Innføring i Topologi

Olav Nygaard

23. desember 2005

Forord

Topologi er et sentralt emne, nesten uansett hvilke retninger en vil studere i matematikk. I analyse kommer en ingen vei uten kunnskaper i topologi. Dessverre faller det å lære topologi vanskelig for de fleste. For meg var det i allefall slik, men da jeg endelig begynte å fatte poengene så jeg hvor viktig det er.

I masterstudiet i matematikkdidaktikk, studieretning *Begreper i Matematisk Analyse* ved Høgskolen i Agder, inngår emnene *Topologi og Analyse I+II.* Her har vi den ideen at vi skal forsøke å lære topologi mens vi arbeider utfra eksempler. Når vi utvikler generell teori forsøker vi å si noe om hva vi senere skal bruke teorien til og vi forsøker på et tidlig tidspunkt å stille spørsmål leseren kan ha i bakhodet en stund før løsningen kommer i form av teoremer.

Å lære skal være vanskelig, problemet er når det blir for vanskelig for veldig mange. Jeg håper og tror at det å lese på norsk skal gjøre ting litt lettere.

Høgskolen i Agder
Institutt for matematiske fag, 2005.

Olav Nygaard

Innhold

1 Innføring i topologiske rom **1**

1.1 Hilberts rom av følger . . . 1
1.2 Et eksempel til og definisjon av normert rom . . . 3
1.3 Nettverk og topologiske rom . . . 4
1.4 Topologien av punktvis konvergens og topologier generert av dekninger . . . 5
1.5 Mer om åpne og lukka mengder . . . 7
1.6 Klassifisering av topologiske rom . . . 9
1.7 Relative topologier . . . 11
1.8 Oppgaver . . . 12

2 Kontinuerlige funksjoner og kompakte mengder **15**

2.1 Kontinuitet, svake topologier og produkttopologi . . . 16
2.2 Normale rom og kontinuerlige, reelle funksjoner på disse . . . 20
2.3 Nettkarakterisering av grenser . . . 25
2.4 Kompakte rom . . . 27
2.5 Delnett, klyngepunkt og kompakthet . . . 30
2.6 Ulike kompakthetskrav . . . 32
2.7 Metriske rom . . . 35
2.8 Alexanders lemma og Tychonoffs teorem . . . 39
2.9 Oppgaver . . . 40

3 Normerte vektorrom med sine svake topologier **45**

3.1 Topologiske vektorrom og lineære operatorer . . . 45
3.2 c_0 og ℓ_p-rommene . . . 50
3.2.1 Rommet c_0 av reelle nullfølger . . . 50
3.2.2 Rommet ℓ_1 av reelle absolutt konvergente rekker . . . 53
3.2.3 Rommene ℓ_p av p-absolutt konvergente rekker . . . 54
3.3 Hahn-Banach teoremet . . . 57
3.4 Mer om svake topologier og Alaoglu's teorem . . . 61
3.4.1 Normerte rom med separabel dual . . . 62
3.4.2 Kompakthet i svak-stjerne topologi og refleksivitet . . . 63
3.5 Oppgaver . . . 65

Kapittel 1

Innføring i topologiske rom

Når vi skal avgjøre om ei reell følge (x_n) konvergerer mot et reelt tall a, undersøker vi om det er slik at *for alle* $\varepsilon > 0$ *eksisterer et naturlig tall* N *slik at hver gang* $n \geq N$, *så gjelder* $\|x_n - a\| < \varepsilon$. La oss forsøke å si dette på en annen måte som ikke er så avhengig av at vi befinner oss på den reelle tallinja. La oss kalle mengder av typen $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ for *skiver* om a.

Definisjon 1.1. *Ei følge* (x_n) *konvergerer til* a *dersom enhver skive om* a *inneholder alle bortsett fra endelig mange elementer fra* (x_n).

La oss forsøke å gjøre tilsvarende i planet. Da kan vi la skivene være sirkelskiver om punktet a. La oss skrive sirklene $U(a, \varepsilon)$. Kravet til konvergens blir da akkurat Definisjon 1.1. Altså har vi en felles definisjon av konvergens i $\mathbb{R}^1$ og $\mathbb{R}^2$. Å utvide til $\mathbb{R}^n$ skulle være rett fram. Legg også merke til at Definisjon 1.1 ikke er avhengig av at indeksmengda til følga er de naturlige tall, den vil virke like godt dersom vi vil generalisere følgebegrepet til større indeksmengder, noe det skal vise seg senere (f.eks i Seksjon 2.3) at vil være veldig nyttig.

Eksempel 1.2. Her ser du en annen måte å skrive skiver $U(a, r)$ om punktet $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$U(a, r) = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \|x - a\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < r\} \tag{1.1}$$

1.1 Hilberts rom av følger

Når R^n er gitt normen $\| \cdot \|$ definert i (1.1), skriver vi ℓ_2^n og mener altså da vektorrommet $\mathbb{R}^n$ utstyrt med denne normen.[1] Denne ideen kan brukes til å studere rom av følger. La ℓ_2 være samlinga av alle reelle følger (x_n) som oppfyller at $\sum_n |x_n|^2 < \infty$. Tilsvarende som for ℓ_2^n kan vi definere 'sirkelskiver med radius r' om følga (x_n) som alle følger (y_n) der $(\sum_n |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}} < r$. På samme måten som i ℓ_2^n kan vi tenke på $(\sum_n |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ som avstanden mellom følgene (x_n) og (y_n), og vi skriver gjerne denne avstanden som $\|(x_n) - (y_n)\|_2$. Størrelsen, eller normen, til ei følge i ℓ_2 er avstanden fra følga $(0, 0, 0...)$. Ei følge av følger konvergerer til følga (x_n) dersom Definisjon 1.1 er oppfylt.

[1] Vi skal gi en formell definisjon av begrepet norm i Seksjon 1.2

Kanskje du synes dette var veldig abstrakt. Det har antakelig å gjøre med at du ikke er vant til å oppfatte følger som punkter eller elementer i ei mengde. Men om det faller naturlig å se på ei følge som et punkt i mengda av følger, så skulle det gå å forstå eksemplet. En annen vanskelighet er å se for seg følger av følger. La oss gjøre dette helt konkret.

Eksempel 1.3. Vi er i ℓ_2 og ser på punktet $x = (x_n) = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Det går an å vise at $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Dermed kjenner vi normen til x. For hvert naturlig tall k kan vi definere følger (y_n^k) gitt ved $(y_n^k) = (\frac{1+\frac{1}{k}}{n})$. For $k = 3$ får vi f. eks.

$$\frac{1+\frac{1}{3}}{1}, \frac{1+\frac{1}{3}}{2}, \frac{1+\frac{1}{3}}{3}, \frac{1+\frac{1}{3}}{4}, \ldots$$

Når $k = 100$ får vi

$$\frac{1+\frac{1}{100}}{1}, \frac{1+\frac{1}{100}}{2}, \frac{1+\frac{1}{100}}{3}, \frac{1+\frac{1}{100}}{4}, \ldots$$

og for generell k ser vi at følga blir

$$\frac{1+\frac{1}{k}}{1}, \frac{1+\frac{1}{k}}{2}, \frac{1+\frac{1}{k}}{3}, \frac{1+\frac{1}{k}}{4}, \ldots$$

Vi ser at når k vokser blir følga (y_n^k) mer og mer lik $x = (x_n)$. Avstanden mellom følgene, målt med ℓ_2-normen viser også dette:

$$\left(\sum_n |\frac{1+\frac{1}{k}}{n} - \frac{1}{n}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}\left(\sum_n \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}\cdot\|x\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

'Følgefølga' (y_n^k) konvergerer dermed mot følga $x = (x_n)$ fordi enhver skive om x inneholder alle bortsett fra endelig mange av følgene fra følgefølga (y_n^k).

En liten kommentar, bare som orientering: $\mathbb{R}^n$ er vektorrom over $\mathbb{R}$. I Kapittel 3 skal vi vise at ℓ_2 også er et vektorrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Poenget er å vise at om vi tar lineærkombinasjoner av ℓ_2-følger, så får vi ei ny ℓ_2-følge. Vi skal også vise at trekantulikheten gjelder for avstandsmålet vi definerte på ℓ_2. Vi vil få dette som et spesialtilfelle av Minkowskis ulikhet. Normen i ℓ_2 stammer fra et indreprodukt, nemlig

$$(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$$

på samme måte som i ℓ_2^n. Men vi trenger litt redskap til å vise at summen over er endelig, og kommer tilbake til dette senere i forbindelse med Hölders ulikhet.

Vektorrom med skalarprodukt kalles pre-Hilbertrom. Rommet ℓ_2 skal vise seg å ha den egenskapen at det inneholder grensene for alle konvergente følgefølger, det er såkalt komplett. Komplette pre-Hilbertrom kalles Hilbertrom.[2]

Hensiktene med å gi dette eksemplet til innledning er blant annet:

- Å se at følger kan oppfattes som vektorer med uendelig mange koordinater.
- Å se at punktene i mengda vi studerer kan være objekter som følger, og at det går an å gi avstand mellom slike objekter mening.
- Å se at når vi har ei mengde og vi på denne mengda har skiver, så kan vi snakke om konvergens.

[2]Det var spesielt skiva $U(0, 1)$ i ℓ_2 som David Hilbert (1862-1943) studerte egenskapene til, og som gjør at Hilbertrommene er oppkalt etter han.

1.2 Et eksempel til og definisjon av normert rom

Vi har lært at Definisjon 1.1 kunne brukes i alle tilfellene ℓ_2^n og ℓ_2. Vi vil nå se på enda et tilfelle som vi kjenner fra tidligere.

Eksempel 1.4. La $C[a,b]$ være mengda av kontinuerlige, reelle funksjoner definert på $[a,b]$. Nå er punktene i mengda vi studerer funksjoner. La avstanden mellom to elementer i $C[a,b]$ være gitt ved største avstand i funksjonsverdier, altså

$$\|f-g\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|. \tag{1.2}$$

Skivene om en funksjon f er da gitt ved

$$U(f,r) = \{g \in C[a,b] \ : \|g-f\| < r\},$$

altså består $U(f,r)$ av alle kontinuerlige funksjoner g definert på $[a,b]$ der grafen til g aldri er mer enn r over eller under grafen til f. Ei følge av elementer i $C[a,b]$ konvergerer hvis alle slike skiver inneholder alle bortsett fra endelig mange funksjoner i følga. Når ei følge av funksjoner konvergerer på denne måten sier vi at den konvergerer *uniformt.*

Alle eksemplene vi har sett til nå er vektorrom V med et avstandsmål $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ som oppfyller pene egenskaper. Fram mot 1920 ble det klart at veldig mange eksempler kunne samles under samme definisjon og et nytt begrep vokste etter hvert fram:[3]

Definisjon 1.5. *La V være et vektorrom over $F = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$, la $x \in V$ og $\alpha \in F$. En norm $\|\cdot\|$ på V er ei avbilding fra V inn i $\mathbb{R}$ slik at for $\alpha \in F$ og $x, y \in V$ gjelder*

(N1) $||x|| \geq 0$ *og* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) $||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||$ *(Normen er en homogen funksjon).*

(N3) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Trekantulikheten).*

Et vektorrom der det er definert en norm kalles et normert vektorrrom *eller ofte bare* normert rom. $||x-y||$ *kalles* avstanden *eller* distansen *mellom x og y.*

Skivene om x i generelle normerte rom X blir mengdene av typen $U(x,r) = \{y \in X \ : \|x-y\| < r\}$, og vi kan vise at disse igjen bare er translater av tilsvarende skiver om 0. Ei delmengde A av et normert rom kalles, akkurat som i ℓ_2^n, åpen dersom ethvert $x \in A$ har ei skive rundt seg som ligger inni A. Følgende observasjon er viktig, ikke minst som intuitivt grunnlag for generell topologi:

Proposisjon 1.6. *Ei delmengde A av et normert rom X er åpen hvis og bare hvis den er en union av skiver.*

Bevis. Anta A er åpen. Velg for hvert $x \in A$ ei skive U_x som ligger inni A. Da er $A = \cup_{x\in A} U_x$. Anta så at A er en union $A = \cup_\alpha U_\alpha$ av skiver. La $x \in A$. Da finnes en indeks $\alpha(x)$ slik at $x \in U_{\alpha(x)}$. Siden $A = \cup_\alpha U_\alpha$ må $U_{\alpha(x)} \subset A$. $\square$

[3]Frigues Riesz (1880-1956) brukte ordet norm om normen definert i Eksempel 1.4 i 1918 og Stefan Banach (1892-1945) gav i sin doktoravhandling innlevert i juni 1920 ei aksiomatisering av normerte vektorrom (espaces normeé). Begrepet vektorrom (sistema lineare) blei introdusert av Giuseppe Peano (1858-1932) allerede i 1888. Den første til å studere egenskaper ved *mengda* $C[a,b]$ ser ut til å være Jaques Hadamard (1865-1963) i 1903.

