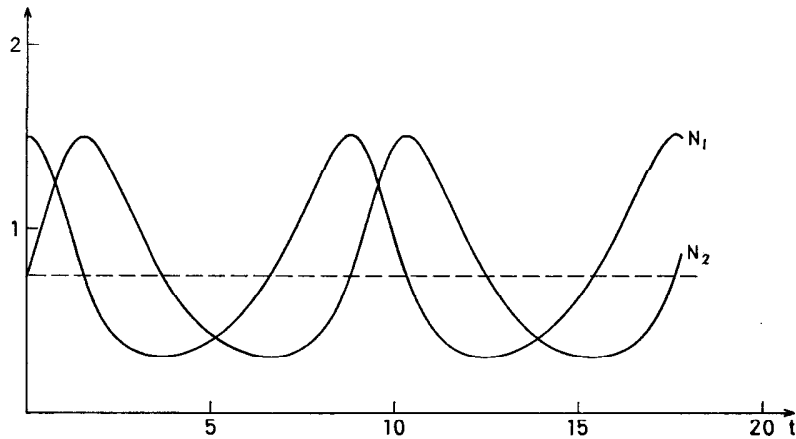
I det vi nyttar at

$$\ln(a + x) = \ln a + x/a - \frac{1}{2}(x/a)^2 + \frac{1}{3}(x/a)^3 - \frac{1}{4}(x/a)^4 + \dots, \quad (3.26)$$

får vi følgjande ellipsar om likevektspunktet som tilnærming

$$\frac{\gamma_2^2}{\varepsilon_2} u^2 + \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1} v^2 = \text{konst.} \quad (3.27)$$

der ledd av 3.orden og høgre i u, v er neglisjerte. Likevektspunktet er altså eit *senter* (stabil), same resultat som vi fekk for den lineære approksimasjonen.



Figur 3.8: Løysing av Lotka-Volterras likningar. Parameterverdiar som i Figur 3.7.

Vi har no funne følgjande *karakteristiske trekk* ved Lotka-Volterra modellen:

- Integralkurvane i faseplanet er lukka kurver om likevektspunktet $(\varepsilon_2/\gamma_2, \varepsilon_1/\gamma_1)$
- Dette likevektspunktet er *stabilt* (senter)
- Dei lukka kurvene representerer *periodiske* løysingar. Det er $1/4$ periode faseforskyvning mellom $N_1 = N_1(t)$ og $N_2 = N_2(t)$.
- Amplitudane er avhengige av *startvilkåra*
- Nær likevekt er omløpstida (perioden), $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, den same for alle kurvene

Sidan eigenverdiane for den lineære approksimasjonen er $r_1 = -r_2 = i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, er frekvensen gitt ved $\omega = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ (sjå likevektstilstand II).

Utrekning av gjennomsnittsverdiane.

For ei periodisk svinging $N = N(t)$ med periode T er *gjennomsnittsverdien* definert ved

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T N(t) dt. \quad (3.28)$$

Vi skriv Lotka-Volterras likningar på forma

$$\frac{dN_1}{N_1} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) dt, \quad \frac{dN_2}{N_2} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) dt \quad . \quad (3.29)$$

Integrasjon over ein periode gir

$$\int_{N_1(0)}^{N_1(T)} \frac{dN_1}{N_1} = \int_0^T (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) dt \quad , \text{ som gir } 0 = \varepsilon_1 T - \gamma_1 T \bar{N}_2 \quad (3.30)$$

og tilsvarende for den andre likninga. Dette gir gjennomsnittsverdiane:

$$\bar{N}_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad , \quad \bar{N}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \quad . \quad (3.31)$$

Konklusjon: Gjennomsnittsverdiane for bestandane fell saman med likevektsverdiane, og er uavhengige av amplitudane (dvs. uavhengig av startverdiane).

Forskyvningseffekten ved jamn belastning.

Volterra la også merke til følgjande eigenskap: Ved "jamm belastning", t.d. ved jamm jakt eller fangst på eit rovdyr-bytte system, får vi same vekstlover som før, men med nye likevektsverdier. La oss fjerna visse brøkdelar δ_1 og δ_2 per tidseining frå bytte- og predatorbestand, som gir følgjande vekstlover

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2) N_1 - \delta_1 N_1 = (\{\varepsilon_1 - \delta_1\} - \gamma_1 N_2) N_1 \quad (3.32)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 - \delta_2 N_2 = (-\{\varepsilon_2 + \delta_2\} + \gamma_2 N_1) N_2. \quad (3.33)$$

Konklusjon: Dersom $\varepsilon_1 > \delta_1$, vil vi få same vekstlover som før, men med ei *forskyvning* av likevekts-tilstanden, som no er gitt ved:

$$N_1^* = \frac{\varepsilon_2 + \delta_2}{\gamma_2} \quad , \quad N_2^* = \frac{\varepsilon_1 - \delta_1}{\gamma_1} \quad . \quad (3.34)$$

Dersom $\varepsilon_1 \leq \delta_1$, ser ein ut frå likning (3.32) at systemet vil døy ut. Forskyvningseffekten har ei interessant tolking: Jakt (jamm belastning) på predator gir høgare likevektstilstand for bytte-bestanden, mens jakt på byttet gir lågare likevektstilstand for predatorbestanden.

Volterras tre lover:

Volterra formulerte resultatane av analysen i tre lover:

1. *Eksistensen av periodiske svingingar:* Systemet genererer periodiske svingingar. I ein viss tilstand finst likevekt.

2. *Lova om gjennomsnittsverdiane*: Gjennomsnittsverdiane av populasjonane er uavhengige av startverdiane og fell saman med likevektsverdiane

$$\bar{N}_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad , \quad \bar{N}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$$

3. *Lova om forskyvningseffekten*: Dersom faste brøkdeler per tidseining blir fjerna frå dei to populasjonane, slik at $\varepsilon_1 > \delta_1$, så vil gjennomsnittsverdien av populasjonen auka for byttet og minka for predator:

$$N_1^* = \frac{\varepsilon_2 + \delta_2}{\gamma_2} \quad , \quad N_2^* = \frac{\varepsilon_1 - \delta_1}{\gamma_1}$$

Lotka-Volterra modellen kom til å bli ein prototyp for differensiallikningsmodellar i økologi. Ei rekkje analoge modellar og generaliseringar har seinare vore studerte. Lotka og Volterra gav begge viktige bidrag til utviklinga i matematisk økologi. Mellom anna vidareførte Volterra modellen og dei tre lovene til system med fleire enn to artar.

La oss så drøfta realismen i Lotka-Volterras modell. Modellen har vore kritisert som urealistisk både på grunn av form og resultat. Vi kan nemna følgjande veike sider:

- Amplitudane for svingingane er avhengige av startverdiane
- Modellen manglar *intraspesifikke* ledd

At amplitudane er avhengige av startverdiane, er neppe realistisk over tid. Set vi til dømes ut to fiskesortar, ein predator og eit bytte, i eit vatn og 50 år seinare finn periodiske svingingar, så ventar vi ikkje at amplitudane vil avhengja av storleiken på dei opphavelege bestandane.

At modellen manglar intraspesifikke ledd, vil seia at spesifikk vekstrate for kvar av bestandane er *uavhengig* av storleiken på eigen bestand. Dette er ikkje særleg realistisk, til dømes vil byttebestanden veksa eksponentielt når predator er fråverande. Vi vil derfor i neste omgang studera ein modell der vi inkluderer intraspesifikke ledd i likningane og undersøkje om løysingane endrast vesentleg som følge av dette.

Før vi går vidare, er det verdt å sjå nærmare på korleis resultata av Lotka-Volterra modellen stemmer med røyndomen, dvs. med det vi kan observera i naturen. Eksistensen av periodiske svingingar om visse likevektsverdiar er eit faktum, men det er enno eit ope spørsmål i kor stor utstrekning desse i naturlege dyrebestandar skuldast vekselverknad mellom bytte og predator. Derimot kan svingingar av denne typen skapast i laboratorieforsøk.

Dei første laboratorieeksperimenta for å verifisera ulike modellar i populasjonsøkologi vart utført i 1930-åra av den russiske biologen G. F. Gause [9]. Men han lukkast ikkje i å få til svingingar i eit system av bytte og predator

utan inngrep i systemet. Årsaka til at forsøket mislukkast på dette punktet, var truleg at systema var for små og homogene. Ved å nytta meir kompliserte system har ein seinare lukkast i å få til svingingar. Eit kjent eksperiment vart utført av Huffaker [10] i 1958 med to sortar midd på appelsinar.

Forskyvningseffekten (Volterras 3.lov) var i røynda eit av utgangspunkta for Volterra sine undersøkingar i matematisk økologi. Zoologen D'Ancona hadde studert data frå fiskemarknadene i byane Fiume, Trieste og Venezia. Han fann at under og like etter første verdskrigen, då fangsten var sterkt redusert, hadde bestanden av rovfisk (artar på toppen av næringsnettet) auka til det dobbelte. Dette forholdet var i samsvar med den matematiske teorien, og stimulerte Volterra til å undersøkje meir generelle modellar. Seinare data viser riktig nok at den reduserte fangsten under første verdskrig ikkje kan vera noka fullgod forklaring på forskyvninga, då det førekjem kraftige toppar i predatorbestanden også utan redusert fangst.

Ein annan situasjon som viser verknaden av forskyvningslova i praksis, viser seg ved bruk av pestmiddel mot skadeinsekt. Dersom skadeinsektet har ein naturleg predator som også vert angripen av pestmiddelet, kan resultatet bli at bestanden av skadeinsektet aukar i staden for å minka. Eitt eksempel er nemnt i McArthur & Connell [11], sjå også Kormody [12]. Insektet *Icerya purchasi* vart tilfeldig innført i California frå Australia i 1868, og truga med å øydeleggja den amerikanske sitrusindustrien. For å motverka dette vart insektets naturlege australske predator, billa *Novius cardinalis* innført, noko som heldt insektbestanden på eit lågt nivå. Etter oppdaginga av pestmiddelet DDT vart også dette nytta for å utrydda insektet. Resultatet vart derimot ein auke av insektbestanden. Eit liknande eksempel frå California med ein jordbærmidd og ein predatormidd på denne er nemnt i Fenchel [13].

Det er overraskande at den enkle Lotka-Volterra modellen gir så riktig og uventa resultat når det gjeld fenomenet *økologisk balanse*.

3.4 Dempa svingingar. Generalisering av Lotka-Volterras modell

Ei veik side ved Lotka-Volterra modellen er at han manglar intraspesifikke ledd. Ein populasjon har dermed ingen innverknad på eigen spesifikke vekstrate. Under visse vilkår er dette urealistisk. Lotka generaliserte modellen ved å introdusera ekstra ledd i likningane slik at kvar av bestandane hemmar eigen vekst. Modellen vart seinare analysert av Volterra i meir generell form for n artar. I den endra modellen er likningane gitt på følgjande form

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 (1 - aN_1 - bN_2) && \text{(bytte)} \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 (-1 + cN_1 - dN_2) && \text{(predator)} \end{aligned} \tag{3.35}$$

der parametrane a , b , c , d , r_1 , r_2 er positive konstantar.

Merknader:

- Ved å setja $a = d = 0$, får vi Lotka-Volterras likningar, der $r_1 = \varepsilon_1$, $r_2 = \varepsilon_2$, $r_1 b = \gamma_1$ og $r_2 c = \gamma_2$.
- Dei spesifikke vekstratane er lineære funksjonar av storleikane på populasjonane. Dette er enklast mogeleg generalisering av Lotka-Volterra modellen.
- Koeffisientane a og d er mål for kor sterkt populasjonane hemmar veksten av eigen art, mens koeffisientane b og c er mål for vekselverknaden mellom artane.

Systemet har fire likevektstilstandar: $(0, 0)$, $(0, -1/d)$, $(1/a, 0)$ og (N_1^*, N_2^*) , der

$$N_1^* = \frac{b+d}{ad+bc} \quad , \quad N_2^* = \frac{c-a}{ad+bc} \quad . \quad (3.36)$$

Likevektsstillinga $(0, -1/d)$ har inga biologisk tolking, mens (N_1^*, N_2^*) har tolking når $a \leq c$.

Vi drøfter så stabiliteten til dei tre aktuelle likevektspunkta. Ein slik analyse gir faseportrett som er vesentleg forskjellig frå det vi fekk for Lotka-Volterra modellen, figur 3.7. La oss først finna Jacobi-matrisa A for dei aktuelle likevektstilstandane:

$$F(N_1, N_2) = r_1 N_1 - r_1 a N_1^2 - r_1 b N_1 N_2, \quad (3.37)$$

$$G(N_1, N_2) = -r_2 N_2 + r_2 c N_1 N_2 - r_2 d N_2^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_1} = r_1 - 2r_1 a N_1 - r_1 b N_2, \quad \frac{\partial F}{\partial N_2} = -r_1 b N_1 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial G}{\partial N_1} = r_2 c N_2, \quad \frac{\partial G}{\partial N_2} = -r_2 + r_2 c N_1 - 2r_2 d N_2 \quad (3.39)$$

Sidan funksjonane F og G er polynom, vil systemet (3.35) vera *nesten-lineært* om alle likevektspunkt. Dermed vil forteiknet til realdelen til eigenverdiane avgjera stabiliteten.

Likevektstilstand I, $N_1 = N_2 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{pmatrix},$$

der eigenverdiane er $\lambda_1 = r_1 > 0$, $\lambda_2 = -r_2 < 0$. Dette viser at likevektspunktet er eit *sadelpunkt* og likevektstilstanden er dermed *ustabil*.

For den lineære approksimasjonen til systemet (3.35) kan vi dra følgjande konklusjon: Ved små startverdiar vil $N_1 \rightarrow \infty$ og $N_2 \rightarrow 0$ (predator dør ut) når $t \rightarrow \infty$.

Når det gjeld den ikkje-lineære modellen, kan ein visa at $N_1 \rightarrow 1/a$, $N_2 \rightarrow 0$ når $a > c$ og $t \rightarrow \infty$, og $N_1 \rightarrow N_1^*$, $N_2 \rightarrow N_2^*$ når $a < c$ og $t \rightarrow \infty$. Lag skisser og illustrer dei to tilfella.