1.3 Nettverk og topologiske rom

Selv om mange eksempler i praksis blir normerte rom, er det langt fra alltid slik. Vi vil nå utvikle en teori for åpne mengder som er uavhengig av at det eksisterer noen algebraisk struktur og uavhengig av at det finnes noen norm eller annen målemetode på mengda. Men måten vi konstruerte åpne mengder fra skiver på kan vi generalisere. Først generaliserer vi skivene:

Definisjon 1.7. *La X være ei mengde. Et* nettverk *på X er ei samling β av delmengder av X slik at*

(B1) *For hver $x \in X$ eksisterer det $V \in \beta$ slik at $x \in V$.*

(B2) *Hvis $x \in U \cap V$, der $U, V \in \beta$, så finnes $W \in \beta$ slik at $x \in W \subset U \cap V$.*

Vi skriver gjerne $\beta(x)$ eller β_x for alle $V \in \beta$ der $x \in V$. B1 sier da at $\beta(x) \neq \emptyset$ for alle x. B2 kan vi skrive slik: $U, V \in \beta(x)$ og $x \in U \cap V \Rightarrow \exists W \subset U \cap V$ med $W \in \beta(x)$. Nå bruker vi nettverket til å avgjøre åpenhet.

Definisjon 1.8. *La X være ei mengde der det finnes et nettverk $\beta = \beta(x)_{x \in X}$. Ei delmengde A av X kalles åpen relativt β dersom det for alle $x \in A$ finnes $V \in \beta(x)$ med $V \subset A$.*

Hvilke mengder som er åpne avhenger dermed av nettverket β. Vi skriver samlinga av åpne delmengder av X relativt β som τ_β. At $A \subset X$ er åpen, skriver vi $A \in \tau$. Du sitter nok og lurer på hvorfor generaliseringa av skivene var akkurat å kreve B1 og B2. Deler av svaret kommer nå. τ_β har gode egenskaper:

Teorem 1.9. *La β være et nettverk på ei mengde X og τ_β samlinga av åpne delmengder av X. τ_β har da følgende egenskaper:*

(T1) *$\emptyset, X \in \tau_\beta$.*

(T2) *τ_β er lukka under vilkårlige unioner.*

(T3) *τ_β er lukka under endelige snitt.*

Bevis. $\emptyset$ har ingen punkter og er derfor trivielt åpen. Enhver $x \in X$ har ei skive om seg, ved B1, og siden β er antatt å bestå av delmengder av X, følger det at X er åpen. Dermed er T1 bevist.

For å vise T2 antar vi $(A_\alpha) \subset \beta$ og at $A = \cup_\alpha A_\alpha$. Vi skal vise at A er åpen. La $x \in A$. Vi må vise at det finnes $V \in \beta(x)$ slik at $V \subset A$. Siden $x \in A$ og $A = \cup_\alpha A_\alpha$ finnes en $\alpha(x)$ der $x \in A_{\alpha(x)}$. Men $A_{\alpha(x)} \in \beta$, så $A_{\alpha(x)} \in \beta(x)$. Bruk $V = A_{\alpha(x)}$.

Når vi skal vise T3, bruker vi det generelle prinsippet at 'lukket under endelige snitt' følger fra 'lukket under snitt av to mengder'. Dette er ikke noe mer avansert enn at det å ta snitt er en assosiativ prosess. La nå $U, V \in \tau_\beta$ og la $x \in U \cap V$. Siden U og V er åpne finnes $U_1 \subset U$ og $V_1 \subset V$ slik at $U_1, V_1 \in \beta(x)$. Men nå gir B2 at det finnes $W \in \beta(x)$ med $W \subset U_1 \cap V_1$. Siden $U_1 \subset U$ og $V_1 \subset V$, er $W \subset U \cap V$. Dermed er $U \cap V$ åpent. $\square$

Vi definerer nå topologier og topologiske rom.

Definisjon 1.10. *La X være ei mengde og τ ei samling av delmengder av X som oppfyller (T1)-(T3) i Teorem 1.9. Da kalles τ en* topologi *på X og elementene i τ kalles* åpne mengder. *(X,τ) betyr mengda X med topologien τ, og vi kaller (X,τ) for et* topologisk rom.

Dersom vi vet hvilken topologi vi snakker om, sier vi bare at X er et topologisk rom og underforstår at dette egentlig betyr (X,τ). Teorem 1.9 viser oss hvordan vi kan lage en topologi hver gang vi har et nettverk. Det er en viktig måte å konstruere topologier på. Men det er ikke alltid en topologi er bygget via et nettverk. Her er viktig eksempel på en annen måte å lage en topologi på.

Eksempel 1.11. La Y være ei mengde og (X,τ) være et topologisk rom. La $f : Y \to X$ være en funksjon. Definer ei samling $\sigma \subset \mathcal{P}(Y)$[4] ved $\sigma = \{f^{-1}(A) : A \in \tau\}$. Da er σ en topologi på Y (se Oppgave 9).

Proposisjon 1.6 generaliseres og vi ser at Definisjon 1.7 er svært velvalgt:

Proposisjon 1.12. *La β være et nettverk på X. Da er enhver $A \in \tau_\beta$ på formen $A = \cup_\alpha A_\alpha$ der hver $A_\alpha \in \beta$. Og omvendt, dersom τ er en topologi og $\beta \subset \tau$ er slik at enhver $A \in \tau$ er en union av elementer fra β, så er β et nettverk på X.*

Legg merke til antakelsen $\beta \subset \tau$. Dersom τ kommer fra et nettverk β, er $\beta \subset \tau$ ved B1 og definisjonen av åpenhet.

Bevis. Siden A er åpen, kan vi til hver $x \in A$ velge $V_x \in \beta(x)$ med $V_x \subset A$. Da er $A = \cup_{x\in A} V_x$, en union av elementer fra β.

Vi antar så at τ er en topologi på X og β er ei samling av delmengder av X slik at enhver $A \in \tau$ er en union av elementer fra β. Vi viser først B1: La $x \in X$. Siden $X \in \tau$ har vi $X = \cup_\alpha A_\alpha$, der $A_\alpha \in \beta$. Siden $x \in X$, må x befinne seg i en eller annen A_α. Så skal vi vise B2: La da $x \in U \cap V$ der $U, V \in \beta(x)$. Siden $\beta \subset \tau$, er $U \cap V$ åpen. Men det betyr per definisjon av åpenhet at $U \cap V$ inneholder ei delmengde W der $W \in \beta(x)$. $\square$

1.4 Topologien av punktvis konvergens og topologier generert av dekninger

Vi definerer konvergens av følger i topologiske rom.

Definisjon 1.13. *Ei følge (x_n) i et topologisk rom (X,τ) konvergerer til $x \in X$ dersom enhver åpen mengde om x inneholder alle bortsett fra endelig mange elementer fra følga.*

Hvis topologien kommer fra et nettverk β er det nok å sjekke om enhver $V \in \beta(x)$ inneholder alle unntatt endelig mange elementer fra følga. Anta nemlig at så er tilfelle for alle $V \in \beta(x)$. Kall følga for (x_n) og la $W \in \tau(x)$. W inneholder et medlem fra $\beta(x)$. Men da har vi at W har ei delmengde om x som inneholder alle bortsett fra endelig mange av x_n'ene. Men W inneholder jo minst så mange x_n'er siden den er minst så stor som V. Vi har altså bevist

[4] $\mathcal{P}(Y)$ betyr potensmengda til Y, dvs samlinga av alle delmengder av Y.

Proposisjon 1.14. *La β være et nettverk på X og $\tau = \tau_\beta$. Ei følge (x_n) konvergerer til $x \in X$ hvis enhver $V \in \beta(x)$ inneholder alle bortsett fra endelig mange elementer fra (x_n), dvs. hvis det for alle $V \in \beta(x)$ eksisterer et naturlig tall $N(V)$ slik at $k \geq N(V)$ medfører $(x_k) \subset V$.*

Vi vil nå jakte på topologien som har de riktige åpne mengdene når det gjelder å teste punktvis konvergens av funksjonsfølger.

Eksempel 1.15. La $X = F(Y)$ være ei samling reelle funksjoner på ei mengde Y, f. eks. kontinuerlige funksjoner på et intervall. Vi vil nå finne fram til et nettverk β på $F(Y)$ slik at konvergens av følger i topologien τ_β svarer til punktvis konvergens. For hver endelig mengde $A \subset Y$ og hver $\varepsilon > 0$, sett

$$U(f; A, \varepsilon) = \{g \in F(Y) \ : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ for alle } x \in A\}.$$

Da defineres ei samling $\beta(f)$ om hvert element $f \in X$. Vi skal nå se at konvergens av følger i τ_β svarer til punktvis konvergens.

La $f \in F(Y)$ og anta (f_n) konvergerer til f. Da inneholder enhver $U(f; A, \varepsilon)$ alle f_n fra en eller annen N av. Spesielt, hvis $x \in Y$, og $\varepsilon > 0$, så finnes $N = N(x, \varepsilon)$ slik at $n \geq N$ medfører at $f_n \in U(f, \{x\}, \varepsilon)$, dvs. $n \geq N$ medfører at $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, som akkurat betyr at $f_n \to f$ i punktet x.

Anta omvendt at $f_n \to f$ punktvis, la A være endelig og $\varepsilon > 0$ slik at $U(f; A, \varepsilon)$ blir gitt. Vi må vise at U inneholder alle bortsett fra endelig mange f_n. For hver $x \in A$ finnes $N(x)$ slik at $n \geq N(x)$ medfører $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. La N være den største av disse $N(x)$'ene. Da inneholder U alle f_n fra N av, dvs. alle bortsett fra endelig mange.

Du lurer gjerne på hvorfor vi varierte over alle endelige delmengder av Y når vi skulle teste konvergens i bare ett punkt om gangen. Det er for at β skal være et nettverk (se Oppgave 12(a)).

Definisjon 1.16. *La X være ei mengde. Ei* dekning *av X er ei samling av delmengder av X slik at unionen er lik X.*

Ei spesiell dekning er $\Delta = \{x\}_{x \in X}$. Ei anna dekning er $\Delta = \{X\}$. Ingen av dem er veldig interessante, men de er kjekke å ha som eksempler. Følgende resultat ser kanskje uskyldig ut, men viser seg å være veldig viktig.

Proposisjon 1.17. *Hvis Δ er ei dekning av X, så er samlinga β av endelige snitt av medlemmer fra Δ et nettverk på X.*

Grunnen til at dette er så viktig, er at vi nå kan bygge topologier så snart vi har ei dekning av X, og å skaffe seg ei dekning er ofte ganske lett å få til.

Bevis. La β være samlinga av mengder på formen $\cap_{i=1}^{k} A_i$, der $k \in \mathbb{N}$ og $A_i \in \Delta$. Legg merke til at $\Delta \subset \beta$. Vi må vise at β oppfyller B1 og B2 i Definisjon 1.7. Siden Δ er ei dekning finnes, for hver x, en $A \in \Delta$ slik at $x \in A$. Siden $\Delta \subset \beta$ følger B1. For å vise B2 lar vi $x \in U \cap V$, der $U = \cap_{i=1}^{k_1} U_i$ og $V = \cap_{i=1}^{k_2} V_i$, med $U_i, V_i \in \Delta$, $i = 1, 2, ...$ Men nå er $U \cap V = \bigcap_{i=1}^{k_1} U_i \cap \bigcap_{i=1}^{k_2} V_i$. Vi skal forklare at dette er et element i β, slik at B2 følger. Hvis $k_1 < k_2$, lar vi $U_{k_1+1} = U_{k_1+2} = ... = U_{k_2} = U_{k_1}$. Da er $U = \cap_{i=1}^{k_1} U_i = \cap_{i=1}^{k_2} U_i$, så vi kan anta $k_1 = k_2 = k$. Men nå er

$$U \cap V = \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i \right) = \bigcap_{i=1}^{k} (U_i \cap V_i).$$

□

Når vi starter med ei dekning, kan vi lage et nettverk, og fra nettverket kan vi lage en topologi. Om vi kombinerer det vi har lært, får vi følgende korollar:

Korollar 1.18. *Når Δ er ei dekning av X, så er samlinga av vilkårlige unioner av endelige snitt av medlemmer fra Δ en topologi på X.*

Vi kaller topologien bestående av vilkårlige unioner av endelige snitt av medlemmer fra dekninga Δ for *topologien generert av* Δ. Vi skal nå vise at topologien generert av Δ er den minste topologien som inneholder Δ. Men vi trenger et begrep til å måle størrelse av topologier. Dette ordner vi på en naturlig måte ved å si at topologien τ_1 er *grovere* enn topologien τ_2 dersom $\tau_1 \subset \tau_2$, dvs hvis τ_1 har færre åpne mengder enn τ_2 eller like mange åpne mengder som τ_2. Det omvendte av grovere er *finere,* så τ_1 er grovere enn τ_2 hvis og bare hvis τ_2 er finere enn τ_1. Vi bruker også uttrykkene *svakere* og *sterkere* for grovere og finere.

Nå kan vi vise et entydighetsteorem for topologien generert av Δ, og vi får en alternativ karakterisering også.

Teorem 1.19. *Topologien τ generert av dekninga Δ er den groveste topologien som inneholder Δ og den er lik snittet over alle topologier som inneholder Δ.*

Bevis. Vi vil først vise at snittet $\sigma = \cap_\alpha \tau_\alpha$ over en familie (τ_α) av topologier på X igjen er en topologi på X: T1 holder åpenbart for σ. La $(A_\gamma) \subset \sigma$ og se på $A = \cup_\gamma A_\gamma$. Sett $A_\gamma = \cap_\alpha B_\alpha^\gamma$ for mengder $B_\alpha^\gamma \in \tau_\alpha$. Da er, siden snitt og union kommuterer,

$$A = \bigcup_\gamma A_\gamma = \bigcup_\gamma \left(\bigcap_\alpha B_\alpha^\gamma \right) = \bigcap_\alpha \left(\bigcup_\gamma B_\alpha^\gamma \right) \in \bigcap_\alpha \tau_\alpha = \sigma,$$

siden $\cup_\gamma B_\alpha^\gamma \in \tau_\alpha$ fordi τ_α oppfyller T2. Dermed holder T2 for σ. T3 vises tilsvarende, og vi vet dermed at σ er en topologi på X.

La nå σ være snittet over alle topologier som inneholder Δ. Siden τ inneholder Δ må $\sigma \subset \tau$. At σ er den groveste topologien som inneholder Δ er klart. Det gjenstår dermed bare å vise at $\tau \subset \sigma$. Vi viser at enhver $A \in \tau$ oppfyller at $A \in \sigma$. La $A \in \tau$. Da kan vi fra definisjonen av τ skrive $A = \cup_\alpha (\cap_{n=1}^k B_n^\alpha)$, der $B_n^\alpha \in \Delta$. Men da er $B_n^\alpha \in \sigma$ siden $\Delta \subset \sigma$. Siden vi vet at σ er en topologi er den lukka under endelige snitt og vilkårlige unioner. Altså er $A \in \sigma$. $\square$

1.5 Mer om åpne og lukka mengder

Fra den reelle tallinja, og fra planet, kjenner du begreper som 'det indre av', 'tillukninga til' osv. Vi skal nå se at mange av disse kjente begrepene enkelt lar seg generalisere til topologiske rom. Vi starter fra en kant: Hvis (X, τ) er et topologisk rom og $A \subset X$, så definerer vi

- *det indre av* A, skrevet A^0, som unionen av alle åpne mengder i A. Dette er dermed den største åpne delmengde av A.
- *tillukninga av* A, skrevet $\overline{A}$, som snittet av alle lukka mengder som inneholder A. Dette er dermed den minste lukka mengde 'utenpå' A.

Vi har da disse sammenhengene:

Proposisjon 1.20. *For ei delmengde A av et topologisk rom X gjelder*

$$(A^0)^c = \overline{A^c} \quad og \quad (\overline{A})^c = (A^c)^0.$$

Bevis. Se Oppgave 14. □

Vi går videre med å generalisere begreper og definerer:

- *(den topologiske) randa av A*, skrevet ∂A, som differensen mellom tillukninga og det indre av A. Vi har altså $\partial A = \overline{A} \setminus A^0 = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ ved Proposisjon 1.20.
- at B *er tett i A* dersom $\overline{B} = A$. Hvis $(\overline{A})^0 = \emptyset$, dvs hvis tillukningen av A ikke inneholder noen ikke-triviell åpen mengde, sier vi at A er *ingensteds tett.*
- *grensepunktene til A,* skrevet $\mathrm{gr}(A)$, som de punkter $x \in X$ der $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ for alle åpne U om x.

Eksempel 1.21. La $C(\mathbb{R})$ være de kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R}$ inn i $\mathbb{R}$. Da er $C(\mathbb{R})$ tett i $F(\mathbb{R})$, mengda av reelle funksjoner på $\mathbb{R}$ i topologien av punktvis konvergens. Hvorfor det? Jo, vi trenger bare å vise at hver

$$U(g, \{x_1, x_2, ...x_n\}, \varepsilon) = \{f \in F(\mathbb{R}) \, : |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, \; j = 1, 2, ..., n\}$$

inneholder en kontinuerlig funksjon h. Men det er jo opplagt! Ordne $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ i stigende rekkefølge. La f.eks. h være null opp til $x_1 - 1$, lineær til x_1, der den har verdi $g(x_1)$, så stykkevis lineær til og med x_n med g sine funksjonsverdier i punktene $\{x_1, x_2, ...x_n\}$, så lineær til $x_n + 1$, med verdi null, og null derfra. Tenker vi oss om, ser vi at vi kan legge en uendelig glatt funksjon gjennom endelige mange punkt, om vi vil. Vi møter igjen denne situasjonen i Eksempel 2.17

Vi har følgende setning som viser at grensepunkt, tillukning og lukkethet blir bundet sammen slik vi kjenner fra de reelle tall og fra planet.

Proposisjon 1.22. *La X være et topologisk rom. Da gjelder at $\overline{A} = A \cup gr(A)$ og at A er lukket hvis og bare hvis $gr(A) \subset A$.*

Bevis. For å vise at $\overline{A} = A \cup \mathrm{gr}(A)$ må vi vise at $\mathrm{gr}(A) \subset \overline{A}$ og at $\overline{A} \subset A \cup \mathrm{gr}(A)$. Først at $\mathrm{gr}(A) \subset \overline{A}$. Hvis $x \notin \overline{A}$, så er $(\overline{A})^c$ ei åpen mengde om x slik at $(\overline{A})^c \setminus \{x\}$ ikke snitter A. Dermed er $x \notin \mathrm{gr}(A)$. Og hvis $x \notin A \cup \mathrm{gr}(A)$ må $x \in (A \cup \mathrm{gr}(A))^c = A^c \cap \mathrm{gr}(A)^c$. Siden $x \in \mathrm{gr}(A)^c$ finnes åpen $U \subset X$ om x med $A \cap U \setminus \{x\} = \emptyset$. Siden $x \in A^c$ har vi $U \cap A = \emptyset$. Dermed er $\overline{A} \subset U^c$ og $x \notin \overline{A}$. Siden A er lukka hvis og bare hvis $A = \overline{A}$, ser vi nå at A er lukka hvis og bare hvis $\mathrm{gr}(A) \subset A$. □

Vi vet at $\mathbb{Q}$ er tett i $\mathbb{R}$. For rommene ℓ_2^n finnes det ei tellbar delmengde som ligger tett, nemlig $\mathbb{Q}^n$. Vi kan nemlig tilnærme punktene i ℓ_2^n med vektorer der koordinatene er rasjonale, og det er veldig nyttig. Men vi kan ikke ta for gitt at det finnes tellbare, tette delmengder i alle topologiske rom; vi skal i Eksempel 1.26 se at selv normerte rom kan mangle denne egenskapen.

Definisjon 1.23. *Et topologisk rom kalles* separabelt *dersom det inneholder ei tellbar, tett delmengde.*[5]

[5]Begrepet separabilitet dukker første gang opp på side 23 i Maurice Fréchets doktoravhandling, publisert i 1906.

Eksempel 1.24. La $X = C[a,b]$. Et meget berømt resultat av Weierstrass sier at enhver kontinuerlig funksjon definert på et lukka, begrensa intervall $[a,b]$ kan approksimeres uniformt vilkårlig godt med et polynom. I vårt språk sier da Weierstrass' approksimasjonsteorem,[6] som vi gjerne kaller det, at polynomene på $[a,b]$ ligger tett i $C[a,b]$. Polynomene er ei tellbar mengde, så $C[a,b]$ er et separabelt, normert rom.

Her er et eksempel til på et separabelt normert rom, nemlig Hilberts rom av følger:

Eksempel 1.25. La $X = \ell_2$. La Y være samlinga av endelige følger, dvs følger der det finnes et k slik at $x_n = 0$ for alle $n \geq k$. Fra definisjonen av normen i ℓ_2 ser vi at Y er tett i ℓ_2. Y er ikke tellbar, men samlinga av rasjonale følger er tellbar. La Y' være samlinga av rasjonale, endelige følger. Vi vil vise at Y' er tett i ℓ_2. La $x = (x_n) \in \ell_2$ og $\varepsilon > 0$. Velg først N slik at $\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon/2$. Siden $\mathbb{Q}$ er tett i $\mathbb{R}$, kan vi velge, for $n = 1, 2, 3, ..., N$, rasjonale tall $q_1, q_2, ...$ slik at $|x_n - q_n| < \sqrt{(\varepsilon/2) \cdot 2^{-n}}$. Sett $q_n = 0$ for $n > N$. Da er

$$\begin{aligned}
\|(x_n) - (q_n)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - q_n|^2 = \sum_{n=1}^{N} |x_n - q_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n - q_n|^2 \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vi har dermed vist at Y' er tett i ℓ_2 og følgelig at ℓ_2 er separabelt.

Vi har lovet deg et ikke-separabelt normert rom:

Eksempel 1.26. Tenk deg mengda av alle begrensa følger av reelle tall, altså mengda av reelle følger (x_n) slik at $\sup_n |x_n| < \infty$. Koordinatvis addisjon og multiplikasjon med skalar gjør mengda til et vektorrom. Sett nå $\|(x_n)\| = \sup_n |x_n|$. Da er $\|\cdot\|$ en norm og vi har altså at mengda av begrensa, reelle følger er et normert rom. Rommet kalles ℓ_∞. Legg merke til at distansen mellom to følger i ℓ_∞ er største forskjell i koordinater.

Se nå på mengda E av alle reelle følger med $x_n = \pm 1$. E er overtellbar. Hvis (x_n) og (y_n) er to ulike følger fra E, må de være ulike på minst en koordinat. Men da er $\|(x_n) - (y_n)\| = 2$. Altså finnes en overtellbar familie i ℓ_∞ der avstanden mellom elementene er 2. Da kan ikke ℓ_∞ ha noen tellbar tett delmengde. For i såfall kunne vi legge ei skive med radius $1/2$ om hver $x_n \in E$ og finne et element fra den tellbare mengda i hver av disse skivene. Men det går jo ikke, det er jo overtellbart mange slike skiver.

Mengda E er også et eksempel på ei stor ingensteds tett mengde. Vi skal lære mer om denne mengda i Kapittel **??**.

1.6 Klassifisering av topologiske rom

Du har neppe særlige problemer med å være enig i at begrepet topologisk rom er temmelig generelt. Likevel greide vi å få fram så presise resultater som vi har møtt til nå. Vi skal senere se at vi skal få mange flere sterke og generelle resultater for topologiske rom. Men det skal vise seg at om vi legger på ekstrakrav på topologiene, så får vi ofte mye sterkere resultater. Et eksempel: I $\mathbb{R}$ er grensepunktene de punktene x der det finnes ei følge som konvergerer til x.

[6] Karl Weierstrass (1815-1897) viste dette resultatet rundt 1885. Vi kan også formulere det som at span $\{t^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ er tett i $C[a,b]$. Müntz-Szasz teoremet fra 1916 sier at k trenger gjennomløpe ei delmengde B av $\mathbb{N}$ slik at $\sum_{k\in B} 1/k = \infty$ for at span $\{t^k\}_{k\in B}$ er tett i $C[a,b]$.

I generelle topologiske rom er det ikke sånn. Men hvis topologien oppfyller litt ekstra, så kan vi finne grensepunktene ved hjelp av følger. Først en definisjon og et eksempel:

Definisjon 1.27. *Et topologisk rom (X, τ) kalles* førstetellbart *dersom det finnes et nettverk β for τ slik at $\beta(x)$ er tellbar for hver $x \in X$. Dersom selve nettverket består av et tellbart antall elementer, sier vi at X er* andretellbart.

Eksempel 1.28. La $X = F(Y)$ være mengda av reelle funksjoner på Y og la τ være topologien av punktvis konvergens på τ. Da er et nettverk for τ gitt lokalt ved $\beta(f) = \{U(f; A, \frac{1}{n})\}$, der A er endelige mengder og $n \in \mathbb{N}$ (Se Oppgave 12(b)). Samlinga av endelige delmengder av ei mengde er enten endelig (og lik $2^{\mathrm{card}(Y)}$ når Y er endelig) eller overtellbart uendelig (ellers) (Se Oppgave 20). Så τ er altså ikke førstetellbar med mindre Y er ei endelig mengde.

La så X være et normert rom. Da finnes et nettverk av skiver $U(x, \frac{1}{n})$ om hvert punkt x. Altså er rommet førstetellbart. Men det er ikke andre tellbart med mindre det er separabelt (se Oppgave 19).