Likevektstilstand II, $N_1 = 1/a$, $N_2 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -r_1 & -br_1/a \\ 0 & (c/a - 1)r_2 \end{pmatrix},$$

der eigenverdiane er $\lambda_1 = -r_1 < 0$, $\lambda_2 = (c/a - 1)r_2$.

Likevektspunktet er eit *sadelpunkt* når $a < c$ og eit *stabilt knutepunkt* når $a > c$. Dermed er likevektstilstanden *ustabil* når $a < c$ og *asymptotisk stabil* når $a > c$. Lag skisser og illustrer dei to tilfella.

Likevektstilstand III, $N_1 = N_1^*$, $N_2 = N_2^*$, og $a < c$:

$$A = \begin{pmatrix} -ar_1N_1^* & -br_1N_1^* \\ cr_2N_2^* & -dr_2N_2^* \end{pmatrix},$$

der eigenverdiane λ_1 , λ_2 oppfyller følgjande relasjonar:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trase } A = -(ar_1N_1^* + dr_2N_2^*) < 0, \quad (3.40)$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \det A = (ad + bc)r_1r_2N_1^*N_2^* > 0,$$

og diskriminanten $D = \{\text{trase } A\}^2 - 4\det A$.

Vi får to moglege tilfelle, anten

1. $D \geq 0$, som gir to reelle eigenverdiar, begge negative, altså eit *stabilt knutepunkt* når $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dvs. $D > 0$, og eit *stabilt knutepunkt* eller *spiralpunkt* når $\lambda_1 = \lambda_2$, dvs. $D = 0$,

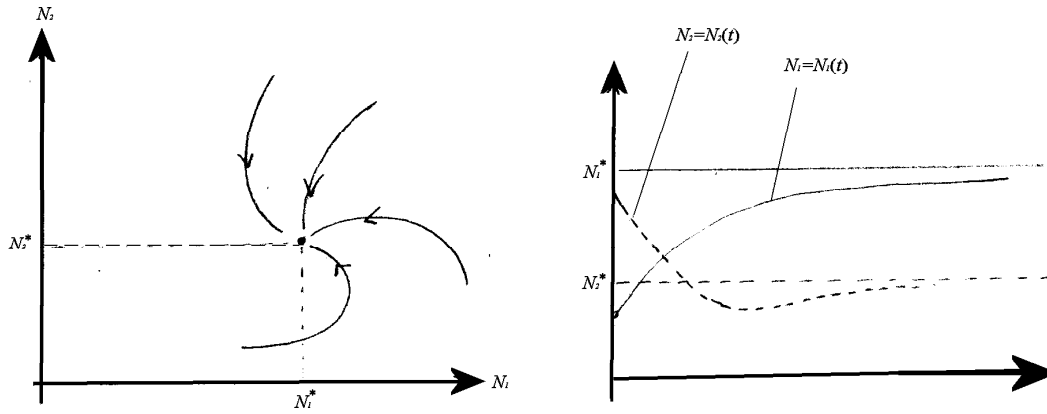
eller

2. $D < 0$, som gir to kompleks konjugerte eigenverdiar, med negative realdelar. Dette svarar til eit *stabilt spiralpunkt*.

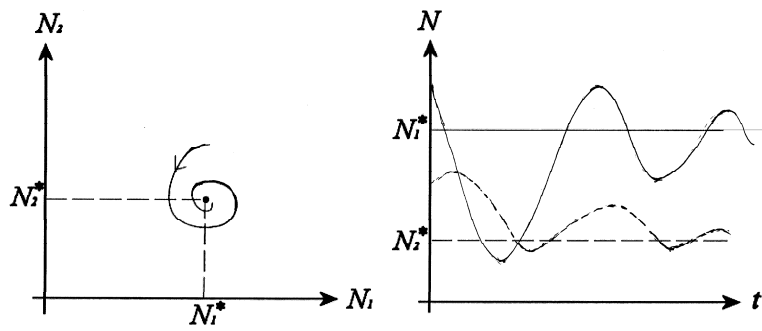
I begge tilfelle er likevektstilstanden *asymptotisk stabil*, sjå figur 3.9 ($D > 0$) og figur 3.10 ($D < 0$).

I tilfellet 1, $D > 0$, vil integralkurva i faseplanet konvergera mot likevektspunktet etter ingen eller endeleg mange omløp.

Det følgjer frå likningane (3.40) at vi får tilfellet 2, $D < 0$, når dempingskoeffisientane a og d er tilstrekkeleg små, dvs. med ein modell nær Lotka-Volterra modellen. Dette svarar til *dempa* svingingar om likevektspunktet (integralkurva har uendeleg mange omløp).



Figur 3.9: Tilfellet $D > 0$: Stabilt knutepunkt.



Figur 3.10: Tilfellet $D < 0$: Stabilt spiralknutepunkt.

Lotka oppfatta modellen (3.35) som ein meir eksakt modell enn (3.17) for eit bytte-predator forhold. Løysingane i dei to modellane minner om skilnaden mellom den matematiske pendelen, utan friksjon, og den fysiske, meir realistiske pendelen med friksjon. Dei veksthemmande ledda $-r_1aN_1^2$, $-r_2dN_2^2$ i likningane (3.35) spelar rollen som friksjonsledd. Denne analogien mellom økologiske og mekaniske system blir særleg utdjupa i arbeid av Volterra.

Ein uheldig eigenskap ved Lotka-Volterras modell kjem til synes ved analysen av den generaliserte modellen (3.35). Ved å gjera vilkårleg små endringar i den første modellen, dvs. ved å introdusera vilkårleg små dempingskoeffisientar a og d , oppnår vi den andre. Men faseportrettet til modellane (3.17) og (3.35) er kvalitativt forskjellige (dvs. topologisk forskjellige) i ei omegn om likevektspunktet (N_1^*, N_2^*) . Dette betyr at Lotka-Volterras modell ikkje er *strukturelt stabil* i det tilsvarande likevektspunktet. På den andre sida vil ei tilstrekkeleg lita endring av den generaliserte modellen (3.35) ikkje endra kvaliteten av faseportrettet omkring likevektspunktet (N_1^*, N_2^*) , sidan vi framleis vil få to eigenverdiar λ_1, λ_2 med negativ realdel i (N_1^*, N_2^*) . Den generaliserte modellen er derfor strukturelt stabil i (N_1^*, N_2^*) .

Det vil alltid vera ein viss usikkerhet i samband med empiriske observasjonar. Derfor er det ikkje mogeleg på grunnlag av målingar å bestemma parametrane i ein modell heilt eksakt. Kvalitative resultat som ikkje blir bevart ved tilstrekkeleg små endringar av modellen, er derfor urealistiske. Av denne grunn ser vi på strukturell ustabilitet som eit uheldig trekk ved ein matematisk modell som skal beskriva empiriske forhold. Dette er ein grunn til å føretrekkja modellen (3.35) framfor (3.17). Men den generaliserte modellen (3.35) kan ikkje beskriva permanente, udempa populasjonssvingingar, som opphavelig var målet. Det beste vi kan få til med modellen (3.35) er ei demping som er så liten at løysinga i praksis ter seg som permanente svingingar. Som vi skal sjå i eit seinare avsnitt, finst det ein meir innfløkt modell, innført av Kolmogoroff, som gir meir realistiske resultat.

3.5 Konkurrerende artar – Eksklusjonsprinsippet

Ein situasjon som er minst like vanleg som eit rovdyr-bytte forhold, er konkurranse mellom artar om dei same ressursane. Volterra studerte allereie i 1926-1927 ein modell der to artar tevlar om ein og same livsnødvendige ressurs. La oss analysera denne modellen.

Vi studerer vekselverknaden mellom to artar som tevlar om ein enkelt livsnødvendig ressurs, til dømes beite, lys til fotosyntese, og liknande. Artane lever i same økologiske nisje, dvs. i same geografiske område, med same matforråd og har same busetting. Det vil seia at dei utnyttar omgivnaden på same måte. Vi gjer følgjande føresetnader:

- Ressursen blir tilført systemet med jamn fart

- Ressursen forsvinn utan å lagrast (om han er ubrukt)

La $N_1 = N_1(t)$ vera talet på individ, h_1 forbruksrate per individ og L_1 berekapasitet for art 1, og tilsvarende for art 2. Vi har då følgjande storleikar:

- $h_1N_1 + h_2N_2$: Total forbruksrate,
- $L_1 - (h_1N_1 + h_2N_2)$: "Ledig livsrom" for art 1, jamfør logistisk vekst,
- $L_2 - (h_1N_1 + h_2N_2)$: "Ledig livsrom" for art 2.

I analogi med logistisk vekst, antar vi følgjande hypotesar (vekstlover):

$$\begin{aligned}\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} &= c_1 [L_1 - (h_1N_1 + h_2N_2)] \\ \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} &= c_2 [L_2 - (h_1N_1 + h_2N_2)]\end{aligned}\tag{3.41}$$

der $c_1, c_2, h_1, h_2, L_1, L_2$ alle er positive konstantar. Dette gir likningane

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1N_1 \left(1 - \frac{h_1N_1+h_2N_2}{L_1}\right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= r_2N_2 \left(1 - \frac{h_1N_1+h_2N_2}{L_2}\right)\end{aligned}\tag{3.42}$$

der konstantane $r_1 = c_1L_1$ og $r_2 = c_2L_2$. Er begge bestandane tilstrekkeleg små, veks N_1 og N_2 med tilnærma spesifikke vekstratar r_1 og r_2 .

Systemet (3.42) har tre likevektstilstandar når $L_1 \neq L_2$, desse er $(0, 0)$, $(L_1/h_1, 0)$ og $(0, L_2/h_2)$. Grensetilfellet $L_1 = L_2$ er uaktuelt i vårt problem.

Vi drøfter så stabiliteten til likevektspunkta. Denne analysen vil gi svar på utfallet av konkurransen mellom dei to artane, nemleg at berre éin vil overleva.

La oss først finna Jacobi-matrissa A for dei aktuelle likevektstilstandane:

$$\begin{aligned}F(N_1, N_2) &= r_1N_1 - \frac{r_1h_1}{L_1}N_1^2 - \frac{r_1h_2}{L_1}N_1N_2 \\ G(N_1, N_2) &= r_2N_2 - \frac{r_2h_1}{L_2}N_1N_2 - \frac{r_2h_2}{L_2}N_2^2\end{aligned}\tag{3.43}$$

$$\frac{\partial F}{\partial N_1} = r_1 - 2\frac{r_1h_1}{L_1}N_1 - \frac{r_1h_2}{L_1}N_2 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial N_2} = -\frac{r_1h_2}{L_1}N_1\tag{3.44}$$

$$\frac{\partial G}{\partial N_1} = -\frac{r_2h_1}{L_2}N_2 \quad \frac{\partial G}{\partial N_2} = r_2 - \frac{r_2h_1}{L_2}N_1 - 2\frac{r_2h_2}{L_2}N_2\tag{3.45}$$

Sidan funksjonane F og G er polynom, er systemet (3.42) *nesten-lineært* om alle likevektspunkt. Alle eigenverdiane er reelle, dermed vil forteiknet avgjera stabiliteten.

Likevektstilstand I, $N_1 = N_2 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix},$$

der eigenverdiane er $\lambda_1 = r_1 > 0$, $\lambda_2 = r_2 > 0$.

Likevektspunktet er eit *ustabilt knutepunkt* og likevektstilstanden er dermed *ustabil*. Dette er i samsvar med at begge artane vil veksa tilnærma eksponentielt nær origo, dvs. når bestandane er tilstrekkeleg små.

Likevektstilstand II, $N_1 = L_1/h_1, N_2 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_1 h_2/h_1 \\ 0 & r_2(1 - L_1/L_2) \end{pmatrix},$$

der eigenverdiane er $\lambda_1 = -r_1 < 0$, $\lambda_2 = r_2(1 - L_1/L_2)$.

Vi får ulike utfall alt ettersom $L_1 > L_2$ eller $L_1 < L_2$:

(i) $L_1 > L_2$ gir *stabilt knutepunkt*, og dermed er likevektstilstanden *asymptotisk stabil* og

(ii) $L_1 < L_2$ gir *sadelpunkt*, som svarar til *ustabil* likevektstilstand. Nær likevektspunktet vil $N_1 \rightarrow L_1/h_1$, $N_2 \rightarrow 0$ (døy ut) når $L_1 > L_2$, mens (N_1, N_2) vil fjerna seg frå likevektspunktet når $L_1 < L_2$. Lag ei skisse.

Likevektstilstand III, $N_1 = 0, N_2 = L_2/h_2$:

$$A = \begin{pmatrix} r_1(1 - L_2/L_1) & 0 \\ -r_2 h_1/h_2 & -r_2 \end{pmatrix},$$

der eigenverdiane er $\lambda_1 = r_1(1 - L_2/L_1)$, $\lambda_2 = -r_2 < 0$.