Hvis $A \subset X$ og $x \in X$ er slik at det finnes ei følge $(x_n) \subset A \setminus \{x\}$ der $x_n \to x$, kaller vi punktet x et *følgegrensepunkt* for A. Fra definisjonen av grensepunkt har vi at alle følgegrensepunkt er grensepunkt.

Proposisjon 1.29. *For ei delmengde A i et førstetellbart topologisk rom X er grensepunktene følgegrensepunkt.*

Bevis. Vi begynner med en viktig observasjon: For hver $x \in X$ kan vi anta den tellbare samlinga $\beta(x) = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oppfyller $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset ....$ Hvorfor det? Jo, hvis $\beta(x) = (U_n^x)_{n \in \mathbb{N}}$ er gitt i utgangspunktet for hver x, sett $V_j^x = \cap_{n=1}^{j} U_n^x$. Da oppfyller samlinga $(V_n^x)_{n \in \mathbb{N}, x \in X}$ fortsatt B1 og B2.

La nå $x \in X$ være et grensepunkt for A. Velg en tellbar $\beta(x) = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ slik at $V_j \supset V_{j+1}$. Siden x er grensepunkt er $V_j \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Altså finnes $x_j \in V_j$ slik at $x_j \in A \setminus \{x\}$. Siden $V_j \supset V_{j+1}$ og konvergens mot x avgjøres ved å studere de åpne mengdene om x som hører til nettverket, følger resultatet. □

Vi har følgende setning om andretellbare rom:

Proposisjon 1.30. *Ethvert andretellbart rom er separabelt.*

Bevis. La $\beta = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. For hver n velg $x_n \in V_n$. La $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Vi skal vise at A er tett i X. Vi må vise at $\overline{A} = X$. Vi vet at $(\overline{A})^c$ er ei åpen mengde som ikke inneholder noen elementer fra nettverket (V_n). Eneste mulighet er $(\overline{A})^c = \emptyset$, altså at $\overline{A} = X$. □

Første- og andretellbarhet er klassifiseringer som angår hvor mange elementer nettverket består av. En annen viktig klassifisering går på å kunne skille elementer og delmengder i X ved hjelp av åpne mengder. Tenk deg ei følge (x_n) og anta at det er sånn at $\beta(x) = \beta(y)$ for to punkter x og y i X. Hvis $x_n \to x$ vil jo da nødvendigvis også $x_n \to y$. Vi skal nå blant annet finne krav til topologien slik at vi slipper denne skavanken. Vi tar med fire separasjonskrav:

Definisjon 1.31. *En topologi τ på ei mengde X sies å være*

- *T_1 dersom $x \neq y$ medfører at det eksisterer $U \in \tau(x)$ med $y \notin U$. Et topologisk rom kalles T1 dersom det har en T1 topologi.*

- T_2 *eller* Hausdorff *dersom* $x \neq y$ *medfører at det eksisterer* $U \in \tau(x), V \in \tau(y)$ *med* $U \cap V = \emptyset$. *Et topologisk rom kalles* Hausdorffrom *dersom det har en Hausdorfftopologi.*[7]

- T_3 *eller* regulær *dersom det er* T_1 *og hvis* A *er lukket og* $x \notin A$, *så finnes disjunkte* $U, V \in \tau$ *med* $U \in \tau(x)$ *og* $A \subset V$. *Et topologisk rom kalles* regulært *dersom det har en regulær topologi.*

- T_4 *eller* normal *dersom det er* T_1 *og hvis* A, B *er lukka og disjunkte, så finnes disjunkte* $U, V \in \tau$ *med* $A \subset U$ *og* $B \subset V$. *Et topologisk rom kalles* normalt *dersom det har en normal topologi.*

Vi har ei viktig ekvivalent formulering av at X er T_1:

Proposisjon 1.32. *Et topologisk rom* X *er* T_1 *hvis og bare hvis* $\{x\}$ *er ei lukka mengde for alle* $x \in X$.

Bevis. Hvis $\{x\}$ er lukka, så er $\{x\}^c$ ei åpen mengde som skiller enhver $y \neq x$ fra x. Hvis X er T_1 og $x \in X$, kan vi for ethvert $y \in \{x\}^c$ velge åpen U_y om y slik at $x \notin U_y$. Men nå er $\{x\}^c = \cup_{y \in \{x\}^c} U_y$, en union av åpne mengder. Dermed er $\{x\}^c$ ei åpen mengde, og følgelig er $\{x\}$ lukka. □

Korollar 1.33. *Normale rom er regulære og regulære rom er Hausdorff.*

De aller, aller fleste rom vi skal komme i befatning med er Hausdorff.

1.7 Relative topologier

Dersom (X, τ) er et topologisk rom og Y er ei delmengde av X, så arver Y en topologi fra X på en naturlig måte: Vi ser på familien τ_Y av mengder av typen $\{U \cap Y \ : U \in \tau\}$. Du kan nå sjekke at $T1 - T3$ er oppfylt for samlinga τ_Y (se Oppgave 25). Vi kaller τ_Y for den *relative topologien* på Y.

Når delmengda $Y \subset X$ er utstyrt med den relative topologien, kaller vi Y et *delrom, subrom* eller *underrom* av det topologiske rommet X. Det er fort gjort å gjøre tabber ved overgang fra opprinnelig topologi til relativ topologi. La oss se på et eksempel.

Eksempel 1.34. La (X, τ) være $\mathbb{R}$ utstyrt med vanlig Euklidsk topologi. La $Y = [0, 1]$. Da er mengda $A = (1/2, 1]$ ikke åpen i $\mathbb{R}$, men den er åpen i (Y, τ_Y) fordi $A = Y \cap (1/2, 2)$.

Vi kjenner allerede eksempler på relative topologier:

Eksempel 1.35. La (X, τ) være $\mathbb{R}^2$ utstyrt med vanlig Euklidsk topologi. La $Y = \mathbb{R}$. Da er den vanlige Euklidske topologien på $\mathbb{R}$ den nedarva topologien.

La X være topologisk rom og Y et subrom. Ei delmengde A av Y kan altså være relativt åpen i Y uten å være åpen i X. Men hvis den er åpen i X, så er den også åpen i Y. Hvis Y er åpen i X, så oppstår ikke problemer, da er åpne delmengder åpne også i X.

[7] I boka *Grundzüge der Mengenlehre,* som kom ut i 1914, ga Felix Hausdorff (1868-1942) ei aksiomatisering som svarer til Hausdorffrom og utledet fra disse mange av de fundamentale resultatene for topologiske rom. På den måten kan vi gi Hausdorff hovedæren for den generelle topologi, men han hadde gigantiske skuldre å stå på, som f.eks Bernhard Riemann og Georg Cantor. I allefall skulle Hausdorffs bok vise seg å bli en av de viktigste milepæler for utvikling av moderne matematikk.

1.8 Oppgaver

Oppgaver til Seksjon 1.1 og 1.2

Oppgave 1. Vi skal definere to normer, $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_\infty$ på vektorrommet $\mathbb{R}^2$ ved at $\|x\|_1 = \|(a,b)\|_1 = |a| + |b|$ og $\|x\|_\infty = \|(a,b)\|_\infty = \max\{|a|,|b|\}$.

(a) Vis at $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_\infty$ er normer på $\mathbb{R}^2$ og at $\|x\|_1 \geq \|x\|_\infty$ for alle $x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Tegn inn $\{x\ : \|x\| = 1\}$ for hver av normene $\|\cdot\|_1$ og $\|\cdot\|_\infty$. Bestem de $x \in \mathbb{R}^2$ slik at $\|x\|_1 = \|x\|_\infty$.

(c) Tegn også inn $\{x\ : \|x\|_2 = 1\}$. Sammenlikn de tre normene.

(d) Bestem alle punkter i avstand 1 fra punktet $(1,1)$ for hver av de tre normene $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ og $\|\cdot\|_\infty$.

De tre normerte rommene du møtte her kalles ℓ_1^2, ℓ_2^2 og ℓ_∞^2.

Oppgave 2. Vi skal studere mengda X av absolutt konvergente rekker av reelle tall.

(a) Vis at X er et vektorrom.

(b) Vi definerer den relle funksjonen ϕ på X ved at $\phi(x) = \phi((x_n)) = \sum |x_n|$. Vis at ϕ er en norm på X. X sammen med normen ϕ er mer kjent som det normerte rommet ℓ_1. Vi skal møte det mange ganger.

Oppgave 3. Vis at avstandsfunksjonen på $C[a,b]$ gitt i Eksempel 1.4, Likning (1.2) er en norm på vektorrommet $C[a,b]$.

Oppgaver til Seksjon 1.3

Oppgave 4. Vi skal nå møte to topologier som finnes på enhver mengde X.

(a) La $\tau = \{\emptyset, X\}$. Vis at τ er en topologi på X og at alle følger av elementer fra X konvergerer til alle punkter i X. τ kalles den *trivielle topologien* på X.

(b) La $\tau = \mathcal{P}(X)$, potensmengda til X. Vis at τ er en topologi på X. Hvilke følger er konvergente i dette rommet? τ kalles den *diskrete topologien* på X.

Oppgave 5. La $X = \{a,b,c\}$. La $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}$ og $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{c\}\}$.

(a) Vis at τ_1 og τ_2 er topologier på X.

(b) Undersøk om $\tau_1 \cup \tau_2$ er en topologi.

(c) Bestem den minste topologien som inneholder både τ_1 og τ_2.

Oppgave 6. La X være ei delvis ordna mengde, kall ordninga $<$. Si at U er åpen hvis den oppfyller at for hver $x \in U$ finnes alle $y \in X$ med $y < x$. Vis at samlinga av åpne U er en topologi på X.

Oppgave 7. La $X = \mathbb{N}$. Si at $U \subset \mathbb{N}$ er åpen dersom U oppfyller følgende betingelse: $n \in U \Rightarrow k \in U$ for alle faktorer k av n. Vis at denne samlinga av åpne mengder er en topologi på $\mathbb{N}$. Vis også at det ikke er den diskrete topologien (Se Oppgave 4).

Oppgave 8. La X være ei mengde og τ en topologi på X. Vis at τ er den diskrete topologien (Se Oppgave 4) hvis og bare hvis ethvert punkt er ei åpen mengde.

Oppgave 9. La $f : X \to Y$ være en funksjon. For $A \subset Y$ sett

$$f^{-1}(A) = \{x \in X\ : f(x) \in A\}.$$

(a) Bestem $f^{-1}(\emptyset)$ og $f^{-1}(Y)$.

(b) Vis at $f^{-1}(\cup_\alpha A_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$ for $(A_\alpha) \subset \mathcal{P}(Y)$.

(c) Vis at $f^{-1}(\cap_\alpha A_\alpha) = \cap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$ for $(A_\alpha) \subset \mathcal{P}(Y)$.

(d) Forklar at topologien definert i Eksempel 1.11 virkelig er en topologi på X.

(d) Er $f(\cup_\alpha A_\alpha) = \cup_\alpha f(A_\alpha)$ eller $f(\cap_\alpha A_\alpha) = \cap_\alpha f(A_\alpha)$? (fasit: ja, nei).

Oppgaver til Seksjon 1.4

Oppgave 10. La $X = \mathbb{R}^2$.

(a) La ei dekning være gitt ved alle rette linjer. Finn topologien.

(b) La ei dekning være gitt ved alle rette linjer parallelle med x-aksen. Beskriv de åpne mengdene.

Oppgave 11. La X være mengda av reelle 2×2-matriser. Definer, for hver matrise $A \in X$ og hver $r > 0$,

$$U(A, r) = \{B \in X \ : |a_{ij} - b_{ij}| < r\}.$$

(a) Vis at $\{U(A, r) \ : A \in X, r > 0\}$ er et nettverk for en topologi τ på X.

(b) La $A = I$. Finn ei følge (A_n) av matriser som konvergerer til I i topologien τ.

Oppgave 12. (a) Vis at samlinga $\{U(f, A, \varepsilon)\}$ definert i Eksempel 1.15 er et nettverk.

(b) Vis at om vi lar ε bare gjennomløpe brøkene $1/n, n \in \mathbb{N}$, så genereres samme topologien.

Oppgave 13. *La* $X = C[0, 1]$.

(a) Finn ei følge $(f_n) \subset C[0, 1]$ som konvergerer punktvis til 0 men ikke uniformt til null.

(b) Vis at hvis $f_n \to f$ uniformt, så er $f \in C[0, 1]$.

Oppgaver til Seksjon 1.5

Oppgave 14. La (X, τ) være et topologisk rom og la $A \subset X$. Vær sikker på at du kan De Morgans lover før du begynner.

(a) Vis at samlinga $\overline{\tau}$ av lukka mengder inneholder $\emptyset$, X og at $\overline{\tau}$ er lukka under endelige unioner og vilkårlige snitt.

(b) Vis at $(A^0)^c = \overline{A^c}$ og $(\overline{A})^c = (A^c)^0$.