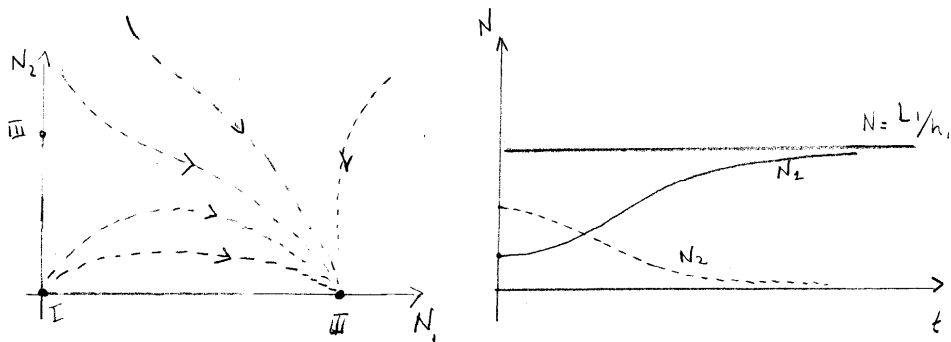
Vi får igjen to ulike utfall:

(i) $L_1 > L_2$ gir *sadelpunkt*, som svarar til *ustabil* likevektstilstand, og

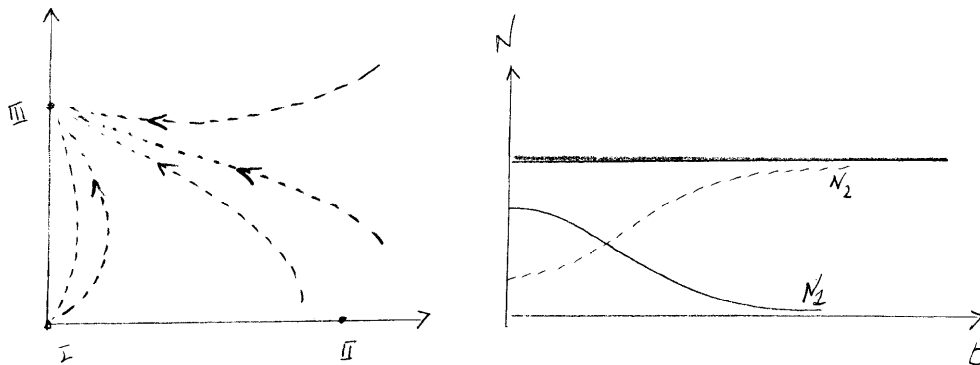
(ii) $L_1 < L_2$ gir *stabilt knutepunkt*, og dermed er likevektstilstanden *asymptotisk stabil*. Punktet (N_1, N_2) vil fjerna seg frå likevektspunktet når $L_1 > L_2$, mens $N_1 \rightarrow 0$, $N_2 \rightarrow L_2/h_2$ når $L_1 < L_2$. Lag ei skisse.

På bakgrunn av denne stabilitetsanalysen kan vi no skissera faseportrettet i grove trekk. Figur 3.11 viser denne skissa.

1. $L_1 > L_2$. Berekapasitet til art 1 > berekapsitet til art 2.



2. $L_1 < L_2$. Berekapasitet til art 1 < berekapsitet til art 2.



Figur 3.11: Ein skisse av faseportrett og integralkurver i N, t -planet for tilfella $L_1 > L_2$ og $L_1 < L_2$.

Den endelege konklusjonen er at berre ein av artane kan overleva, nemleg den som har størst berekapasitet. Dette er det såkalla økologiske *eksklusjon-sprinsippet* (Volterra-Gause):

- Dersom to artar konkurrerer om ein enkelt, livsnødvendig ressurs, vil berre den eine av artane overleva.

Alternativ formulering:

- To artar kan ikkje okkupera same økologiske nisje.

Dette prinsippet er ein fruktbar arbeidshypotese, og er understøtta av ei rekkje økologiske studium og forsøk. Den russiske biologen Gause gjennomførde i 1934 til dømes ein serie klassiske laboratorieforsøk med mikroorganismar og fann at av to artar i konkurranse om næring vil berre éin overleva.

Jamn innhausting (jakt/belastning).

Eit interessant punkt i samband med modellen (3.42) er å undersøkje kva som skjer dersom systemet blir utsett for jamn innhausting. La ein fast brøkdel p per tidseining bli fjerna frå kvar av populasjonane. Vi kan til dømes tenkja oss at populasjonane blir angripne av rovdyr som ikkje skil mellom artane eller naturleg transport ut av systemet. Dette gir likningane:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_i} \frac{dN_i}{dt} &= r_i \left(1 - \frac{h_1 N_1 + h_2 N_2}{L_i} \right) - p \\ &= (r_i - p) \left(1 - \frac{h_1 N_1 + h_2 N_2}{(1-p/r_i)L_i} \right), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dette gir likningar av same form som (3.42) der:

$$r'_i = r_i - p > 0, \quad L'_i = (1 - p/r_i)L_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.47)$$

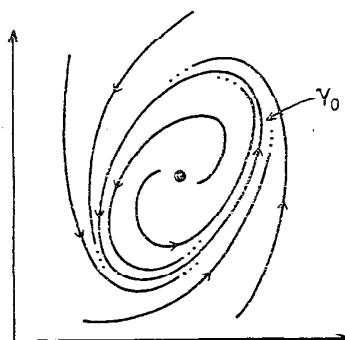
Dersom $L_1 > L_2$, mens $L'_1 < L'_2$, så skifter utfallet av kampen frå situasjonen

”Art 1 overlever og art 2 dør ut” til situasjonen ”Art 2 overlever og art 1 dør ut”.

Dette er til dømes tilfelle når $L_1/L_2 = 10/9$, $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.4$ og $p = 0.1$; vis det.

3.6 Modellar med grensesyklar - Kolmogoroffs modell

Lotka-Volterras modell gav stabile, periodiske svingingar i bytte- og rovdyrbestandar som lever i vekselverknad med kvarandre, slik vi kan observera



Figur 3.12: Stabil grensesykel

i naturen. Men amplitudane i desse svingingane var avhengige av initialtilstanden, dvs. startverdiane for bestandane. Dette er vanlegvis ikkje særleg realistisk. La oss til dømes gjera følgjande tankeeksperiment: Vi set ut to sortar fisk i eit vatn eller ein innsjø, der den eine fiskesorten lever av den andre, slik at vi får eit bytte-rovdyr system. Om ein kjem tilbake 100 år seinare og observerer periodiske svingingar, ville det vera urimeleg å tru at storleikane på amplitudane i desse svingingane skuldast storleiken på dei opphavslege fiskebestandane. Vi må anta at amplitudane på same måten som svingetida, ville vera bestemt av biologiske eigenskapar hos dei to artane og fysiske parametarar i miljøet.

Svingingar av den siste typen kan skildrast i matematisk form av ein såkalla *stabil grensesykel*. Dette er per definisjon ei lukka integralkurve (trajektorie) γ_0 for eit dynamisk system slik at alle integralkurver γ med initialtilstand tilstrekkeleg nær γ_0 , konvergerer mot γ_0 når $t \rightarrow \infty$. Omgrepet vart innført i 1881 av den franske matematikaren Henri Poincaré, ein av pionerane innan stabilitetsteori. Figur 3.12 illustrerer ein stabil grensesykel i eit to-dimensjonalt faseportrett. Integralkurver nær sykelen vil her gå i spiral inn mot eller ut mot sykelen. Vi ser at ein slik grensesykel vil representera ei periodisk svinging med den eigenskapen at om systemet blir forskyvd bort frå grensesykelen, til ein nærliggjande tilstand, så vil det etter ei viss tid igjen svinga praktisk talt på sykelen. Både svingetid og amplitude er derfor i det lange løp uavhengige av initialtilstanden (startverdiane), så sant denne ligg tilstrekkeleg nær. Dette er nettopp det vi ynskjer av ein realistisk modell for eit permanent svingefenomen i eit økologisk system.

I økologisk samanheng vart stabile grensesyklar først studert av Volterra, som i 1927 viste at modellen (3.17) med innlagd tidsforseinking kan føra til slike syklar. I 1936 viste den kjende russiske matematikaren A. Kolmogoroff [14] at også ein rein differensiallikningsmodell for eit bytte-rovdyr system kan resultera i stabile grensesyklar. Kolmogoroffs modell har stor interesse av fleire grunnar: Ein oppnår resultat ut frå ganske svake, kvalitative føresetnader om dei spesifikke vekstratane til dei to artane, og dessutan er det den første av ein viss type økologiske modellar som fører til grensesyklar.

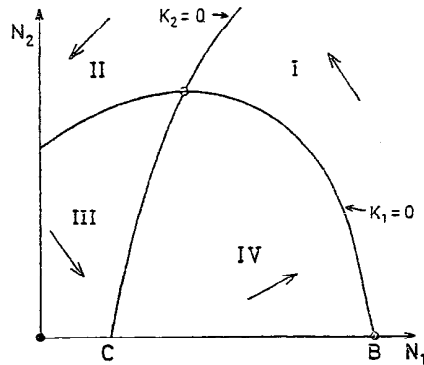
Kolmogoroffs differensiallikningar er

$$\frac{dN_1}{dt} = K_1(N_1, N_2)N_1 \text{ (bytte)}, \quad \frac{dN_2}{dt} = K_2(N_1, N_2)N_2 \text{ (predator)} \quad (3.48)$$

der dei spesifikke vekstratane K_1 for byttet og K_2 for predator er gitt som funksjonar av N_1 og N_2 , dvs. av talet på individ i populasjonane. Vi innfører så retningsderiverte: Viss S er retninga frå origo til punktet (N_1, N_2) , er $\frac{dK_1}{ds}$ og $\frac{dK_2}{ds}$ dei retningsderiverte av K_1 og K_2 i retninga S . Kolmogoroff stilte opp følgjande hypotesar om dei spesifikke vekstratane:

1. $\frac{\partial K_1}{\partial N_2} < 0$. Veksten i byttebestanden minkar med aukande predatorbestand.
2. $\frac{dK_1}{ds} < 0$. For eit fast forhold mellom predator og bytte vil veksten i byttebestanden minka med aukande populasjonar.
3. $K_1(0, 0) > 0$. Når begge bestandane er tilstrekkeleg små, vil byttebestanden auka.
4. Det eksisterer ein $A > 0$ slik at $K_1(0, A) = 0$. For ein høveleg stor predatorbestand $N_2 = A$ vil sjølv ein liten byttebestand stagnera.
5. Det eksisterer ein $B > 0$ slik at $K_1(B, 0) = 0$. Utan predator stagnerer byttebestanden for $N_1 \geq B$.
6. $\frac{\partial K_2}{\partial N_2} < 0$. Med ein gitt byttebestand (dvs. gitt matforråd) vil veksten i predatorbestanden minka dess fleire predatorar det er.
7. $\frac{dK_2}{ds} > 0$. For eit fast forhold mellom predator og bytte vil veksten i predatorbestanden auka med aukande bestandar.
8. Det eksisterer ein $C > 0$ slik at $K_2(C, 0) = 0$. For tilstrekkeleg liten byttebestand vil sjølv ein liten predatorbestand stagnera.

Vi må anta at $C < B$, elles vil predatorane døy ut. Av vilkåra 1-5 følgjer det at nullkurva $K_1 = 0$ kan skrivast som eit grafisk bilde av forma $N_2 = f(N_1)$ for $0 \leq N_1 \leq B$. Tangenten har ei stigning mindre enn radius vektor. Analogt får vi frå vilkåra 6-8 at nullkurva $K_2 = 0$ kan skrivast



Figur 3.13: Nullkurver og retningsdiagram for modell av Kolmogoroffs type.

på forma $N_2 = g(N_1)$ for $C \leq N_1 < D$ (eventuelt ∞). Tangenten har ei stigning større enn radius vektor. Dei to nullkurvene skjer kvarandre i eitt punkt og deler første kvadrant i fire område som vist i figur 3.13.

Likevektspunkta er:

- (i) $(0,0)$,
- (ii) $(B, 0)$, skjeringspunktet mellom aksa $N_2 = 0$ og nullkurva $K_1 = 0$,
og
- (iii) (N_1^*, N_2^*) , skjeringspunktet mellom nullkurvene $K_1 = 0$ og $K_2 = 0$.

Vi skal visa analytisk at dei to første likevektspunkta er *sadelpunkt*.

Dei fire områda er karakterisert ved:

- I $K_1 < 0$, $K_2 > 0$ etter vilkåra 3 og 6,
- II $K_1 < 0$, $K_2 < 0$ etter vilkåra 3 og 6,
- III $K_1 > 0$, $K_2 < 0$,
- IV $K_1 > 0$, $K_2 > 0$.

I eit gitt punkt er dN_1/dt og dN_2/dt komponentane til tangentvektoren til ei integralkurve. Retninga til kurva er dermed bestemt ut frå forteiknet på K_1 og K_2 , jamfør likning (3.48), og er vist på figur 3.13. Ein enkel *grafisk analyse* gir følgjande informasjon om faseportrettet:

Nær punktet $(B, 0)$ startar ei eintydig integralkurve γ med retning inn i området I. Av forteiknet på dN_1/dt og dN_2/dt følgjer det at kurva går gjennom dei fire områda I-IV i syklisk rekkjefølgje. Sidan likevektspunkta $(0, 0)$ og $(B, 0)$ er sadelpunkt, har vi berre tre mogelege tilfelle:

- a) γ konvergerer mot (N_1^*, N_2^*) etter endeleg mange omløp, dvs. eit *stabilt knutepunkt*,
- b) γ konvergerer mot (N_1^*, N_2^*) etter uendeleg mange omløp, dvs. eit *stabilt spiralpunkt*,
- c) γ konvergerer mot ein *grensesykel* γ_0 som omsluttar (N_1^*, N_2^*) .

Dei tre ulike tilfella er illustrerte i figur 3.16.

I tilfelle c) kan ei integralkurve med startpunkt innanfor grensesykel γ_0 ha ein ha ulike forløp: Ei slik kurve kan vera identisk med likevektspunktet, konvergera mot dette, vera ei lukka integralkurve, eller konvergera mot ei lukka integralkurve. I det typiske tilfellet vil det berre finnast endeleg mange lukka integralkurver. Likevektspunktet (N_1^*, N_2^*) må då anten vera asymptotisk stabilt, eller minst éi av dei lukka integralkurvane må vera ein stabil grensesykel.

La oss så gjennomføra ei *analytisk drøfting* av stabiliteten av likevektspunkta. Vi reknar ut Jacobi-matrisa A for desse ut frå systemet (3.48):

$$F(N_1, N_2) = K_1(N_1, N_2)N_1 \quad , \quad G(N_1, N_2) = K_2(N_1, N_2)N_2 \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial N_1} &= \frac{\partial K_1}{\partial N_1} N_1 + K_1, & \frac{\partial F}{\partial N_2} &= \frac{\partial K_1}{\partial N_2} N_1, \\ \frac{\partial G}{\partial N_1} &= \frac{\partial K_2}{\partial N_1} N_2, & \frac{\partial G}{\partial N_2} &= \frac{\partial K_2}{\partial N_2} N_2 + K_2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

(i) Likevektspunktet $(0, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} K_1(0, 0) & 0 \\ 0 & K_2(0, 0) \end{pmatrix},$$

og eigenverdiane er: $\lambda_1 = K_1(0, 0) > 0$, $\lambda_2 = K_2(0, 0) < 0$. Likevektspunktet er eit *sadelpunkt*, og dermed *ustabilt*.

(ii) Likevektspunktet $(B, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial N_1}(B, 0)B & \frac{\partial K_1}{\partial N_2}(B, 0)B \\ 0 & K_2(B, 0) \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = \frac{\partial K_1}{\partial N_1}(B, 0)B < 0, \quad \lambda_2 = K_2(B, 0) > 0.$$

Likevektspunktet er eit *sadelpunkt*, og dermed *ustabilt*.

(iii) Likevektspunktet (N_1^*, N_2^*) :

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial K_1}{\partial N_1}\right)^* N_1^* & \left(\frac{\partial K_1}{\partial N_2}\right)^* N_1^* \\ \left(\frac{\partial K_2}{\partial N_1}\right)^* N_2^* & \left(\frac{\partial K_2}{\partial N_2}\right)^* N_2^* \end{pmatrix},$$

sidan $K_1 = K_2 = 0$ i dette punktet.

Eigenverdiane λ_1 og λ_2 oppfyller følgjande likningar:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A = N_1^* N_2^* \left\{ \left(\frac{\partial K_1}{\partial N_1}\right)^* \left(\frac{\partial K_2}{\partial N_2}\right)^* - \left(\frac{\partial K_1}{\partial N_2}\right)^* \left(\frac{\partial K_2}{\partial N_1}\right)^* \right\} \quad (3.51)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trase } A = \left\{ \left(\frac{\partial K_1}{\partial N_1}\right)^* N_1^* + \left(\frac{\partial K_2}{\partial N_2}\right)^* N_2^* \right\}. \quad (3.52)$$

Frå eigenskapane 1 og 6 følgjer det at $\left(\frac{\partial K_1}{\partial N_2}\right)^* < 0$ og $\left(\frac{\partial K_2}{\partial N_2}\right)^* < 0$. Eigenskap 7 gir at

$$\frac{dK_2}{ds} = \mathbf{n} \cdot \nabla K_2 = \frac{1}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2}} \left\{ \frac{\partial K_2}{\partial N_1} N_1 + \frac{\partial K_2}{\partial N_2} N_2 \right\} > 0, \quad (3.53)$$

som så medfører at $\left(\frac{\partial K_2}{\partial N_1}\right)^* > 0$.

Ut frå dette kan vi dra følgjande konklusjonar om stabiliteten til likevektspunktet (N_1^*, N_2^*) :

- Dersom $\left(\frac{\partial K_1}{\partial N_1}\right)^* < 0$, følgjer det at $\lambda_1 \lambda_2 = \det A > 0$ og $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trase } A < 0$. Dette gir *stabilt knutepunkt* (når eigenverdiane er reelle) eller *stabilt spiralpunkt* (når eigenverdiane er kompleks konjugerte).
- Eit nødvendig vilkår for *ustabilitet* er at $\left(\frac{\partial K_1}{\partial N_1}\right)^* > 0$. Dette er dermed eit nødvendig vilkår for at det skal eksistera ein *grensesykel* som omsluttar likevektspunktet.

Nullkurva $K_1 = 0$ har stigninga $-\left(\frac{\partial K_1}{\partial N_1}\right)^* / \left(\frac{\partial K_1}{\partial N_2}\right)^*$ i likevektspunktet. Sidan $\left(\frac{\partial K_1}{\partial N_2}\right)^* < 0$, må nullkurva vera strengt aukande i dette punktet for å oppnå ustabil likevekt.

3.7 Appendix: Om stabilitet - Viktige resultat

I studiet av matematiske modellar i økologi, gjer vi bruk av stabilitetsteori for ordinære differensiallikningar. Det blir gitt ei elementær innføring i stabilitetsteori i emnet *MA-203 Differensiallikningar*, eit emne som er obligatorisk både for bachelorstudiet i matematikk og det 5-årige masterstudiet i matematikkdiraktikk. Kurset dekkjer godt den stabilitetsteorien vi treng for dei modellane vi analyserer i økologi. I dette appendikset gir vi ei kort oppsummering av nyttige definisjonar og teorem om stabilitet, samt nokre eksempel. Ei innføring i dette stoffet finn ein i Boyce and Di Prima, [15]

(i) Første ordens likningar

Ei førsteordens, ordinær differensiallikning kan skrivast på forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \text{ der } t \text{ er uavhengig variabel, og } x \text{ er avhengig variabel.}$$

Dersom funksjonen f ikkje er eksplisitt avhengig av t , kallast likninga *autonom*, og har forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \text{ der } F \text{ er ein differensierbar funksjon.} \quad (3.54)$$

I matematiske modellar er likningane vanlegvis autonome.

Definisjon 1

Løysinga $x = x_e$ (konstant), der $F(x_e) = 0$, kallast ei *likevektsløysing* for likning (3.54).

Eksempel 1

1. Likninga $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2$ har likevektsløysingane: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
2. Likninga $\frac{dx}{dt} = x(1 - x^3)$ har likevektsløysingane: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

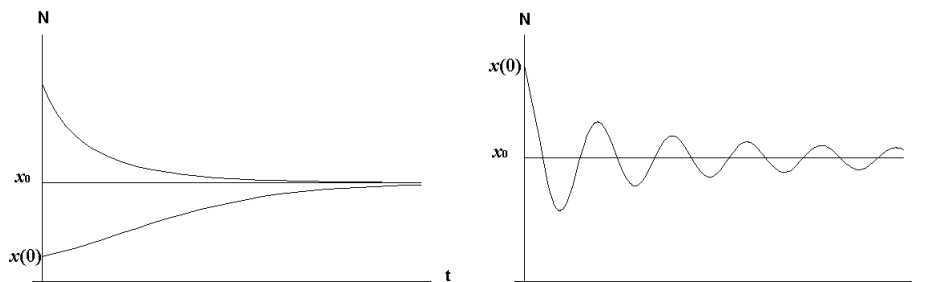
Grafen til ei løysing kallast ei *integralkurve*, og grafen til ei likevektløysing er dermed ei rett, horisontal linje i t, x -planet.

Definisjon 2

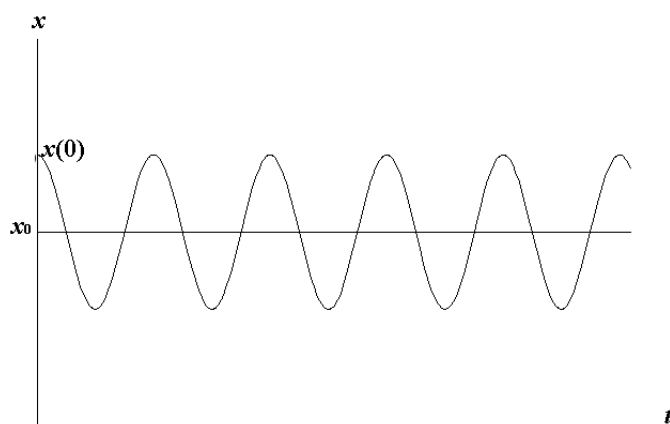
Ei likevektsløysing $x = x_e$ kallast *asymptotisk stabil* dersom $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ for alle løysingar som ligg tilstrekkeleg nær x_e ved $t = 0$.

Definisjon 3

Ei likevektsløysing $x = x_e$ kallast *stabil* dersom alle løysingar $x(t)$ som oppfyller kravet $x(0)$ nær x_e også oppfyller kravet $x(t)$ nær x_e for alle $t > 0$.



Figur 3.14: To eksempel der likevektsløysinga er asymptotisk stabil.



Figur 3.15: Eit eksempel der likevektsløysinga er stabil (utan å vera asymptotisk stabil).

Eksempel 2

Gitt likninga $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x$, der $x_e = 0$ er likevektsløysing. Den generelle løysinga til likninga er $x(t) = ce^{-(1/2)t}$, der c er ein konstant. Dette gir at $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ for alle c , og dermed er $x_e = 0$ *asymptotisk stabil*.

Eksempel 3

Gitt startverdiproblemet: $\frac{dx}{dt} = a(x - 1)$, $x(0) = x_0$, der $a \neq 0$ er ein reell konstant. $x = 1$ er ei likevektsløysing.

Løysinga av startverdiproblemet er: $x(t) = (x_0 - 1)e^{at} + 1$. Vi får to tilfelle:

- (i) $a < 0$: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$ for alle x_0 , og $x = 1$ er *asymptotisk stabil*.
- (ii) $a > 0$: $x_0 > 1 \Rightarrow x(t) \rightarrow +\infty$ når $t \rightarrow \infty$, og $x_0 < 1 \Rightarrow x(t) \rightarrow -\infty$ når $t \rightarrow \infty$. Likevektsløysinga $x = 1$ er *ustabil*.

Merknad 1

I desse eksempla fann vi den generelle løysinga til ei likning, eller løyste eit generelt startverdiproblem, for så å avgjera stabiliteten til ei likevektsløysing. Stabilitetsanalysen er då enkel. Allment er vi ikkje i stand til å løysa analytisk ei førsteordens differensiallikning. Derfor treng vi generelle stabilitetsteorem.

Teorem 1. Stabilitetsteorem for første ordens likningar

$\frac{dx}{dt} = F(x)$, der $x = x_e$ er ei likevektsløysing; $F(x_e) = 0$.

Dersom

- (a) $F'(x_e) > 0$, er $x = x_e$ *ustabil*, og
- (b) $F'(x_e) < 0$, er $x = x_e$ *asymptotisk stabil*.

Eksempel 4 (Verhulsts generaliserte likning)

La oss nytta Teorem 1 til ei stabilitetsdrøfting av likning (3.13):

$$\frac{dN}{dt} = k(N - H)(K - N)$$

der $k > 0$, $K > H > 0$. $N = H$ og $N = K$ er likevektsløysingar.

$$F(N) = k(N - H)(K - N) \text{ og } F'(N) = k(K - N) - k(N - H).$$

- $F'(H) = k(K - H) > 0 \Rightarrow$ Likevektsløysinga $N = H$ er *ustabil*,
- $F'(K) = -k(K - H) < 0 \Rightarrow$ Likevektsløysinga $N = K$ er *asymptotisk stabil*.

(ii) Autonome 2x2 system av første orden

Eit autonomt sett av to 1.ordens differensiallikningar kan allment skrivast på forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad (3.55)$$

Grafen til ei løysing $x = x(t)$, $y = y(t)$, kallast ei *integralkurve*, og er ei kurve i t, x, y -rommet. Projeksjonen av integralkurva ned i x, y -planet, det såkalla *faseplanet*, kallast ei *trajektorie*. For 2x2 system er tenleg å nytta faseplan med trajektorier i staden for t, x, y -rom og integral-kurver. (Men vi kan tillata oss å kalla ei trajektorie for ei integralkurve, det er i alle høve ei løysingskurve i faseplanet).

Ei konstant løysing $x = x_0, y = y_0$ til systemet (3.55) er kalla ei *likevektsløysing* og oppfyller likningane

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad G(x_0, y_0) = 0. \quad (3.56)$$

Ei likevektsløysing er i faseplanet representert ved eit punkt (x_0, y_0) kalla eit *kritisk punkt* eller eit *likevektspunkt*.

Eksempel 5

Likninga $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$ gir udempa harmoniske svingingar og er studert i Kap. 2. Ved å innføra nye avhengige $x = \theta$, $y = d\theta/dt$ overfører vi likninga til eit 2x2 system:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x,$$

der $(0,0)$ er einaste likevektspunkt.

Den generelle løysinga er: $x = a \cos(\omega t + \phi)$, $y = -a\omega \sin(\omega t + \phi)$, der a og ω er konstantar, representerer periodiske løysingar. Trajektoriene er ellipsar om likevektspunktet gitt ved:

$x^2 + (y/\omega)^2 = a^2$. Skisser trajektoriene i faseplanet (Likev.punktet er ein degenerert ellipse).

Eit *lineært* og homogent 2x2 system som er autonomt, har *konstante* koeffisientar og kan skrivast på forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned},$$

eller på matrisiform:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (3.57)$$

der a , b , c og d er konstantar,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ og koeffisientmatrisa } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ er ei likevektsløysing (dvs. eit likevektspunkt i faseplanet).

Vi avgrensar oss til *isolerte* likevektspunkt, dvs. til punkt der $\det A \neq 0$ (som igjen vil seia at ingen av eigenverdiane til koeffisientmatrisa A er null).

Teorem 2 *Stabilitetsteorem for lineære 2x2 system*

Gitt det lineære 2x2 systemet (3.57), der A har *eigenverdier* r_1, r_2 og $r_1 r_2 \neq 0$.

1. Dersom $Re(r_1) < 0$, $Re(r_2) < 0$, er likevektsløysinga $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *asymptotisk stabil*.

Klassifisering:

- (a) Reelle eigenverdier: Likevektspunktet er eit *knutepunkt* (stabil)
(b) Kompleks konjugerte eigenverdier: $Re(r_1) = Re(r_2) < 0$.
Likevektspunktet er eit *spiralpunkt* (stabil).

2. Dersom $Re(r_1) = Re(r_2) = 0$, er likevektsløysinga $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *stabil*.

Klassifisering:

- (a) Reint imaginære eigenverdier: Likevektspunktet er eit *senter*.

3. Dersom $Re(r_1) > 0$ for minst éin av eigenverdiane, er likevektsløysinga $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *ustabil*.