Oppgave 15. Finn tillukning, indre og rand til følgende mengder:

(a) $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} = \ell_2^1$.

(b) $\{(a, b) \ : a, b \in \mathbb{Q}\}$ i ℓ_2^2.

(c) $\{(x, 0) \ : 0 < x < 1\}$ i ℓ_2^2.

Oppgave 16. Vis at hvis $E_1, E_2, ..., E_n$ er delmengder av et topologisk rom, så er

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{E_i}.$$

Oppgave 17. La X være ei mengde. Ei avbildning $* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, skrevet $*(A) = A^*$, slik at

(K1) $\emptyset^* = \emptyset$.

(K2) $A \subset A^*$ for alle $A \subset X$.

(K3) $(A^*)^* = A^*$ for alle $A \subset X$.

(K4) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$ for alle $A, B \subset X$.

kalles en *Kuratowski tillukningsoperator.*

(a) Vis at hvis (X, τ) er et topologisk rom, så er avbildninga $A \to \overline{A}$ en Kuratowski tillukningsoperator (se Oppgave 16).

(b) Hvis $*$ er en Kuratowski tillukningsoperator, definer $L = \{A \subset X \ : A = A^*\}$ og $\tau = \{U \subset X \ : U^c \in L\}$. Vis at da er τ en topologi på X.

(c) Vis at A^* faller sammen med τ-tillukningen for alle $A \subset X$.

Oppgaver til Seksjon 1.6

Oppgave 18. La X være ei uendelig mengde og definer en topologi τ på X slik: Ei delmengde U av X er åpen hvis og bare hvis $U = \emptyset$ eller U^c er endelig. Denne topologien kalles endelig-komplement-topologien på X.

(a) Vis at τ er en topologi.

(b) Vis at τ er T_1 men ikke T_2.

(c) Vis at hvis (x_n) er ei ikke-konstant følge i X, så vil $x_n \to x$ for alle $x \in X$.

(d) Vis at τ er førstetellbar hvis og bare hvis X er tellbart.

Oppgave 19. Tenk deg følgende situasjon:

Vi kjenner et nettverk $\beta = \beta(x)_{x\in X}$ for en topologi τ på ei mengde X. Så kjenner vi ei delsamling γ av β med den egenskap at hver gang $A \in \beta$ og $x \in A$, så finnes $A' \in \gamma$ med $A' \subset A$ og $x \in A'$. La oss kalle en slik γ for et undernettverk av β.

(a) La β være samlinga av åpne intervaller i $\mathbb{R}$. La γ være samlinga av åpne intervaller med rasjonale endepunkt. Forklar at γ er et undernettverk av β.

(b) Vis at betegnelsen undernettverk er rimelig ved å vise at γ er et nettverk og at $\tau(\gamma) = \tau(\beta)$.

(c) La X være et normert rom. Vis at X er førstetellbart.

(d) Vis at hvis X er et separabelt normert rom, så er X andretellbart.

Oppgave 20. La A være ei tellbart uendelig mengde. Vis at samlinga $\mathcal{P}(A)$ av delmengder av A er overtellbar. (Hint: Vis at det finnes en 1-1 sammenheng mellom denne samlinga og samlinger av følger danna av talla 0 og 1.)

Oppgave 21. La $\beta = \{(a, b] \, : -\infty < a < b < \infty\}$.

(a) Vis at β er et nettverk på $\mathbb{R}$.

(b) La $\tau = \tau_\beta$. Vis at medlemmene i β er både åpne og lukka (clopen) i topologien τ.

(c) Forklar at τ er førstetellbar men ikke andretellbar.

(d) $\mathbb{Q}$ er τ-tett i $\mathbb{R}$, så $(\mathbb{R}, \tau)$ er et separabelt rom som ikke er andretellbart.

Oppgave 22. Vis følgende sats:

Hvis X er et topologisk rom, $U \subset X$ er åpen og A er tett i X, så er $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.

Oppgaver til Seksjon 1.7

Oppgave 23. Beskriv den relative topologien på $\{x \, \|x\| = 1\}$ som et subrom av ℓ_2^2.

Oppgave 24. Vis at den relative topologien på $\mathbb{Q}$ som subrom av $\mathbb{R} = \ell_2^1$ ikke er den diskrete topologien.

Oppgave 25. (a) Vis at den relative topologien på et delrom av et topologisk rom virkelig er en topologi.

(b) Vis at T_1 og T_2 nedarves til relativ topologi.

(c) Vis at T_3 nedarves til relativ topologi.

(d) Vis at T_4 nedarves til lukka subrom, dvs subrom som også er lukka i opprinnelig topologi. (Det finnes eksempler på at nedarving av normalitet ikke holder.)

Kapittel 2

Kontinuerlige funksjoner og kompakte mengder

Noe av poenget med topologier er at vi kan avgjøre om funksjoner er kontinuerlige. Når vi har gjort det kan vi jo lure på om vi kunne ha endret på topologiene og fortsatt hatt kontinuitet. Denne ideen leder oss til å definere topologier slik at kontinuitet akkurat såvidt holder. Når vi vet hva kontinuitet er, blir spørsmålet: Kan vi være sikre på at det eksisterer kontinuerlige, reelle funksjoner på X? Vi kommer til å se at dette spørsmålet er nær knyttet til normalitet av X.

Vi har antydet at grensepunkt ikke alltid kan nås ved følgegrenser. Vi skal i dette kapitlet gi eksempler som viser at følgegrenser ikke fanger opp alle grensepunkt, og vi skal så utvide følgebegrepet til såkalte nett, slik at det utvida følgebegrepet fanger opp grensene. Når dette er gjort skal vi studere kompakthet, og vi skal se at det er sammenhenger mellom kontinuitet, nett og kompakthet. Disse studiene leder oss til fire ulike typer kompakthet; heldigvis faller mange av dem sammen når vi legger på krav som førstetellbarhet eller normalitet.

Vi skal så lære om metriske rom, en type topologiske rom som er førstetellbare og normale, og enda litt til. Dette lille ekstra gjør at alle kompakthetstypene faller sammen, og vi kommer til å få enda en karakterisering av kompakthet for metriske rom på kjøpet. Normerte rom er alltid metriske; det blir nyttig når vi skal gå normerte rom nøyere etter i sømmene i neste kapittel. I forbindelse med studiet av normerte rom skal vi få bruk for Tychonoffs teorem, så det tar vi med til slutt. I argumentet for Tychonoffs teorem skal vi forresten for første gang møte 'Axiom of Choice', eller 'Utvalgsaksiomet' som det heter på norsk.

Det er et stort program vi har satt opp for ett kapittel, høydepunkter fra perioden 1900-1930 kommer som perler på ei snor og fundamentale begreper og sammenhenger introduseres. Noen av sammenhengene er ganske dype, f. eks. er beviset for Urysohns lemma mye vanskeligere enn noe vi har gjort til nå. Dersom du skulle få problemer med detaljene der, forsøk å se linjer og gå heller tilbake dit senere. Nei, la oss ikke prate oss bort, best å komme i gang!

2.1 Kontinuitet, svake topologier og produkttopologi

La X og Y være topologiske rom og anta $f : X \to Y$. Vi ønsker å generalisere kontinuitetsbegrepet til denne generelle situasjonen. For $X = Y = \mathbb{R}$, med vanlig topologi, er kontinuitet i x definert slik: *For enhver $\varepsilon > 0$ finnes et $\delta > 0$ slik at hvis $|x - y| < \delta$, så er $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.* La oss si dette med skiver: *For enhver skive B om $f(x)$ i Y skal det finnes ei skive A om x i X slik at $f(A) \subset B$.* Denne siste måten å si det på kan brukes generelt, og gir oss en utvidelse av kontinuitetsbegrepet til topologiske rom.

Definisjon 2.1. *La X og Y være topologiske rom og anta $f : X \to Y$. f kalles* kontinuerlig i $x \in X$ *hvis det for hver åpen mengde U om $f(x)$ finnes ei åpen mengde V om x slik at $f(V) \subset U$. f kalles* kontinuerlig *hvis den er kontinuerlig i alle punkt.*

Neste observasjon er viktig:

Proposisjon 2.2. *La X og Y være topologiske rom og anta $f : X \to Y$.*

(i) f er kontinuerlig hvis og bare hvis $f^{-1}(V)$ er åpen i X for alle åpne V i Y hvis og bare hvis $f^{-1}(V)$ er lukka i X for alle lukka V i Y.

(ii) Hvis topologien på Y er generert av ei dekning Δ, så er f kontinuerlig hvis og bare hvis $f^{-1}(V)$ er åpen i X for alle $V \in \Delta$.

Bevis. Vi viser først punkt (i): Anta f er kontinuerlig og la V være åpen i Y. For hvert punkt $x \in f^{-1}(V)$ kan vi velge åpne U_x slik at $f(U_x) \subset V$. Men kravet $f(U_x) \subset V$ medfører $U_x \subset f^{-1}(V)$ og siden U_x finnes for alle $x \in f^{-1}(V)$, får vi $f^{-1}(V) = \cup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$, en union av åpne mengder.

Anta så at f sine inversbilder av åpne mengder er åpne og at $x \in X$. La $V \subset Y$ være åpen om $f(x)$. La $U = f^{-1}(V)$. Da er U åpen om x og $f(U) \subset V$ (vi har egentlig $f(U) = V$).

At vi likegodt kan teste på lukka mengder skyldes at lukka mengder er nøyaktig komplementene av de åpne og at komplementer bevares under inversavbildning.

Så viser vi punkt (ii): Hvis f er kontinuerlig er selvsagt $f^{-1}(V)$ åpen for alle $V \in \Delta$, siden elementene i Δ er spesialtilfeller av åpne mengder.

Omvendt, hvis V er åpen i Y, så vet vi at V er på formen $\cup_\alpha \cap_{i=1}^{k(\alpha)} V_i^\alpha$ for $V_i^\alpha \in \Delta$. Men unioner og snitt bevares under inverse avbildninger, så $f^{-1}(V) = \cup_\alpha \cap_{i=1}^{k(\alpha)} f^{-1}(V_i^\alpha)$, en union av endelige snitt av åpne mengder. $\square$

Eksempel 2.3. La $X = C^{(1)}[0,1] = \{f \in C[0,1] \ : f' \in C[0,1]\}$, altså mengden av deriverbare funksjoner på $[0,1]$. La $Y = C[0,1]$. La X og Y ha uniform norm og se på funksjonene $\phi, \psi : X \to Y$ gitt ved at $[\phi(f)](t) = \int_0^t f(x)\, dx$ og $[\psi(f)](t) = f'(t)$. Vi skal se at ϕ er kontinuerlig mens ψ ikke er kontinuerlig.

La oss først vise at ϕ er kontinuerlig. Vi bruker punkt (ii) i Proposisjon 2.2 til å godtgjøre at vi kan studere kontinuitet ved å bruke skiver. La f være vilkårlig i X og slå ei skive U om $\phi(f)$ med radius ε. Men hvis nå V er ei skive om f, med radius ε

eller mindre, og g ligger i denne skiva, har vi at

$$\begin{aligned}
\|\phi(f)-\phi(g)\| &= \sup_{t\in[0,1]} |\int_0^t f(x)\,dx - \int_0^t g(x)\,dx| = \sup_{t\in[0,1]} |\int_0^t \{f(x)-g(x)\}\,dx| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^t |f(x)-g(x)|\,dx \leq 1\cdot \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| \\
&\leq \|f-g\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Dette viser at $\phi(V) \subset U$. Siden dette gjelder for alle f har vi vist at 'integrasjonsfunksjonen' ϕ er kontinuerlig fra X inn i Y.

Så skal vi forsøke å overbevise oss om at 'derivasjonsfunksjonen' ψ er diskontinuerlig. Vi skal vise at den er diskontinuerlig i punktet $f=0$. Vi skal vise at uansett hvor lita skive vi slår om $f=0$, så finnes en deriverbar g inni denne skiva med $g'(1) > 1/2$. Anta vi har slått ei skive om $f=0$ med radius ε. Velg $n \in \mathbb{N}$ slik at $n > 1/\varepsilon$ og sett $g(t) = (\varepsilon/2)t^n$. Da er g deriverbar og $\|f-g\| = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| = \varepsilon/2 < \varepsilon$, så g er med i skiva med radius ε om $f=0$. Men

$$g'(t) = \frac{n\varepsilon}{2}t^{n-1}, \text{ så } g'(1) > 1/2,$$

dvs. $\psi(g)$ ligger utenfor skiva om $\psi(f)$ med radius $1/2$. Siden ε var vilkårlig, følger det at ψ er diskontinuerlig i $f=0$.

Hvis $f : X \to Y$ er en kontinuerlig bijeksjon slik at f^{-1} også er kontinuerlig, kalles f en *homeomorfi*. Når det finnes en homeomorfi mellom X og Y, kalles X og Y *homeomorfe.* X og Y har da 'de samme åpne mengdene' og er dermed 'like' som topologiske rom betrakta.