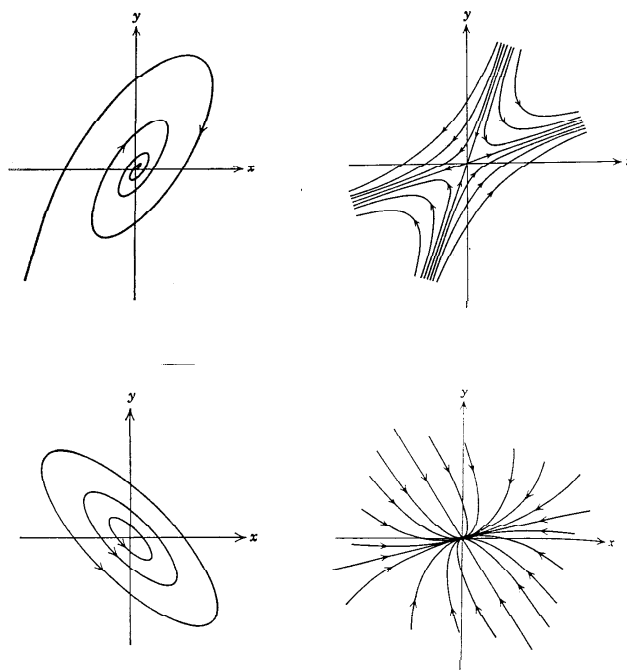
Klassifisering:

- (a) Reelle eigenverdier:
Begge eigenverdiane er positive: Likevektspunktet er eit *knutepunkt* (ustabil).
Eigenverdiane har motsett forteikn: Likevektspunktet er eit *sadelpunkt*.
(b) Kompleks konjugerte eigenverdier: $Re(r_1) = Re(r_2) > 0$.
Likevektspunktet er eit *spiralpunkt* (ustabil).

Knutepunkt, sadelpunkt, spiralpunkt og senter er illustrert i figur 3.16.

Eksempel 6

- (a) Gitt systemet $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y$, $\frac{dy}{dt} = 4x - y$. Eigenverdiane til koeffisientmatrisa er: $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$. Likevektspunktet (0,0) er eit *ustabil spiralpunkt* (og likevektsløysinga er *ustabil*).
- (b) Gitt systemet $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$. Eigenverdiane til koeffisientmatrisa er. $r_1 = r_2 = 1$. Likevektspunktet (0,0) er eit *ustabil knutepunkt* (og likevektsløysinga er *ustabil*).
- (c) Gitt systemet $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$. Eigenverdiane til koeff.matrisa er: $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$. Likevektspunktet er eit *senter* (og likevektsløysinga er *stabil*).



Figur 3.16: Dei fire tilfella spiralpunkt, sadelpunkt, senter og knutepunkt.

La systemet (3.55) vera eit ikkje-lineært sett av to differensiallikningar av første orden, og la vidare (x_0, y_0) vera eit likevektspunkt. Vi rekkjeutviklar funksjonane F og G om likevekts-punktet:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + g_1(x, y) \\
 G(x, y) &= G(x_0, y_0) + \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + g_2(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{3.58}$$

Det ikkje-lineære systemet (3.55) kan no skrivast på forma

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}),
 \tag{3.59}$$

der

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

og

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), \quad c = \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0), \quad d = \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (3.61)$$

Matrisa A kallast for *Jacobi-matrisa* for systemet og spelar ei viktig rolle i stabilitetsanalyse. Høgresida av likninga (3.60) er no splitta ei ein *lineær* del og ein *ikkje-lineær* del. Systemet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad (3.62)$$

kallast den *lineære approksimasjonen* til det ikkje-lineære systemet (3.59). Når visse vilkår er oppfylte, vil det ikkje-lineære systemet (3.59) ha same stabilitetssegenskapar i likevektspunktet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som den lineære approksimasjonen (3.62).

Definisjon 4

Likningssystemet (3.60) kallast *nesten-lineært* i ei omegn om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dersom

$$\frac{\|\mathbf{g}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{(g_1^2 + g_2^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \rightarrow 0 \quad \text{når } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (3.63)$$

Kravet er ekvivalent med at:

$$\frac{g_1}{R} \rightarrow 0, \quad \frac{g_2}{R} \rightarrow 0 \quad \text{når } R = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Teorem 3 *Stabilitetsteorem for ikkje-lineære 2x2 system*

Gitt det ikkje-lineære systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Vidare er

- (i) r_1 og r_2 eigenverdiane til Jacobi-matrisa A , og
- (ii) systemet nesten-lineært i ei omegn om $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Likevektsløysinga $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ til systemet er då:

(I) Asymptotisk stabil når

- (a) r_1 og r_2 er reelle og negative, eller
- (b) $Re(r_1) = Re(r_2) < 0$.

(II) Ustabil når

- (a) r_1 og r_2 er reelle og minst ein av desse er positiv, eller
- (b) $Re(r_1) = Re(r_2) > 0$.

Stabilitetsteoremet har ingen konklusjon for tilfellet at eigenverdiane er reint imaginære, det vil då vera det ikkje-lineære leddet i likning (3.59) som avgjer stabiliteten.

Merknad: Klassifisering av kritiske punkt

I dei fleste tilfelle vil klassifiseringa for kritiske punkt bli den same for det ikkje-lineære systemet (3.59) som for den lineære approksimasjonen (3.62). Men det finst to unntak:

- (i) *Reell dobbelrot*. Knutepunkt vil gå over i knutepunkt eller spiralpunkt.
- (ii) *Reint imaginære eigenverdiar*. Senter vil då gå over i senter eller spiralpunkt.

Eksempel 7

Gitt systemet

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y + xy, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - y + x^2 - 3xy.$$

Ved å nytta polarkoordinatar, viser ein lett at systemet er *nesten-lineært* i ei omegn om $(0,0)$:

$$\frac{g_1(x, y)}{R} = \frac{xy}{R} = \frac{R^2 \cos \theta \sin \theta}{R} = R \cos \theta \sin \theta \rightarrow 0 \text{ når } R \rightarrow 0,$$

$$\frac{g_2(x, y)}{R} = \frac{x^2 - 3xy}{R} = R(\cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin \theta) \rightarrow 0 \text{ når } R \rightarrow 0.$$

Eigenverdiene til Jacobi-matrisa til den lineære approksimasjonen er:

$$r_1 = 1 + 2i, \quad r_2 = 1 - 2i, \quad \text{og } \operatorname{Re}(r_1) = \operatorname{Re}(r_2) = 1 > 0.$$

Likevektspunktet er eit *ustabilt spiralpunkt* og likevektsløysinga $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er *ustabil*.

Eksempel 8 *Matematisk pendel* (jamfør seksjon 2.2)

Likninga er: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$, der θ er utslaget, g tyngdeakselerasjonen og l snorlengda.

Innfører vi nye variable: $x = \theta$, $y = \frac{d\theta}{dt}$, kan likninga skrivast som følgjande 2x2 system

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta = -\frac{g}{l} x - \frac{g}{l} (\sin x - x),$$

som gir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{og } g_1(x, y) = 0, \quad g_2(x, y) = -\frac{g}{l} (\sin x - x).$$

$$\left| \frac{g_2(x, y)}{R} \right| = \frac{g}{l} \left| \frac{\sin x - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{g}{l} \left| \frac{\sin x - x}{x} \right| = \frac{g}{l} \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \rightarrow 0 \text{ når } x \rightarrow 0.$$

Systemet er *nesten-lineært* i ei omegn om $(0,0)$. Sidan eigenverdiane til A er reint imaginære:

$$r_1 = i\omega, \quad r_2 = -i\omega, \text{ der } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

har den lineære approksimasjonen *senter* i $(0,0)$.

Men denne analysen gir ingen konklusjon om stabiliteten til det ikkje-lineære systemet.

Ved å multiplisera pendellikninga med $\frac{d\theta}{dt}$ og integrera, får vi likninga:

$$\frac{1}{2} l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - g \cos \theta = c \text{ (konst.)}.$$

Innfører vi: $\theta = x$, $\frac{d\theta}{dt} = y$, gir dette følgjande trajektorie i faseplanet:

$$g \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 - \dots \right) + \frac{1}{2} l y^2 = c_1 \text{ (konst.)},$$

der vi har rekkjeutvikla $\cos \theta$. Dette indikerer at for små utslag, $x \ll 1$, $y \ll 1$, er trajektoriene tilnærma ellipsar om likevektspunktet $(0,0)$, og dermed er likevektsløysinga *stabil*.

Merknad: Oppgåvene 1 og 6-10 er henta frå Boyce and Di Prima [15].

3.8 Oppgaver

Oppgave 1

For kvart av likningssystema skal ein klassifisera likevektspunktet $(0,0)$ og avgjera stabiliteten:

(a) $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y,$	(b) $\frac{dx}{dt} = 5x - y,$
$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y.$	$\frac{dy}{dt} = 3x + y.$
(c) $\frac{dx}{dt} = x - 5y,$	(d) $\frac{dx}{dt} = 2x - 5y,$
$\frac{dy}{dt} = x - 3y.$	$\frac{dy}{dt} = x - 2y.$

Oppgave 2

Gitt systemet

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - ky + x^2 + 3xy, \text{ der } k \text{ er ein reell konstant (parameter).}$$

Vis at systemet er nesten-lineært i ei omegn om likevektspunktet $(0, 0)$, og avgjer stabiliteten i dette punktet.

Oppgåve 3

(a) Gitt systemet

$$\frac{dx}{dt} = ky, \quad \frac{dy}{dt} = x + (k - 1)y,$$

der k er ein reell konstant (parameter). Klassifiser og drøft stabiliteten av likevektspunktet $(0, 0)$ for alle $k \neq 0$.

(b) Gitt det ikkje-lineære systemet

$$\frac{dx}{dt} = ky + x \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = x + (k - 1)y + xy^2,$$

Drøft stabiliteten av likevektspunktet $(0, 0)$ for alle $k \neq 0$.

Oppgåve 4 (Nyttig resultat i stabilitetsdrøftingar.)

Gitt matrisa $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La eigenverdiane vera λ_1 og λ_2 . Vis at

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d = \text{trase } A, \quad \lambda_1 \lambda_2 = ad - bc = \det A,$$

der summen av diagonalelementa kallast trasen til A .

Oppgåve 5

Verhulsts generaliserte lov (3.13) er gitt på forma

$$\frac{dN}{dt} = k(N - H)(K - N),$$

der k, H og K er positive konstantar, $H < K$. K er berekapasiteten og H er minimal levedyktig bestand.

- Vis at ved å innføra ny avhengig variabel $M(t) = N(t) - H$, vil likning (3.13) gi ei likning for $M(t)$ av same type som Verhulsts lov (3.8).
- Bruk dette til å løysa den transformerte likninga med startkravet $M(0) = M_0$ der $M_0 = N_0 - H$ (Bruk løysinga (3.12) til Verhulsts likning). Skriv så opp løysinga til (3.13) med startkravet $N(0) = N_0$.
- Vis at $N(t) \rightarrow K$ når $t \rightarrow \infty$ for alle $N_0 > H$. Når $N_0 < H$ vil $N(t) \rightarrow -\infty$ for ein endeleg t -verdi, $t = t_s$. Vis dette og finn t_s .

Oppgåve 6

Anta at ein populasjon følgjer lovene for logistisk vekst:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

- (a) Viss startpopulasjonen $N_0 = K/3$, finn tida τ der populasjonen har auka til det dobbelte. Finn verdien for τ som svarar til $r = 0.025$ per år.
- (b) Viss $N_0/K = \alpha$, finn tida T der $N(T)/K = \beta$, der $0 < \alpha < \beta < 1$. Vis at $T \rightarrow \infty$ når $\alpha \rightarrow 0$ eller $\beta \rightarrow 1$. Finn verdien for T som svarar til $r = 0.025$ per år, $\alpha = 0.1$ og $\beta = 0.9$.

Oppgåve 7

Ved gitt innsats med omsyn til fiske, er det naturleg å anta at fangstraten er avhengig av storleiken på fiskebestanden N ; di meir fisk der er, di lettare er det å fanga fisk. Derfor antar vi at fangstraten, dvs. utbyttet Y , er gitt ved $Y = EN$, der E er ein positiv konstant (med dimensjon 1/tid). E er eit mål for fangstintensiteten. For å inkludera denne effekten, blir den logistiske vekstlikninga erstatta med følgjande vekstlikning

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N - EN, \text{ (kalla } \textit{Schaefer's modell}, \text{ anvend på fiskebestandar).}$$

- (a) Vis at dersom $E < r$, finst det to likevektstilsløysingar, $N_1 = 0$ og $N_2 = K(1 - E/r)$.
- (b) Vis at $N = N_1$ er ustabil og at $N = N_2$ er asymptotisk stabil.
- (c) Finn 'berekraftig innhausting' $Y_s = E \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$.
- (d) Bestem fangstintensiteten E slik at Y_s får maksimum.

Oppgåve 8

I dette problemet antar vi at fisk blir fanga med konstant fangstrate h uavhengig av storleiken på fiskebestanden. Då vil vekstlikninga for N bli

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N - h$$

Føresetnaden med konstant h er rimeleg når N er stor, men er mindre akseptabel når bestanden er liten.

- (a) Vis at dersom $h < rK/4$, har vekstlikninga to likevektstilsløysingar N_1 og N_2 der $N_1 < N_2$. Bestem desse løysingane (punkta).

- (b) Vis at N_1 er ustabil og N_2 er asymptotisk stabil.
- (c) Vis at $dN/dt < 0$ når $N > N_2$ eller $N < N_1$, og $dN/dt > 0$ når $N_1 < N < N_2$. Lag ei skisse av integralkurvene.
- (d) Vis at dersom $h > rK/4$, går $N(t)$ mot 0 etter endeleg tid for alle val av startpopulasjonen N_0 .
- (e) Vis at dersom $h = rK/4$, så finst berre ei likevektsløyising, nemleg $N_1 = N_2 = K/2$ og likninga blir

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{r}{K} \left(N - \frac{K}{2} \right)^2.$$

Lag ei skisse av integralkurvene. Denne likevektsløyisinga er ikkje stabil, men blir kalla *semistabil*, forklar kvifor.

Oppgåve 9 (Spreiing av infeksjonar)

Anta at ein populasjon kan delast inn i to deler: Dei som har fått ein gitt infeksjon og kan smitta andre, og dei som ikkje har fått sjukdomen og er mottakelege. La x vera andelen av individa som er mottakelege (friske) og y andelen som er infiserte, slik at $x + y = 1$. Vi antar at infeksjonen spreier seg gjennom kontakt mellom sjuke og friske, og at vekstraten dy/dt er proporsjonal med talet på slike kontaktar. Vidare antar vi at medlemmer av begge gruppene kan ferdast fritt slik at talet på kontaktar er proporsjonalt med produktet av x og y . Sidan $x = 1 - y$, kan vi stilla opp følgjande startverdiproblem:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1 - y), \quad y(0) = y_0,$$

der α er ein positiv proporsjonalitetsfaktor og y_0 er startverdien for andelen infiserte.