Nå kommer en uhyre sentral ide: Anta Y er et topologisk rom og $f : X \to Y$. Den groveste topologien på X slik at f er kontinuerlig må i følge Proposisjon 2.2 (i) være topologien gitt ved inverse bilder av åpne mengder i Y. Denne topologien møtte vi allerede i Eksempel 1.11 og Oppgave 9 i Kapittel 1. Anta så at vi har to funksjoner $f_1 : X \to Y$ og $f_2 : X \to Y$. Den groveste topologien som gjør begge disse kontinuerlige må være topologien generert av mengdene $\{f_i^{-1}(U)\ : U \text{ åpen i } Y\ , i = 1,2\}$. Vi må bruke topologien generert av disse mengdene fordi unionen av to topologier ikke nødvendigvis er en topologi (se Oppgave 5 i Kapittel 1). Men vi brukte ingensteder at f'ene har samme bilderom, vi kunne likegodt hatt $f_1 : X \to Y_1$ og $f_2 : X \to Y_2$ der Y_1, Y_2 er topologiske rom.

Nå tar vi et kjempeskritt og generaliserer ideen vår:

Definisjon 2.4. *La $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ være ei samling topologiske rom og $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Den groveste topologien på X som gjør alle disse f'ene kontinuerlige er topologien generert av mengdene $\{f_\alpha^{-1}(U)\ : U \text{ åpen i } Y_\alpha\ , \alpha \in A\}$. Denne topologien kalles den* svake topologien generert av $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Vi skal igjen spesialisere. Hvis $X = X_1 \times X_2$ er det kartesiske produktet av mengdene X_1 og X_2, har vi to naturlige funksjoner definert på X, nemlig projeksjonene π_1 og π_2. (Projeksjonen π_1 er definert på X og leverer som funksjonsverdi punktets førstekoordinat.) Nå kan vi lage den svake topologien generert av π_1 og π_2. Denne topologien kalles *produkttopologien* på X. Samme ide går for produktet over en vilkårlig indeksmengde hvis vi vet hvordan vi danner slike produkter.

Vi tar et lite sidesteg for å forklare hvordan vi danner kartesiske produkter over vilkårlige familier. For å se hvordan dette kan gjøres, må vi ta utgangspunkt i det kjente. Hva er egentlig $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$? Jo, det er samlingen av n-tupler $(x_1, x_2, ..., x_n)$ der $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Men hvert sånt n-tuppel kan vi oppfatte som en funksjon f fra mengden $\{1, 2, ..., n\}$ inn i $\cup_{i=1}^n X_i$ med den egenskap at $f(i) \in X_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Og omvendt, hver gang vi har en sånn funksjon, dannes det et n-tuppel. Det er altså en 1-1 sammenheng mellom n-tuplene og funksjonene fra $\{1, 2, ..., n\}$ inn i $\cup_{i=1}^n X_i$ som oppfyller $f(i) \in X_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Nå kan vi definere $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ som mengden av funksjoner f fra A inn i $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ med egenskapen at $f(\alpha) \in X_\alpha$ for alle $\alpha \in A$. Projeksjonen π_α blir i denne settingen definert ved $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$.

Tilbake til topologien vår:

Definisjon 2.5. *La $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ være ei samling topologiske rom. Produkttopologien på $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ er den svakeste topologien slik at projeksjonene er kontinuerlige. Som konvensjon gis alltid produktet $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ denne topologien om ikke annet eksplisitt er angitt.*

Vi spesialiserer enda mer. Tenk deg at alle X_α'ene var ett og samme rom, vi kaller det X. Da er $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ altså samlinga av funksjoner fra A inn i X. Vi skriver denne samlinga som X^A. Denne samlingen har du møtt da vi definerte topologien av punktvis konvergens i Eksempel 1.15. Nå skal vi se at sammenhengen med Eksempel 1.15 virkelig er til stede:

Teorem 2.6. *Hvis X er et topologisk rom og A er ei mengde, så er produkttopologien på X^A lik topologien av punktvis konvergens.*

Bevis. Fra entydighetsteoremet, Teorem 1.19, er det nok å vise at de to topologiene har felles nettverk. Ved å generalisere Eksempel 1.15 ser vi at et nettverk for topologien av punktvis konvergens er gitt ved mengdene av typen

$$U(f, B, V) = \{g \in X^A \ : f(B) \subset V\},$$

der B er endelig delmengde av A og V er åpen i X. Det gjenstår å skrive et nettverk for produkttopologien. Fra definisjonen av produkttopologien vet vi at denne er generert av mengdene $\pi_\alpha^{-1}(V)$ der V er åpen i X. Men siden $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$, får vi

$$\pi_\alpha^{-1}(V) = \{g \in X^A \ : g(\alpha) \in V\}.$$

Dette er ei dekning av X^A. For å få et nettverk må vi ta alle endelige snitt av slike mengder. Disse blir på formen

$$\bigcap_{\alpha \in B} \pi_\alpha^{-1}(V) = \{g \in X^A \ : g(\alpha) \in V \text{ for alle } \alpha \in B\} = \{g \in X^A \ : g(B) \subset V\},$$

der B er endelig delmengde av A, og vi har vist at de to topologiene har samme nettverk. □

Når vi senere skal bevise Alaoglu's teorem, spiller Teorem 2.6 en sentral rolle. Vi går videre med to nyttige resultater om generell produkttopologi:

Proposisjon 2.7. *Hvis X_α er Hausdorff for hver α, så er $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ Hausdorff.*

Bevis. La $x, y \in X$ slik at $x \neq y$. Det må nå finnes en $\alpha \in A$ slik at $\pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(y)$, ellers var de jo like. Men X_α er Hausdorff så vi kan finne åpne U_α og V_α i X_α slik at $\pi_\alpha(x) \in U_\alpha$, $\pi_\alpha(y) \in V_\alpha$ og $U_\alpha \cap V_\alpha = \emptyset$. Men nå er $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ og $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ to åpne mengder i X som skiller x fra y. □

Proposisjon 2.8. *Hvis X_α er topologiske rom, Y er et topologisk rom og $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$, så har vi at $f : Y \to X$ er kontinuerlig hvis og bare hvis $\pi_\alpha \circ f$ er kontinuerlig for hver α.*

Bevis. Anta $f : Y \to X$ er kontinuerlig. La $\alpha \in A$ og la V åpen i X_α. Vi har $(\pi_\alpha \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(V))$. Siden π_α er kontinuerlig fra definisjonen av produkttopologien, er $\pi_\alpha^{-1}(V)$ åpen i X. Siden f er kontinuerlig er dermed $(\pi_\alpha \circ f)^{-1}(V)$ ei åpen mengde i Y. Altså er $\pi_\alpha \circ f$ kontinuerlig.

Anta så at $\pi_\alpha \circ f$ er kontinuerlige for alle $\alpha \in A$. Fra Proposisjon 2.2 (ii) er det nok å vise at $f^{-1}(U)$ er åpen i Y for alle U av typen $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, der V_α er åpen i X_α. Men dette følger av at $\pi_\alpha \circ f$ er kontinuerlige for alle $\alpha \in A$. □

Til slutt vil vi se på topologien av punktvis konvergens på X^Y når X er et vektorrom. Som vi har sett er projeksjonene lik evalueringsoperasjonene. La oss derfor studere egenskaper ved evalueringsprosessen. Evalueringsprosessen i $y \in Y$ kan vi oppfatte som en funksjon π_y på X^Y som til enhver funksjon i X^Y tilordner verdien $f(y) \in X$.

Først merker vi oss at når X er et vektorrom, så blir også X^Y et vektorrom over samme skalarkropp når vi lineærkombinerer elementene i X^Y punktvis:

- For a, b skalarer og $f, g \in X^Y$, er funksjonen $af + bg$ definert ved $(af + bg)(y) = af(y) + bg(y)$, et element i X når X er vektorrom.

Vi skal nå se at funksjonene π_y er lineære funksjoner fra vektorrommet X^Y inn i vektorrommet X.

- La a, b være skalarer og la $f, g \in X^Y$. Da er
$$\pi_y(af + bg) = (af + bg)(y) = af(y) + bg(y) = a\pi_y(f) + b\pi_y(g).$$

Spesielt, hvis vi lar $X = \mathbb{R}$ og Y være et topologisk rom, så blir altså topologien av punktvis konvergens lik topologien generert av ei delmengde av lineære, reelle funksjoner på $\mathbb{R}^Y$. Reelle eller komplekse, lineære funksjoner på et vektorrom kaller vi vanligvis *lineære funksjonaler* og samlingen av lineære funksjonaler på et vektorrom kaller vi *den algebraiske dualen* til vektorrommet. Hvis E er et vektorrom, skriver vi den algebraiske dualen som E^+. Topologien av punktvis konvergens på rommet $\mathbb{R}^Y$ av reelle funksjoner definert på Y er altså generert av ei delmengde av $(\mathbb{R}^Y)^+$. Vi kan forfølge denne ideen:

Definisjon 2.9. *La E være et vektorrom og $S \subset E^+$. Den svake topologien generert av S kalles S-topologien på E.*

Studiet av svake topologier på vektorrom har vist seg å være svært fruktbart, og vi skal drive mye med det. Beviset for Proposisjon 2.7 viser at S-topologien blir Hausdorff når S *skiller punkter,* dvs hver gang $x \neq y$ så finnes $\phi \in S$ slik at $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Per definisjon av svak topologi blir elementene i S *kontinuerlige lineære funksjonaler på* E. Du sjekker raskt at E^+ er et vektorrom. Samlinga av kontinuerlige lineære funksjonaler på E, kaller vi den *topologiske dualen til* E og denne skriver vi E^*. Lineære kombinasjoner av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige (se Oppgave 1), så E^* er et undervektorrom av E^+ som igjen inneholder et kjent undervektorrom, nemlig span S.

Eksempel 2.10. La X være et topologisk rom. La $C(X)$ stå for mengda av kontinuerlige funksjoner på X. Dette er et vektorrom og det er et undervektorrom av vektorrommet $\mathbb{R}^X$. Elementene i $(\mathbb{R}^X)^+$ er lineære funksjonaler på $C(X)$ også. Evalueringsfunksjonalene S definerer derfor en svak topologi på $C(X)$, nemlig den svakeste topologien slik at evalueringsfunksjonalene er kontinuerlige. Denne topologien er den nedarva topologien fra $\mathbb{R}^X$.

Snu nå litt på flisa: Vi kjenner altså noen elementer i den topologiske dualen, $C(X)^*$, nemlig evalueringsfunksjonalene. Vi skriver dem gjerne $(\delta_x)_{x\in X}$ i dette tilfellet. Det hadde vært artig å kjenne alle elementene i $C(X)^*$. Vi skal senere se at det finnes en topologi på vektorrommet $C(X)^*$ slik at det lineære spannet til $(\delta_x)_{x\in X}$ ligger tett i $C(X)^*$. Men denne typen undersøkelser hører heime når vi har gjort mye mer grunnarbeid, ikke minst må vi vite mer om utgangspunktet, selve $C(X)$.

I denne seksjonen gjorde vi ganske mye, la oss forsøke å se linjene: Vi definerte kontinuitet og brukte denne definisjonen til å avgjøre hvordan den groveste topologien slik at ei samling funksjoner er kontinuerlige, må se ut. Vi forklarte hva et produkt av mengder er og laget en produkttopologi som den groveste topologien slik at projeksjonene er kontinuerlige. Vi tok så et spesialtilfelle, nemlig når produktet er formet av samme rommet i hver faktor. Fra definisjonen av produkt blir dette rommet lik rommet av funksjoner fra indeksmengda inn i faktorrommet. Projeksjonene blir nå det å evaluere. Dette gir at punktvis konvergens og konvergens i produkttopologi er det samme på rom av funksjoner.

Vi spesialiserte mer og antok faktorrommet er et vektorrom. Vi argumenterte for at da er produktrommet også et vektorrom og evalueringene er lineære funksjonaler på produktrommet. Altså er topologien av punktvis konvergens generert av ei delmengde av de lineære funksjonalene. At denne topologien er Hausdorff skyldes at evalueringsfunksjonalene skiller punkter.

Vi generaliserte så denne observasjonen til vektorrom E og sa at hver mengde $S \subset E^+$ som skiller punkter genererer en Hausdorfftopologi på E, der $S \subset E^*$. Denne topologien på E kalte vi, i analogi, den svake topologien på E generert av S.

2.2 Normale rom og kontinuerlige, reelle funksjoner på disse

Hvis X og Y er topologiske rom, kan vi se på samlinga $C(X, Y)$ av kontinuerlige funksjoner fra X inn i Y. Når Y er et vektorrom er også $C(X, Y)$ et vektorrom. Når Y er $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ skriver vi oftest bare $C(X)$, sammenhengen viser hva vi mener. Men vent nå litt: Kan vi være sikre på at $C(X)$ inneholder noen elementer?

Når X er ei delmengde av de reelle tall finnes det masse kontinuerlige funksjoner. Men har vi noen garanti for at det alltid finnes kontinuerlige reelle funksjoner på et topologisk rom? Ja, konstante funksjoner er kontinuerlige (siden punkter er lukka delmengder av $\mathbb{R}$). Men finnes det ikke-konstante kontinuerlige reelle funksjoner, tro? Det er ikke alltid. Et ekstremt resultat i så måte er et eksempel av Edwin Hewitt (1920-1999) fra 1946 på et regulært rom som bare har konstante reelle, kontinuerlige funksjoner.

Hvis X er et normert rom, så er normen en kontinuerlig, reell funksjon, så der fins det ikke-konstante reelle, kontinuerlige funksjoner. Normerte rom er normale. Det viser seg at normalitet er en sterk nok betingelse til å garantere eksistensen av ikke-konstante, reelle funksjoner. Vi skal vise det berømte

Teorem 2.11. (Urysohns lemma, 1924) *La X være et normalt topologisk rom. Hver gang A og B er disjunkte, lukka mengder så finnes $f \in C(X, [0,1])$ med $f(A) = 0$ og $f(B) = 1$.*

Før vi gyver løs på det flotte beviset trenger vi å kjenne de *dyadiske brøkene* i intervallet $[0,1]$. Dette er mengden av brøker på formen

$$\frac{k}{2^n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots 2^n, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

La oss liste dem:

$$\begin{array}{llllllllll}
n=0: & 0 & 1 \\
n=1: & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
n=2: & 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\
n=3: & 0 & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{3}{8} & \frac{4}{8} & \frac{5}{8} & \frac{6}{8} & \frac{7}{8} & 1 \\
\vdots
\end{array}$$

Vi ser at bare odde k gir nye brøker i hver rad; for jamn k finnes samme brøk allerede i rada over. La D være de dyadiske brøkene i $[0,1]$ og sett $D = \cup_n D_n$, der D_n er rad nr. n i opplistinga over. Vi ser at rad nr. n approksimerer hvert $x \in [0,1]$ med maksimal feil $2^{-(n+1)}$. Altså er D tett i $[0,1]$, og det skal vi trenge.

Vi vil også bruke følgende egenskap ved normale rom:

Anta U, V er åpne mengder slik at $\overline{U} \subset V$. Da finnes ei åpen W slik at

$$\overline{U} \subset W \subset \overline{W} \subset V. \tag{2.1}$$

Hvorfor det? Jo, $\overline{U}$ og V^c er nå lukka, disjunkte mengder. Dermed finnes åpne, disjunkte W_1, W_2 slik at $\overline{U} \subset W_1$ og $V^c \subset W_2$. Nå må

$$U \subset \overline{U} \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset W_2^c \subset V.$$

Velg $W = W_1$.

Bevis. Vi skal starte med å påvise eksistensen av en familie $\{U_r\}_{r \in D}$ av åpne delmengder av X slik at

$$A \subset U_r \subset B^c \text{ og } \overline{U_r} \subset U_s \text{ når } r < s. \tag{2.2}$$

Vi skal bruke induksjon på radene i lista over. Vi starter da med å vise (2.2) for alle $r \in D_0$: Sett $U_1 = B^c$ og la U_0 være ei åpen mengde slik at $A \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset B^c$, ei slik U_0 eksisterer ved (2.1). Anta nå vi har vist (2.2) for de $m-1$ første radene, dvs funnet U_r'er med de søkte egenskaper. Vi må påvise hvordan mengdene $U_{k/2^m}$ lages, men bare for odde k siden $U_{k/2^m}$ for partalls k er laget på tidligere steg. For odde k vet vi fra induksjonshypotesen at $\overline{U_{(k-1)/2^m}} \subset U_{(k+1)/2^m}$ fordi disse ble konstruert på steg $m-1$. Vi definerer da bare $U_{k/2^m}$ til å være ei åpen mengde U slik at

$$\overline{U_{(k-1)/2^m}} \subset U \subset \overline{U} \subset U_{(k+1)/2^m},$$

ei slik finnes ved (2.1). Dermed er (2.2) bevist.

Vi skal nå lage f. Vi kan bytte ut U_1 med X uten å ødelegge systemet vårt, annet enn at U_1 nå ikke blir med i B^c, og det gjør vi. Definer nå $f : X \to \mathbb{R}$ ved at

$$f(x) = \inf\{r \in D \,|x \in U_r\}.$$

Da er i allefall $0 \leq f(x) \leq 1$, $f(B) = 1$ og $f(A) = 0$. Eneste som mangler er å vise at f er kontinuerlig. Vi viser at f er kontinuerlig i hvert punkt. La $x \in X$ og sett $r = f(x)$. La $1 > \varepsilon > 0$. Vi må se på tre tilfeller (vi skal nå bruke at D er tett i $[0, 1]$):

- $r = 1$: Vi må vise at det finnes åpen $V \subset X$ med $f(V) \subset (1-\varepsilon, 1]$. Velg $r_1 \in D$ slik at $1 - \varepsilon < r_1 < 1$. La $V = \overline{U_{r_1}}^c$ og bruk (2.2) sammen med definisjonen av f.
- $r = 0$: Vi må vise at det finnes åpen $V \subset X$ med $f(V) \subset [0, \varepsilon)$. Velg $r_2 \in D$ slik at $0 < r_2 < \varepsilon$. La $V = U_{r_2}$.
- $0 < r < 1$: Vi må finne åpen $V \subset X$ slik at $f(V) \subset (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$. Velg nå $r_1, r_2 \in D$ slik at $r - \varepsilon < r_1 < r < r_2 < r + \varepsilon$. La $V = U_{r_2} \setminus \overline{U_{r_1}} = U_{r_2} \cap (\overline{U_{r_1}})^c$.

Dette viser at $f \in C(X, [0, 1])$ og fullfører dermed beviset.[1] □

Når A og B er disjunkte, lukka mengder og $f \in C(X, [0, 1])$ oppfyller $f(A) = 0$ og $f(B) = 1$, kaller vi f en *Urysohnfunksjon.* Det omvendte av Urysohns lemma holder også.

Teorem 2.12. *Hvis vi for alle disjunkte, lukka $A, B \subset X$ kan finne en Urysohnfunksjon, så er X normalt.*

Bevis. La $A, B \subset X$ være lukka og $A \cap B = \emptyset$. Velg en Urysohnfunksjon for paret A, B. La $U = \{x \in X \ : f(x) < 1/2\}$ og $V = \{x \in X \ : f(x) > 1/2\}$. □

Eksistens av Urysohnfunksjon er altså ekvivalent til normalitet. Vi skal snart se en annen karakterisering av normalitet som også involverer eksistens av kontinuerlige funksjoner. Tenk deg følgende situasjon: Du har to topologiske rom, X og Y, ei lukka delmengde A av X og en kontinuerlig funksjon f, definert på

[1] Det er en eleganse over beviset for Urysohns lemma som forteller oss at det er en uvanlig begavelse vi har med å gjøre. Pavel Urysohn var født i Odessa i 1898, men døde allerede i 1924, samme året dette teoremet ble publisert. Han satte på tross av sin korte levetid dype spor etter seg innenfor topologi.

A og med verdier i Y. Spørsmålet vi skal stille er følgende: Kan vi utvide definisjonsmengda til f slik at den blir definert på hele X og fortsatt har verdier i Y? En slik utvidelse, hvis den eksisterer kalles en *Tietze-utvidelse*[2] *av* f *relativt* Y.

La oss et øyeblikk reflektere over når Tietze-utvidelser kan eksistere for alle lukka $A \subset X$. Anta Y er Hausdorff med minst to punkter og at A og B er lukka, disjunkte delmengder av X. Definér f på den lukka mengda $A \cup B$ ved at $f(A) = y_1$ og $f(B) = y_2$, der $y_1 \neq y_2$. Da er f kontinuerlig. Hvis nå Tietze-utvidelser eksisterer for alle lukka delmengder av X, kan vi utvide f til en kontinuerlig funksjon $F : X \to Y$. Siden Y er Hausdorff kan vi skille y_1 og y_2 med åpne U og V. Men ved kontinuiteten av F er da $F^{-1}(U)$ og $F^{-1}(V)$ åpne, disjunkte mengder med $A \subset F^{-1}(U)$ og $B \subset F^{-1}(V)$. Vi har vist, siden $\mathbb{R}$ er Hausdorff:

Teorem 2.13. *La X være et topologisk rom der, for enhver lukka delmengde A, enhver reell, kontinuerlig funksjon f definert på A har en Tietze-utvidelse. Da er X normalt.*

Og sannelig holder det omvendte også!

Teorem 2.14. (Tietzes utvidelsesteorem) *La X være et normalt topologisk rom. La $A \subset X$ være lukka og anta $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da har f en Tietze-utvidelse F. Dessuten, hvis $f(A) \subset [\alpha, \beta]$, så kan F velges slik at $F(X) \subset [\alpha, \beta]$.*

Bevis. Hvis $\alpha = \beta$ er f konstant og det er trivielt å utvide. Anta $\beta > \alpha$. Det er ikke noen restriksjon å anta $\alpha = 0$ og $\beta = 1$. Hvis $f(A) \subset [\alpha, \beta]$, setter vi $\bar{f}(x) = (f(x) - \alpha)/(\beta - \alpha)$ og utvider $\bar{f}$. Dermed er f også utvidet. Anta derfor $f(A) \subset [0, 1]$. Vi skal bruke Urysohns lemma gjentatte ganger til å konstruere utvidelsen F av f.

Anta $f : A \to [0, 1]$ og la

$$B_0 = f^{-1}([0, \frac{1}{3}]) \text{ og } C_0 = f^{-1}([\frac{2}{3}, 1]).$$

Ved kontinuiteten til f er B_0 og C_0 lukka delmengder av A, og dermed i X. Ved Urysohns lemma finnes en Urysohnfunksjon g_1 for B_0 og C_0 definert på X. Velg den slik at $f(B_0) = 0$, og skalér den slik at $f(C_0) = 1/3$. På B_0 er da $0 \leq f - g_1 \leq 1/3$. På C_0 er $1/3 \leq f - g_1 \leq 2/3$. På resten av A gjelder $0 \leq f - g \leq 2/3$. Summa summarum,

$$0 \leq f - g_1 \leq 2/3$$

på A.

$f - g_1|_A$ er en kontinuerlig funksjon på A med verdier i [0,2/3]. La

$$B_1 = (f - g_1)^{-1}([0, \frac{2}{9}]) \text{ og } C_1 = (f - g_1)^{-1}([\frac{4}{9}, 1]).$$

Bruk samme argument som over til å finne g_2, men skalér nå denne slik at $g_2(B_1) = 0$ og $g_2(C_1) = 2/9$. Sagt med andre ord: $g_2 = 0$ der $0 \leq f - g_1 \leq 2/9$

[2]Tietze utvidelser er oppkalt etter Heinrich Tietze (1880-1964). Han studerte slike, og viste Teorem 2.14 allerede i 1915.

og $g_2 = 2/9$ der $f - g_1 \geq 4/9$. Per konstruksjon er $0 \leq g_2 \leq 2/9$ og vi får ved å sjekke på B_1, C_1 og $A \setminus (B_1 \cup C_1)$ hver for seg at

$$0 \leq f - (g_1 + g_2) \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

på A.

En gang til: $f - (g_1 + g_2)|_A$ er en kontinuerlig funksjon på A med verdier i $[0, 4/9]$. Vi setter

$$B_2 = (f - (g_1 + g_2))^{-1}([0, \frac{2^2}{3^3}]) \text{ og } C_2 = (f - (g_1 + g_2))^{-1}([\frac{2^3}{3^3}, 1]).$$

Samme argument som over gir oss g_3, men skalér nå denne slik at $g_3(B_2) = 0$ og $g_3(C_2) = 2^2/3^3$. Sagt med andre ord: $g_3 = 0$ der $0 \leq f - (g_1 + g_2) \leq 2^2/3^3$ og $g_2 = 2^2/3^3$ der $f - (g_1 + g_2) \geq 2^3/3^3$. Per konstruksjon er $0 \leq g_3 \leq 2^2/3^3$ og vi får ved å sjekke på B_2, C_2 og $A \setminus (B_2 \cup C_2)$ hver for seg at

$$0 \leq f - (g_1 + g_2 + g_3) \leq \frac{2^2}{3^2} - \frac{2^2}{3^3} = \frac{2^3}{3^3}$$

på A.

Vi fortsetter på samme måte og ender opp med ei følge (g_n) av funksjoner definert på X som har følgende egenskaper

(i) $g_n : X \to [0, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$

(ii) $g_n = 0$ der $f - \sum_{i=1}^{n-1} g_i \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$

(iii) $g_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ der $f - \sum_{i=1}^{n-1} g_i \geq (\frac{2}{3})^n$

(iv) $0 \leq f - \sum_{i=1}^{n} g_i \leq \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} - \frac{2^{n-1}}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$ på A.