- (a) Finn likevektspunkta og avgjer stabiliteten.
- (b) Løys startverdiproblemet og verifiser at konklusjonane i punkt (a) er korrekte, dvs. at $y(t) \rightarrow 1$ når $t \rightarrow \infty$. Dette viser at heile populasjonen blir infisert.

Oppgåve 10 (Spreiing av infeksjonar)

Visse sjukdomar (som tyfus) kan spreiest i stor utstrekning ved såkalla smitteberarar, dvs. individ som kan overføra sjukdomen, men som ikkje viser ytre symptom. La x vera den delen av populasjonen som er mottakelege (friske) og y den delen som er smitteberarar (infiserte). Anta at smitteberarane blir identifiserte og fjerna frå populasjonen med ein spesifikk vekstrate β , slik at

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y.$$

Anta også at sjukdomen spreier seg med ein vekstrate som er proporsjonal med produktet av x og y , slik at

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha xy.$$

- (a) Finn y som ein funksjon av tida t frå den første likninga, med startkravet $y(0) = y_0$.
- (b) Bruk resultatet frå punkt (a) til å finna x som funksjon av t ved å løysa den andre likninga med startkravet $x(0) = x_0$.
- (c) Finn den delen av populasjonen som unngår epidemien ved å finna grenseverdien til x når $t \rightarrow \infty$.

Oppgåve 11

Vi vil studera bytte/rovdyr-modellen (3.35) i seksjon 3.4.

- (a) Vis at den fjerde likevektsstillinga for systemet (i 1. kvadrant når $a < c$) er gitt ved

$$N_1^* = \frac{b+d}{ad+bc}, \quad N_2^* = \frac{c-a}{ad+bc}$$

- (b) Vis at Jacobi-matrisa for systemet:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial N_1}\right)_* & \left(\frac{\partial F}{\partial N_2}\right)_* \\ \left(\frac{\partial G}{\partial N_1}\right)_* & \left(\frac{\partial G}{\partial N_2}\right)_* \end{pmatrix}$$

i dette punktet er

$$A = \begin{pmatrix} -ar_1N_1^* & -br_1N_1^* \\ cr_2N_2^* & -dr_2N_2^* \end{pmatrix}, \text{ der } r_1, r_2, a, b, c \text{ og } d \text{ er gitte konstanter.}$$

Litteratur

- [1] A. J. Lotka: *Elements of physical biology*. Williams & Wilkins, Baltimore 1925.
- [2] V. Volterra: *Lecons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Gauthier-Villars, Paris 1931.
- [3] J. Reed: *Økomatematikk. Kvalitative matematiske metoder i økologi*. Universitetet i Tromsø, 1974.
- [4] J. Reed: *Noen matematiske modeller i økologi*, Nordisk matematisk tidsskrift, Bind 24, pp. 77-100, 1976.
- [5] T. R. Malthus: *An essay on principle of population*. London 1798.
- [6] P. F. Verhulst: *Notice sur la loi que population suit dans son accroissement*. Corr. Math. Et Phys. 10 , pp. 113-121, 1838.
- [7] E. P. Odum: *Fundamentals of ecology, 3.ed.*, W. B. Saunders, Philadelphia 1971.
- [8] C. Elton: *Voles, mice and lemmings: Problems in population dynamics*. Oxford University Press, London 1942.
- [9] G. F. Gause: *The struggle for existence*. Williams Wilkins, Baltimore 1934.
- [10] C. B. Huffaker: *Experimental studies on predation dispersion factors and predator-prey oscillations*. Hilgardia 27, pp. 343-383, 1958.
- [11] R. McArthur and J.H. Connell: *The biology of populations*. John Wiley & Sons, New York 1966.
- [12] E. J. Kormody: *Concepts of ecology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1969.
- [13] T. Fenchel: *Almen økologi*. Akademisk Forlag, København 1973.
- [14] A. Kolmogoroff: *Sulla Teoria di Volterra della Lotta per L'Esistenza*. Giron. Inst. Ital. Attura 7, pp. 74-80 , 1936.
- [15] E. B. Boyce and R. C. Di Prima, *Elementary differential equations and boundary value problems, 5. ed*, John Wiley & Sons, 1986.

Kapittel 4

Modelltilpassing

4.1 Innleiing

Ved matematisk modellering må ein ofte samla inn data i samband med observasjonar eller eksperiment. La oss ta eit eksempel frå økonomi: Ein observerer to storleikar, til dømes pris og etterspørsel etter ei viss vare. La oss anta at n observasjonar resulterer i dei n punkta:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n).$$

Her kan x_i vera pris for vara og y_i vera etterspørselen. Anta at vi har ein mistanke om at samanhengen mellom dei to storleikane er *lineær*, og at vi plottar inn punkta i (x, y) - planet. I praksis vil vi sjå at dei n punkta ikkje ligg eksakt på ei rett linje, men at vi har større eller mindre avvik.

Problemet vi studerer er å finna likninga for den rette linja som i ein viss forstand "passar best" til dei gitte observasjonane.

I tilsvarande problem kan ein anta at det finst andre samanhengar mellom dei variable, til dømes ein kvadratisk eller ein eksponentiell samanheng. I det allmenne tilfellet kan vi anta at det finst ein funksjonell samanheng mellom x og y av forma

$$y = f(x), \text{ der } f \text{ er avhengig av ein eller to parametrar.}$$

Vi må bestemma parametrane slik at funksjonen er "best tilpassa" observasjonane, dvs. det gjeld å bestemma desse parametrane slik at avvika

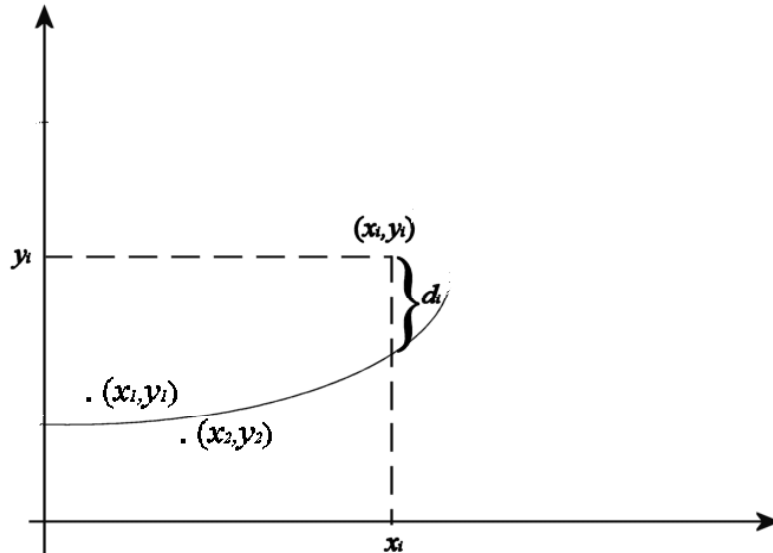
$$d_i = |y_i - f(x_i)|, \quad i = 1, 2, \dots n$$

blir minimale, sjå figur 2.4.

Det finst ulike kriterium for "beste tilpassing". Vi nemner følgjande:

1. *Chebyshevs approksimasjonskriterium:*

$$\text{Minimer } (\max |y_i - f(x_i)|), \quad i = 1, 2, \dots n.$$



Figur 4.1: Beste tilpassing.

2. Minimer $\sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)|$. (Vanskeleg å arbeida med analytisk).
3. *Minste kvadrats metode*: Minimer $\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2$
(Denne metoden er mest brukt).

4.2 Minste kvadrats metode

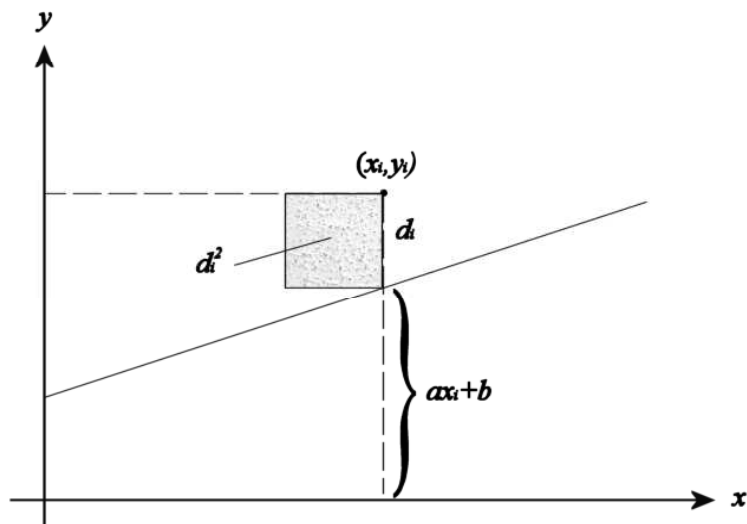
4.2.1 Lineær samanheng

Gitt ei samling data: (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Vi antar at det eksisterer ein *lineær* samanheng mellom dei variable x og y :

$$y = ax + b. \quad (4.1)$$

Problem: *Bestem konstantane a og b slik at linja gitt ved (4.1) er best tilpassa dei gitte data.*

Avviket d_i i punktet (x_i, y_i) er definert ved $d_i = |y_i - ax_i - b|$, $i = 1, 2, \dots, n$, sjå figur 4.2.



Figur 4.2: Beste tilpassing.

Ved *minste kvadrats metode* gjeld det å minimera funksjonen

$$S(a, b) = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2, \quad (4.2)$$

dvs. det gjeld å bestemma a og b slik at funksjonen S får minimum.

Merknad

Dersom datamengda (x_i, y_i) representerer målingar der målefeilane er normalfordelte, kan ein visa at minimering av S gir det beste estimat for a og b .

Nødvendig vilkår for minimum krev at:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dette gir to likningar for dei ukjende a og b :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \quad . \quad (4.4)$$

I det vi innfører middelerdiar:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \text{og} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (4.5)$$

kan likningane (4.4) skrivast på forma:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) a + \bar{x} \cdot b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \bar{x} \cdot a + b = \bar{y} \quad (4.6)$$

som gir løysinga

$$a = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}. \quad (4.7)$$

I statistikk blir den ”best tilpassa” linja (4.1), der a og b er gitt ved (4.7), kalla for *regresjonslinja* for y med omsyn til x .

Eksempel 4.1

Følgjande datasamling er gitt: (1, 2), (3, 4), (5, 5), og vi antar at det eksisterer ein lineær samanheng mellom dei variable. Ved manuell utrekning av regresjonslinja er det tenleg å nytta følgjande tabell:

Pkt. nr.	1	2	3	SUM
x	1	3	5	$\sum x_i = 9$
x^2	1	9	25	$\sum x_i^2 = 35$
y	2	4	5	$\sum y_i = 11$
xy	2	12	25	$\sum x_i y_i = 39$

Dette gir: $\bar{x} = 3$, $\bar{x}^2 = 9$, $\bar{y} = 11/3$, $\bar{x} \cdot \bar{y} = 11$,

$$a = \frac{39/3 - 3 \cdot 11/3}{35/3 - 9} = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{11}{3} - \frac{3 \cdot 3}{4} = \frac{17}{12}.$$

Den best tilpassa linja (regresjonslinja) er gitt ved:

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{12} \quad .$$

4.2.2 Kvadratisk samanheng

Gitt ei samling data: (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Vi antar at det eksisterer ein *kvadratisk* samanheng mellom dei variable x og y :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (4.8)$$

Problem: *Bestem konstantane a , b og c slik at parabolen gitt ved (4.8) er best tilpassa dei gitte data.*

Vi nyttar minste kvadrats metode og minimerer funksjonen med omsyn til a og b :

$$S(a, b, c) = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2. \quad (4.9)$$

Nødvendige vilkår for minimum krev at:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot 1 = 0. \quad (4.12)$$

Dette gir tre likningar for dei tre ukjende a , b og c :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) b + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) c = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \quad (4.13)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) c = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (4.14)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b + n \cdot c = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (4.15)$$

4.2.3 Eksponentiell samanheng

Gitt ei samling data: (t_i, p_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Vi antar at det finst ein *eksponentiell* samanheng mellom dei variable t og p av forma:

$$p = Be^{at}. \quad (4.16)$$

Funksjonen (4.16) kan overførast til ein lineær relasjon ved å ta logaritmen:

$$\ln p = \ln B + at. \quad (4.17)$$

Ved å innføre nye variable:

$$x = t, \quad y = \ln p, \quad b = \ln B, \quad (4.18)$$

får vi ein lineær samanheng av forma (4.1):

$$y = ax + b, \quad (4.19)$$

og vi kan nytta minste kvadrats metode med løysinga (4.7).

Denne framgangsmåten fungerer ofte bra, men metoden må brukast med varsemd. Grunnen er at vi transformerer data og dermed endrar avstandar ved overgang frå (t, p) -planet til det transformerte (x, y) -planet.

Merknad: Oppgåvene 1-3 er henta frå Giordano, Weir and Fox [1], sjå litteraturliste i kapittel 1.

4.3 Oppgåver

Oppgåve 1.

For kvart av følgjande datasett, antar vi det finst ein lineær samanheng mellom dei variable. Bruk minste kvadrats metode til å finna den best tilpassa linja (regresjonslinja). (Lag tabellar som i Eksempel 4.1, og bruk lommerekonar ved dei manuelle utrekningane).

(a)

x	1.0	2.3	3.7	4.2	6.1	7.0
y	3.6	3.0	3.2	5.1	5.3	6.8

(b)

x	29.1	48.2	72.7	92.0	118	140	165	199
y	0.0493	0.0821	0.123	0.154	0.197	0.234	0.274	0.328

(c)

x	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
y	4.32	4.83	5.27	5.74	6.26	6.79	7.23

Oppgåve 2.

I følgjande datasett antar vi det finst ein kvadratisk samanheng mellom dei variable:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0.06	0.12	0.36	0.65	0.95

Lag ein tabell tilsvarende den i eksempel 4.1 (med 7 horisontale linjer) og finn koeffisientane i likningssystemet (4.13) – (4.15). Systemet treng ikkje løysast.

Oppgåve 3.

I følgjande datasett antar vi at det finst ein eksponentiell samanheng mellom dei variable (sj  likning (4.16)):

t	7	14	21	28	35	42
p	8	41	133	250	280	297

Bruk transformering av data og finn estimat for a og B (jamfør likning (4.16)).

Kapittel 5

Dimensjonsanalyse

5.1 Innleiing

I dette kapitlet vert det gitt ei enkel innføring i *dimensjonsanalyse*. Dette er ein metode til å finna relasjonen mellom ulike variable eller parametrar som inngår i eit problem. Emnet er ein del av fysikkfaget. Ved hjelp av dimensjonsanalyse oppnår ein ofte gode resultat ut frå enkle resonnement og utrekningar. Metoden er velegna for å oppnå visse stasjonære resultat, men ein kan ikkje finna typiske tidsavhengige resultat. Då må ein resonnera ut frå dei fundamentale lovene eller prinsippa i fysikken, som Newtons lover, termodynamikkens lover, osv.

Denne innføringa er stort sett bygd på enkle eksempel. Skal ein gå djupare inn i feltet og gi eit teoretisk grunnlag, krev det breiare bakgrunn og djupare innsikt i fysikk. Framstillinga i dette kapitlet byggjer dels på læreboka til Giordano, Weir and Fox [1], og alle eksempel og oppgåver er henta derifrå, sjå litteraturliste i kapittel 1.

5.2 Eining og dimensjon

For å foreta målingar treng ein einingar. Eit einingssystem vil vera samansett av *fundamentale* einingar og *samansette (utleidde)* einingar. I mekanikk har vi tre fundamentale einingar i det internasjonale SI-systemet: Vi nyttar *meter*, *sekund* og *kilogram* når vi måler storleikar som *masse*, *lengde* og *tid*. Storleikar har *dimensjon*, også kalla *nemning*.

<i>Dimensjon</i>	<i>SI – eining</i>
Masse (M)	kilogram (kg)
Lengde (L)	meter (m)
Tid (T)	sekund (s)

I vitenskapleg samanheng blir alle storleikar målt i desse einingane eller i

einingar utleide av desse. Lengde l blir målt i m , fart v blir målt i m/s , akselerasjon a i m/s^2 , osv. I praksis nyttar vi ofte andre einingar som til dømes km, cm eller ft (fot) for lengde, eller mn (minutt), t (time), døger eller år for tid, osv.

Ein storleik, til dømes i mekanikk, har *dimensjon* som er uavhengig av målesystemet. Vi innfører notasjonen $\dim(\)$ eller \sim for dimensjonen til ein storleik.

Eksempel 5.1

$$\begin{aligned} \text{Fart:} \quad \dim(v) &= L/T = LT^{-1} && \text{eller } v \sim LT^{-1} \\ \text{Akselerasjon:} \quad \dim(a) &= L/T^2 = LT^{-2} && \text{eller } a \sim LT^{-2} \\ \text{Kraft:} \quad \dim(K) &= MLT^{-2} && \text{eller } K \sim MLT^{-2} \end{aligned}$$

Eininga MLT^{-2} vert kalla *Newton* og er ei utleidd eining.

5.2.1 Viktige prinsipp i samband med dimensjon:

(i) *Dimensjonsmessig homogenitet:*

Alle additive ledd i ei modell-likning må ha same dimensjon:

$$A_1 + A_2 = A_3 \quad \text{krev at } \dim(A_1) = \dim(A_2) = \dim(A_3).$$

Eksempel 5.2

(a) Newtons 2.lov: $K = ma$ (eindimensjonal rørsle)

$$\dim(K) = \dim(ma) = MLT^{-2}$$

(b) Fall i tyngdefelt med luftmotstand:

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt},$$

der k er friksjonskoeffisienten.

$$\dim(kv) = \dim(mg) = MLT^{-2}$$

$$\dim(kv) = \dim(k) \dim(v) = \dim(k) LT^{-1} = MLT^{-2},$$

som gir at $\dim(k) = MT^{-1}$.

(ii) *Den matematiske forma på ei modell-likning er uavhengig av dei einingar ein nyttar:*

I likninga $K = ma$ kan ein nytta einingane kg , m , s eller g , cm , s eller pound, ft, minutt, osv. Likninga får same matematiske form, men den numeriske storleiken på ledda er avhengig av einingane. Eit anna eksempel er likninga for svingetida, sjå likning (2.8).

(iii) Må nytta same einingar i eitt og same sett av likningar:

Dimensjonen *lengde* må i eitt og same sett av modell-likningar målast med ei og same eining, dvs. anten i m eller cm eller km , osv.

5.3 Innleiande eksempel

(A) Dimensjonsanalyse er ein metode til å finna relasjonen mellom ulike variable som inngår i eit problem.

Vi vil visa dette ved ei rekkje utvalde eksempel.

Eksempel 5.3 Fritt fall med luftmotstand – Grensefarten

Jamfør modellen i §2.3, der vi studerte ein lekam med masse m i fritt fall i eit homogent tyngdefelt med tyngdeakselerasjon g . Luftmotstanden var proporsjonal med farten v og motsett retta, og friksjonskoeffisienten var k . Vi fann grensefarten ved å nytta den dynamiske grunnlikninga (Newtons 2. lov).

Som eit alternativ vil vi no finna grensefarten ved *dimensjonsanalyse*: Det inngår tre viktige variable eller parametrar i dette problemet: m , g og k . Vi antar at grensefarten v_0 er avhengig av desse, dvs.: $v_0 = f(m, g, k)$. Eller meir presist, vi antar: v_0 er eit *produkt* av dei variable på forma:

$$v_0 = m^a g^b k^c \quad (5.1)$$

Kravet om dimensjonal homogenitet vil no gi oss eksponentane a , b og c .

$$\begin{array}{lll} \text{Variable:} & m & g & k \\ \text{Dimensjon:} & M & LT^{-2} & MT^{-1} \end{array}$$

Vi har at $\dim(k) = MT^{-1}$ frå Eksempel 5.2.

Det følgjer dermed frå likning (3.1) at $LT^{-1} = M^a(LT^{-2})^b(MT^{-1})^c$, dvs.

$$LT^{-1} = M^{a+c} L^b T^{-2b-c}. \quad (5.2)$$

Dette gir likningssystemet:

$$a + b = 0 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad -2b - c = -1 \quad ,$$

som har løysinga: $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$.

Konklusjon:

$$v_0 = \frac{mg}{k}, \quad (5.3)$$

som samsvarar med resultatet i §2.3.

Eksempel 5.4 Svingetida for den udempa pendelen, del I

Jamfør modellen i §2.2, der vi studerte den matematiske pendelen. Vi fann svingetida T ved små utslag i det vi neglisjerte uvesentlege effektar som friksjonskrefter og Corioliskrafta. Som eit alternativ vil vi finna svingetida ved *dimensjonsanalyse*:

Det inngår fem variable (inkludert parametrar) i problemet: Massen m , tyngdeakselerasjonen g , tida t , lengda l og amplituden θ .

Amplituden θ er ein vinkel målt i radianar (bogelengde/radius) og er dermed dimensjonslaus. Vi antar at svingetida T_s er avhengig av desse variable, dvs.

$$T_s = f(m, g, l, \theta).$$

Meir presist, vi antar at svingetida er eit produkt av dei variable:

$$T_s = m^a g^b l^c h(\theta) \quad , \quad (5.4)$$

der h er ein ukjend funksjon.

Variable:	m	g	T_s	l	θ
Dimensjon:	M	LT^{-2}	T	L	$M^0 L^0 T^0$

Det følgjer frå likning (5.4) at:

$$M^a L^{b+c} T^{-2b} = T. \quad (5.5)$$

Dette gir:

$$a = 0, \quad b + c = 0 \quad , \quad -2b = 1 \quad ,$$

som har løysinga: $a = 0$, $b = -1/2$, $c = 1/2$.

Konklusjon:

$$T_s = g^{-1/2} l^{1/2} h(\theta) = \sqrt{\frac{l}{g}} h(\theta). \quad (5.6)$$

Ved små svingingar er svingetida uavhengig av amplituden, og funksjonen h er ein konstant. I §2.2 viste vi at denne konstanten er 2π .

Eksempel 5.5 Vindkraft (luftmotstand) på varebil, del I

Ein varebil køyrer med konstant fart v langs ein rett veg. Vi vil finna eit uttrykk for vindkrafta K når det er gitt at arealet til vertikale frontflata er A . La oss først anta at vindkrafta er avhengig berre av dei variable v og A :

$$\text{Hypotese 1:} \quad K = kv^a A^b, \quad (5.7)$$

der k er ein dimensjonslaus konstant.

$$\begin{array}{l} \text{Variable:} \quad K \quad k \quad v \quad A \\ \text{Dimensjon:} \quad MLT^{-2} \quad M^0L^0T^0 \quad LT^{-1} \quad L^2 \end{array}$$

Det følgjer frå likning (5.7) at:

$$MLT^{-2} = (M^0L^0T^0)(LT^{-1})^a(L^2)^b, \quad (5.8)$$

som viser at likninga er inhomogen dimensjonsmessig med omsyn til den variable M . Altså må det vera noko vi har oversett. Grunnen kan vera:

- (i) Har oversett ein variabel, eller
- (ii) Proporsjonalitetskonstanten k har dimensjon.

Vi innfører ein ny variabel: Antar at krafta K er avhengig av tettleiken ρ for lufta. Sidan

$$\text{tettleik} = \frac{\text{masse}}{\text{volum}},$$

er $\dim(\rho) = ML^{-3}$.

$$\text{Hypotese 2:} \quad K = kv^a A^b \rho^c \quad (5.9)$$

Frå likning (5.7) følgjer at:

$$MLT^{-2} = (M^0L^0T^0)(LT^{-1})^a(L^2)^b(ML^{-3})^c = M^c L^{a+2b-3c} T^{-a}. \quad (5.10)$$

Dette gir:

$$c = 1, \quad a + 2b - 3c = 1, \quad -a = -2$$

som har løysinga: $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$.

Konklusjon:

$$K = kv^2 A \rho. \quad (5.11)$$

Eksempel 5.6 Regndrope i fritt fall - Stokes lov

Vi vil finna eit uttrykk for friksjonskrafta som verkar på ein regndrope i fritt fall. Vi gjer følgjande føresetnader:

- Regndropen er kuleforma med radius r
- Farten er v
- Viskositetskoeffisienten for lufta er μ , der $\dim(\mu) = ML^{-1}T^{-1}$.

Viskositeten er indre friksjon i lufta, og påverkar friksjonskrafta. Di større viskositetskoeffisienten er, di større er friksjonen. Vi neglisjerer eventuell variasjon i tetteleiken.

$$\text{Hypotese:} \quad K_f = k\mu^a v^b r^c. \quad (5.12)$$

der K_f er friksjonskrafta og k er ein dimensjonslaus proporsjonalitetskonstant.

$$\begin{array}{lllll} \text{Variable:} & K_f & \mu & v & r \\ \text{Dimensjon:} & M L T^{-2} & M L^{-1} T^{-1} & L T^{-1} & L \end{array}$$

Det følger frå (5.12) at

$$M L T^{-2} = M^a L^{-a+b+c} T^{-a-b}. \quad (5.13)$$

Dette gir:

$$a = 1, \quad -a + b + c = 1, \quad -a - b = -2,$$

som har løysinga: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.

Konklusjon:

$$K_f = k \mu v r. \quad (5.14)$$

Ved andre metodar kan ein visa at konstanten k er gitt ved $k = 6\pi$. Relasjonen (5.14) er då kalla *Stokes lov*.

(B) *Dimensjonsanalyse kan vera ein viktig metode i samband med planlegging og utføring av eksperiment.*

Eksempel 5.7 Udempa pendel – Svingetid – Eksperiment

Vi vil igjen studera svingetida for pendelen. Som i §2.1 og eksempel 5.4 vil vi forenkla problemet ved å neglisjera friksjonskrefter og Corioliskrafta. Problemanalyse tilseier at følgjande variable kan vera viktige for svingetida T_s : Massen m , pendellengda l , tyngdeakselerasjonen g og amplituden (det maksimale utslaget) θ , dvs. $T_s = f(m, l, g, \theta)$.

Dersom vi ved *eksperiment* vil finna samanhengen mellom T_s og dei variable m , l , g og θ , må vi utføra ei rekkje eksperiment der vi varierer *ein* variabel i gongen.

Anta at vi vil gjera eit eksperiment for 5 ulike verdiar for massen m : m_1, m_2, m_3, m_4 og m_5 , og 5 ulike verdiar for pendellengda l , osv. Argumenter for at det til saman blir $5^4 = 625$ eksperiment.

Ved *dimensjonsanalyse* kan vi redusera drastisk talet på eksperiment og likevel få ut same informasjon.

I eksempel 5.4 har vi ved enkel dimensjonsanalyse vist at svingetida $T_s = \sqrt{\frac{l}{g}} h(\theta)$. Vi har dermed redusert talet på variable frå 5 til 2. Vi kan

dermed få ut same informasjon ved å utføra $5 \cdot 5 = 25$ eksperiment, noko som er ein drastisk reduksjon.

5.4 Dimensjonslause produkt og Buckingham's teorem

Kravet om at ei modell-likning skal vera *homogen* med omsyn til dimensjon, gir eit endeleg antal dimensjonslause produkt. Vi vil illustrera dette med eit eksempel.

Eksempel 5.8 Udempa pendel, del II

Vi vender enno ein gong tilbake til den udempa pendelen, med parametrar eller variable: m, g, l, θ og svingetida t , jamfør eksempel 5.4 eller 5.6.

$$\begin{array}{l} \text{Variable:} \quad m \quad g \quad t \quad l \quad \theta \\ \text{Dimensjon:} \quad M \quad LT^{-2} \quad T \quad L \quad M^0 L^0 T^0 \end{array}$$

Vi vil finna eventuelle uavhengige dimensjonslause produkt:

$$\dim(m^a g^b t^c l^d \theta^e) = M^0 L^0 T^0 \quad (5.15)$$

dvs.

$$M^a (LT^{-2})^b T^c L^d \theta^e = M^a L^{b+d} T^{-2b+c} \theta^e = M^0 L^0 T^0. \quad (5.16)$$

Dette gir likningssystemet:

$$a = 0, \quad b + d = 0, \quad -2b + c = 0, \quad \text{dvs.} \quad a = 0, \quad c = 2b, \quad d = -b,$$

der b og e er vilkårlige (fritt valbare). Dette gir tre likningar og fem ukjende: To variable kan veljast fritt. Vi får to uavhengige dimensjonslause produkt:

(i) $b = 0, e = 1$, som medfører: $a = b = c = d = 0, e = 1$. Produktet er:

$$\pi_1 = m^0 g^0 t^0 l^0 \theta^1 = \theta. \quad (5.17)$$

(ii) $b = 1, e = 0$, som medfører: $a = 0, b = 1, c = 2, d = -1, e = 0$. Produktet er:

$$\pi_2 = m^0 g^1 t^2 l^{-1} \theta^0 = \frac{gt^2}{l}. \quad (5.18)$$

Begge produkta er uavhengige av massen m . Dette viser at massen ikkje spelar noka rolle for den udempa pendelen.

Eit viktig teoretisk resultat innan feltet dimensjonsanalyse er det såkalla Buckingham's teorem. Ei formulering av teoremet er:

Buckingham's teorem

Ei modell-likning er *homogen* med omsyn til dimensjon dersom og berre dersom likninga kan overførast til forma

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0 \quad (5.19)$$

der f er ein funksjon av n argument og $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ er eit fullstendig sett av dimensjonslause produkt.

Alternativ formulering av Buckingham's teorem

Dersom det finst ei dimensjonsmessig homogen likning

$$F(S_1, S_2, \dots, S_m) = 0,$$

mellom m storleikar, så finst det ei likning

$$g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0,$$

mellom eit fullstendig sett av n dimensjonslause produkt $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$.

Det viktigaste bidraget til teoremet er å redusera talet på uavhengige variable (parametrar) til eit sett av dimensjonslause kombinasjonar.

Vi vender tilbake til den udempa pendelen, eksempel 5.7. Det eksisterer to dimensjonslause produkt. I følge teoremet eksisterer det ein funksjon f slik at

$$f\left(\theta, \frac{gt^2}{l}\right) = 0, \quad \text{som gir } \frac{gt^2}{l} = H(\theta) \quad (5.20)$$

der vi har løyst første likning med omsyn til andre argument. Dette gir svingetida

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} h(\theta), \quad (5.21)$$

som samsvarar med resultatet i eksempel 5.7.

Merknad

Dersom det fullstendige settet av dimensjonslause produkt berre har eitt produkt, får vi at $f(\pi_1) = 0$. Er k eit reelt nullpunkt for f , dvs. $f(k) = 0$, gir dette at

$$\pi_1 = k. \quad (5.22)$$

Eksempel 5.9 Vindkraft (luftmotstand) på varebil, del II

Vi vender tilbake til problemet i eksempel 5.5, der vi granska vindkrafta F som verkar på ein varebil med konstant fart v . Frontflata på bilen har eit areal A og lufttettleiken er ρ . Vi søkjer så dimensjonslause produkt:

$$\begin{aligned}\dim(F^a v^b A^c \rho^d) &= (MLT^{-2})^a (LT^{-1}) L^{2c} (ML^{-3})^d \\ &= M^{a+d} L^{a+b+2c-3d} T^{-2a-b} \\ &= M^0 L^0 T^0.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Dette gir likningssystemet:

$$a + d = 0, \quad a + b + 2c - 3d = 0, \quad -2a - b = 0.$$

Vi vel $a = 1$, som gir $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$, $d = -1$.

Det eksisterer dermed eit einaste dimensjonslaust produkt:

$$\pi_1 = F v^{-2} A^{-1} \rho^{-1}.$$

Dermed er $f(\pi_1) = 0$, som medfører at

$$\pi_1 = \frac{F}{v^2 A \rho} = k,$$

der k er ein dimensjonslaus konstant. Vindkrafta må derfor ha forma:

$$F = k v^2 A \rho.\tag{5.24}$$

Eksempel 5.10 Grensefart for ein regndrope, del I

Vi vender tilbake til eksempel 5.6, regndrope i fritt fall, der vi fann eit uttrykk for friksjonskrafta, sjå likning (5.14). Vi vil no gå vidare for å studera grensefarten v . Dropen er kuleforma med radius r , tyngdeakselerasjonen er g , effektiv tettleik er $\Delta\rho = \rho_r - \rho_l$ og viskositetskoeffisienten for luft er μ . Her er ρ_r og ρ_l tettleik for regndrope og luft, respektivt. Vi søkjer så dimensjonslause produkt for problemet:

$$\begin{aligned}\dim(v^a r^b g^c (\Delta\rho)^d \mu^e) &= (LT^{-1}) L^b (LT^{-2})^c (ML^{-3})^d (ML^{-1}T^{-1})^e \\ &= M^{d+e} L^{a+b+c-3d-e} T^{-a-2c-e} \\ &= M^0 L^0 T^0.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Dette gir likningssystemet

$$d + e = 0, \quad a + b + c - 3d - e = 0, \quad -a - 2c - e = 0,$$

dvs.

$$e = -d, \quad c = \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}a, \quad b = \frac{3}{2}d - \frac{1}{2}a,\tag{5.26}$$

som gir 3 likningar og 5 ukjende. Vi får dermed $5 - 3 = 2$ dimensjonslause produkt.

(i) $a = 1, d = 0$ som gir:

$$\pi_1 = v^1 r^{-1/2} g^{-1/2} = \frac{v}{\sqrt{rg}}, \quad (5.27)$$

(ii) $a = 0, d = 1$ som gir:

$$\pi_2 = v^0 r^{3/2} g^{1/2} (\Delta\rho)^1 \mu^{-1} = \frac{r^{3/2} g^{1/2} \Delta\rho}{\mu}. \quad (5.28)$$

Det finst dermed ein relasjon $f\left(\frac{v}{\sqrt{rg}}, \frac{r^{3/2} g^{1/2} \Delta\rho}{\mu}\right) = 0$, som løyst m.o.t. første argument gir:

$$v = \sqrt{rg} h\left(\frac{r^{3/2} g^{1/2} \Delta\rho}{\mu}\right). \quad (5.29)$$

I neste eksempel skal vi visa at h er ein lineær funksjon: $h(x) = kx$, der k er ein dimensjonslaus konstant. I så fall blir grensefarten:

$$v = k \frac{\Delta\rho g r^2}{\mu}. \quad (5.30)$$

Eksempel 5.11 Grensefart for ein regndrope, del II

(a) *Ved Newtons 2. lov:*

I eksempel 5.6 fann vi forma på friksjonskrafta (Stokes lov) for ein regndrope i fritt fall. La oss nytta dette til å finna eit uttrykk for grensefarten ved hjelp av Newtons 2. lov. Vi oppnår grensefarten v når summen av friksjonskraft K_f og oppdrift K_o er like stor som tyngdekrafta K_g :

$$K_g - K_o - K_f = mg - \rho_l \frac{4}{3} \pi r^3 g - 6\pi\mu vr = 0.$$

I det massen $m = \rho_r \frac{4}{3} \pi r^3 g$, gir dette:

$$v = \frac{2}{9} \frac{\Delta\rho g r^2}{\mu}. \quad (5.31)$$

(b) *Ved dimensjonsanalyse:*

Vi vender tilbake til problemet i eksempel 5.10, grensefarten for ein regndrope i fritt fall. La dei variable $v, r, g, \Delta\rho, \mu$ ha same tolking som før. Vi antar at dette er alle variable som inngår i problemet, stiller opp følgjande hypotese for grensefarten v :

$$v = k(\Delta\rho)^a g^b r^c \mu^d, \quad (5.32)$$

der k er ein dimensjonslaus konstant. Det følgjer frå likning (5.32) at

$$LT^{-1} = kM^{a+d}L^{-3a+b+c-d}T^{-2b-d}. \quad (5.33)$$

Dette gir:

$$a + d = 0, \quad -3a + b + c - d = 1, \quad -2b - d = -1.$$

Vi vel $a = 1$, dvs. vi antar at grensefarten v er proporsjonal med $\Delta\rho$, som gir $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -1$. Dette gir grensefarten:

$$v = k \frac{\Delta\rho g r^2}{\mu}. \quad (5.34)$$

Eksempel 5.12 Dempa pendel

Den udempa pendelen vart analysert ved dimensjonsanalyse i eksempel 5.4. Vi fann samanhengen mellom svingetida T_s og dei variable m, g, l og θ (masse, tyngdeakselerasjon, pendellengde og amplitude). Dersom vi inkluderer friksjonskrefter, må vi i tillegg innføra ei friksjonskraft K_f , som i hovudsak skuldast luftmotstand. Vi antar derfor at denne er proporsjonal med farten v :

$$K_f = kv, \quad \text{der} \quad \dim(k) = \dim\left(\frac{K_f}{v}\right) = MT^{-1}.$$

Dermed kan vi anta at svingetida er avhengig av følgjande parametrar eller variable: m, l, g, θ og k (friksjonskoeffisienten). Vi søker så dimensjonslause produkt:

$$\begin{aligned} \dim(T_s^a l^b m^c g^d \theta^e k^f) &= T^a L^b M^c (LT^{-2})^d (M^0 L^0 T^0)^e (MT^{-1})^f \\ &= M^{c+f} L^{b+d} T^{a-2d-f} \\ &= M^0 L^0 T^0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dette gir likningssystemet:

$$c + f = 0, \quad b + d = 0, \quad a - 2d - f = 0,$$

dvs.

$$c = -f, \quad b = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}f, \quad d = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}f,$$

som gir 3 likningar og 6 ukjende (medrekna e). Vi får dermed $6 - 3 = 3$ dimensjonslause produkt.

(i) $a = 1, e = 0, f = 0$ som gir :

$$\pi_1 = T_s^1 l^{-1/2} m^0 g^{1/2} \theta^0 k^0 = T_s \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}} \quad (5.36)$$

(ii) $a = 0, e = 1, f = 0$ som gir:

$$\pi_2 = T_s^0 l^0 m^0 g^0 \theta^1 k^0 = \theta \quad (5.37)$$

(iii) $a = 0, e = 0, f = 1$ som gir:

$$\pi_3 = T_s^0 l^{1/2} m^{-1} g^{-1/2} \theta^0 k^1 = \frac{k\sqrt{l}}{m\sqrt{g}}. \quad (5.38)$$

I følge Buckingham's teorem finst ein funksjonsamanheng:

$$f\left(T_s \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}}, \theta, \frac{k\sqrt{l}}{m\sqrt{g}}\right) = 0. \quad (5.39)$$

Løyer vi relasjonen (5.39) med omsyn til første argument, gir dette:

$$T_s = \sqrt{\frac{l}{g}} H\left(\theta, \frac{k}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}\right). \quad (5.40)$$

Dette viser at for den dempa pendelen er svingetida også avhengig av massen m og friksjonskoeffisienten k , i tillegg til dei variable l, g og θ .

5.5 Oppgaver

Oppgave 1

Gitt likninga:

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

der s er posisjonen (falldistansen) ved tida t , s_0 er posisjonen og v_0 farten ved tida $t = 0$, og g er tyngdeakselerasjonen. Avgjer om likninga er dimensjonsmessig homogen.

Oppgave 2

Ulike konstantar i fysikk har ofte dimensjon, og den numeriske verdien er dermed avhengig av dei einingar ein nyttar. Eit slikt eksempel er den generelle gravitasjonskonstanten G . Newtons gravitasjonslov (jamfør likning (2.14)) har forma:

$$K = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Finn dimensjonen til G når det er gitt at likninga er dimensjonsmessig homogen.

Oppgave 3

Visse stjerner, kalla pulserande stjerner, har lys og radiell fart som gjenomgår periodiske svingingar (vibrasjonar). Det er ein hypotese at perioden (svingetida) t er avhengig av stjerne-radius r , massen m og gravitasjonskonstanten G . Vi antar at

$$t = m^a r^b G^c.$$

Finn a, b, c slik at likninga blir dimensjonsmessig homogen. Vis at

$$t = \left(\frac{r^3}{Gm} \right)^{1/2}.$$

Oppgave 4

Når vi skal sjekka dimensjonane til ei likning, må vi merka oss at deriverte også har dimensjon. Til dømes er:

$$\dim \left(\frac{ds}{dt} \right) = LT^{-1} \quad \text{og} \quad \dim \left(\frac{d^2s}{dt^2} \right) = LT^{-2},$$

der s er posisjon (distanse) og t er tida.

Avgjer så om følgjande likning er dimensjonsmessig homogen:

$$\frac{dE}{dt} = \left[mr^2 \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) - mgr \sin \theta \right] \frac{d\theta}{dt},$$

der E er den totale energien til ein dempa pendel, t er tida, m massen, r pendellengda, g tyngdeakselerasjonen og θ utslaget.

Oppgave 5

Ein lekam fell fritt i vakum under innverknad av tyngdekrafta.

- a) Bruk dimensjonsanalyse til å finna farten v som funksjon av falldistansen s , massen m og tyngdeakselerasjonen g .

Vink: Anta at $v = k m^a g^b s^c$, der k er ein dimensjonslaus konstant.

- b) Vis så at resultatet samsvarar med det ein får ved å nytta Newtons 2. lov.

Oppgave 6

Bruk dimensjonsanalyse til å finna sentrifugalkrafta K til ein partikkel som funksjon av massen m , farten v og krumningsradius r (til banen).

Vink: Anta at $K = k m^a v^b r^c$, der k er ein dimensjonslaus konstant.

Oppgåve 7

I hydrodynamikk er Reynoldstalet R ein dimensjonslaus parameter danna av følgjande variable: V skefarten v , tettleiken ρ , viskositeten μ , og ei karakteristisk lengde l . Anta at R er proporsjonal med l . Viskositet har dimensjon $ML^{-1}T^{-1}$.

Bruk dimensjonsanalyse til   finna Reynoldstalet.