La $F_m = \sum_{n=1}^{m} g_n$ være m'te delsum. Siden hver g_n er definert på X, er F_m en funksjon definert på X. La $F = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Fra (i) får vi at

$$0 \leq F(x) - F_m(x) \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \to 0.$$

Delsummene $F_m = \sum_{i=1}^{m} g_n$ konvergerer altså uniformt mot F, så grensa F er en kontinuerlig funksjon definert på X (se Lemma 2.15 under). Vi bruker (i) igjen og får

$$0 \leq F(x) \leq \sum_{n} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$$

At $F = f$ på A følger fra (iv). Dette fullfører beviset. □

Lemma 2.15. *Hvis (f_n) er ei følge av $[a, b]$-valuerte, kontinuerlige funksjoner som konvergerer uniformt på det topologiske rommet X, så er grensa $f = \lim_n f_n$ også $[a, b]$-valuert og kontinuerlig.*

Bevis. Anta $(f_n) \in C(X, [a,b])$ med $\sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| \stackrel{def}{=} \|f - f_n\|_u \to 0$. Vi skal vise at f er kontinuerlig i alle punkt $x \in X$. For $x \in X$ og $\varepsilon > 0$ skal vi altså finne ei åpen delmengde U av X slik at $f(U) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Velg først $N \in \mathbb{N}$ slik at $\|f - f_n\|_u < \varepsilon/3$ når $n > N$. La fortsatt $n > N$ og bruk kontinuiteten av f_n til så å velge åpen $U \subset X$ med $|f_n(x) - f_n(y)|$ for $y \in U$. Men nå gir trekantulikheten at

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dermed virker U for f. □

Du synes sikkert Urysohns lemma og Tietzes utvidelsesteorem var vanskelige; det er de også! Men de viser eksistensen av objekter i veldig generelle tilfeller, og endatil angir de grensa for når resultatene kan oppnås. Så sterke resultater kan vi ikke forvente skal komme gratis. Vi vil få bruk for dem når vi skal studere kontinuerlige funksjoner på kompakte Hausdorff rom i Seksjon 2.4 fordi slike rom viser seg å være normale. Men før det trenger vi å lære om nett.

2.3 Nettkarakterisering av grenser

Når vi skal lukke ei mengde A i $\mathbb{R}$, så vet vi at det bare er å ta med alle punkter som er grenser for konvergente følger fra A. Det samme gjelder for alle førstetellebare rom i følge Proposisjon 1.29. Hadde bare verden vært så snill (eller kjedelig?) at alle rom var førstetellbare!

Vi er også vant til å bruke følger til å avgjøre kontinuitet av funksjoner: En funksjon mellom de topologiske rommene vi har arbeidet med i elementære kurs er kontinuerlig hvis og bare hvis den tar konvergente følger på konvergente følger. I generelle topologiske rom gjelder følgende:

Proposisjon 2.16. *La X og Y være topologiske rom. $f : X \to Y$ er kontinuerlig hvis og bare hvis $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ for alle delmengder $A \subset X$.*

Sagt med andre ord: f er kontinuerlig hvis og bare hvis den bevarer grensepunkter.

Bevis. Anta f er kontinuerlig og $A \subset X$. Da er $f^{-1}(\overline{f(A)})$ lukket. Siden $\overline{A}$ er den minste lukka mengda som inneholder A, må $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Anta så $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ for alle $A \subset X$. La U være lukka i Y. Vi vil vise at $V = f^{-1}(U)$ er lukka i X. Per antakelse er $f(\overline{V}) \subset \overline{f(V)}$. Og siden $f(V) \subset U$, må jo $\overline{f(V)} \subset \overline{U}$. Men siden U er lukket, står det $f(\overline{V}) \subset U$. Altså er $\overline{V} \subset V$, og V må være lukka. □

Nå skal vi ta eksempler som viser at det finnes grenser som ikke er følgegrenser.

Eksempel 2.17. Fra Eksempel 1.21 vet vi at $C(\mathbb{R})$ er tett i $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, mengda av reelle funksjoner på $\mathbb{R}$ i topologien av punktvis konvergens.

Men $C(\mathbb{R})$ er ikke følgetett i $F(\mathbb{R})$. Vi kan ikke nok til å innse det ennå, men når vi skal studere målteori senere skal vi se at følgegrensene til $C(\mathbb{R})$ er Borelmålbare. Ikke alle reelle funksjoner er Borelmålbare, og dermed er ikke $C(\mathbb{R})$ følgetett i $F(\mathbb{R})$.

Her er et annet eksempel, også fra rom av kontinuerlige funksjoner.

Eksempel 2.18. La X være delmengda av $C[0,1]$ gitt ved

$$X = \{f \in C[0,1] \ : 0 \leq f \leq 2\}.$$

Fra X plukker vi igjen ei delmengde, nemlig

$$A = \{f \in X \ : \int_0^1 f dx = 1\}.$$

La τ være topologien av punktvis konvergens på $[0,1]$. Ved å bygge 'trekantfunksjoner', ser vi at $2 \in \overline{A}$. Men et berømt teorem som kalles *Bounded convergence theorem*[3] og som vi skal lære om i integrasjonsteorien, gir oss at grensa for ei punktvis konvergent følge fra A må ha integral 1.

Når vi nå vet at det finnes grensepunkt som ikke er følgegrensepunkt, kan vi glemme å bruke følger til å avgjøre kontinuitet generelt.

Spørsmålet vi må stille oss er: Kan vi lage en slags generaliserte følger, slik at grensepunktene er grenser for generaliserte følger $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$? Da kanskje, kunne vi håpe på å kunne karakterisere kontinuitet av funksjoner f ved testen $x_\alpha \to x \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x)$ for alle konvergente generaliserte følger (x_α).

Det finnes essensielt to måter å generalisere følger på, *nett* og *filter*. Teorien for nett ble laget av Moore og Smith og publisert i 1922, men det tok ganske lang tid før en innså hvor sterk og nyttig denne teorien var. Teorien for filter stammer fra fransmannen Emile Cartan og ble publisert i 1937. Til noen bruk er nett mest anvendelige, til andre passer filter best. Dessuten synes også smak og behag å spille en rolle. Vi vil utvikle og benytte teori for nett.

Først, hvorfor kan grenser x i førstetellbare rom finnes som følgegrenser. Jo, da kunne vi ordne elementene i nettverket om x *lineært,* dvs. mengdene blir mindre og mindre. Med en gang de var ordnet slik, kunne vi bare velge et punkt i hver mengde i nettverket om x, og vips hadde vi følga. Ordninga på nettverket og ordninga på $\mathbb{N}$ er liksom like.

La oss ordne de åpne mengdene τ_x om x ved at $U \preceq V$ hvis og bare hvis $U \supset V$. Dette kalles *invers mengdeinklusjon.* Hadde det ikke vært noe mer system i τ_x, ville oppgaven vært håpløs. Men det er et system. Vi vet jo at ethvert endelig snitt av åpne mengder om x er ei åpen mengde om x. $\preceq$ oppfyller altså

(i) $U \preceq U$ for alle $U \in \tau_x$.

(ii) Hvis $U \preceq V$ og $V \preceq U$, så er $U = V$ for alle $U, V \in \tau_x$.

(iii) Hvis $U \preceq V$ og $V \preceq W$ så er $U \preceq W$ for alle $U, V, W \in \tau_x$.

(iv) For hvert par $U, V \in \tau_x$ finnes $W \in \tau_x$ med $U \preceq W$ og $V \preceq W$.

De tre første skyldes at invers inklusjon er ei delvis ordning. Det fjerde punktet skyldes egenskapene ved de åpne mengdene om x. Kluet er nå å la indeksmengdene ha nettopp disse egenskapene (egentlig kommer vi aldri til å trenge egenskap (ii), men det kunne vi jo ikke vite nå, og det skader ikke å ta den med). Mer formelt,

[3]Bounded convergence theorem sier at når ei begrensa følge (f_n) i $C[0,1]$ konvergerer punktvis til f på $[0,1]$, så konvergerer $(\int_0^1 f_n dx)$ til $\int_0^1 f$. Bounded convergence theorem for Riemannintegralet ble vist av Arzelà i 1885. For Lebesgueintegralet gjelder et mye sterkere resultat som kalles Dominated convergence theorem. Eksempel 2.17 og 2.18 er god motivasjon for å studere mål- og integrasjonsteori.

Definisjon 2.19. *Ei mengde A med en binær ordning $\preceq$ som oppfyller punktene (i)-(iv) over, kalles ei* retta mengde. *Et* nett *i X er ei avbildning $\alpha \in A \to x_\alpha \in X$. Verdimengda $(x_\alpha)_{a \in A}$ kaller vi også et nett og skiller ikke mellom avbildning og verdimengde til avbildninga.*

Vi formaliserer noen begreper: (x_α) *konvergerer* mot x, skrevet $x_\alpha \to x$, hvis vi for hver åpen mengde U om x kan finne $\alpha(U) \in A$ slik at $\alpha \preceq \beta$ medfører $x_\beta \in U$. Vi sier gjerne at (x_α) er i U *før eller siden.* x kalles *grensa* til nettet (x_α).

De neste to resultatene viser at vi har greid å generalisere følgebegrepet når det gjelder grensepunkt og kontinuitet.

Proposisjon 2.20. *La X være et topologisk rom og $E \subset X$. Da er x et grensepunkt for E hvis og bare hvis det finnes et nett (x_α) i $E \setminus \{x\}$ slik at $x_\alpha \to x$.*

Bevis. Vi har allerede forklart at grensepunkt for E er grense for et nett indeksert over $A = \tau_x$ ordna ved invers mengdeinklusjon. Anta så det finnes et nett (x_α) i $E \setminus \{x\}$ slik at $x_\alpha \to x$. Da vil enhver punktert åpen mengde $U \setminus \{x\}$ inneholde en x_α, så x er et grensepunkt for E. □

Altså er $x \in \overline{E}$ hvis og bare hvis det finnes et ikke-konstant nett i E som konvergerer til x.

Viktig merknad: Ordet grense brukes slik at vi lett kan surre. Siden (x_α) er ei delmengde, har den grensepunkt $\mathrm{gr}((x_\alpha))$. Men disse er ikke identiske med grensene til nettet! Å være *grense for nettet* er et mye sterkere krav enn å være *grensepunkt for nettet.*

Proposisjon 2.21. *La X og Y være topologiske rom og $f : X \to Y$. Da er f kontinuerlig i $x \in X$ hvis og bare hvis vi for ethvert nett $(x_\alpha) \subset X$ med $x_\alpha \to x$, har $f(x_\alpha) \to f(x)$.*

Bevis. La f være kontinuerlig og $x_\alpha \to x$. Vi skal vise at $f(x_\alpha)$ konvergerer til $f(x)$. La derfor V være åpen om $f(x)$ i Y. Da er $f^{-1}(V)$ åpen om x i X. Siden $x_\alpha \to x$ finnes α_0 slik at alle etterfølgerne til x_{α_0} er i $f^{-1}(V)$. Men da er alle etterfølgerne til $f(x_{\alpha_0})$ i V.

Anta så at $x_\alpha \to x \Rightarrow f(x_\alpha) \to f(x)$. Fra Proposisjon 2.16 er det nok å vise at $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ for alle $E \subset X$. Men dette følger fra Proposisjon 2.20. □

Proposisjon 2.21 sier altså at f er kontinuerlig hvis og bare hvis $f(\lim_\alpha x_\alpha) = \lim_\alpha f(x_\alpha)$ for alle konvergente nett $(x_\alpha) \subset X$. Dette er en setning vil vil få mye bruk for.

2.4 Kompakte rom

I $\mathbb{R}^n$ kaller vi lukka og begrensa mengder for kompakte. De har den såkalte *Bolzano-Weierstrass egenskapen,* nemlig at enhver følge har ei konvergent delfølge. Og omvendt gjelder at hvis mengda er lukka og alle følger har konvergente delfølger, så er den kompakt. Vi kunne brukt dette som definisjon på kompakthet også i generelle topologiske rom, men du har vel en følelse av at siden denne kompakthetsdefinisjonen involverer følger er det noe som 'går galt'. Riktig!

De kompakte delmengdene K av $\mathbb{R}^n$ har ei alternativ karakterisering, som ikke involverer følger, nemlig at

$K \subset \mathbb{R}^n$ er kompakt hvis og bare hvis hver gang K er dekket av en union $(\cup_{\alpha \in A} U_\alpha)$ av åpne mengder (ei åpen dekning), så finnes ei endelig delsamling $(U_i)_{i=1}^n$ av $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ slik at $K \subset \cup_{i=1}^n U_i$ (ei endelig underdekning).

Denne karakteriseringa ble funnet av Borel;[4] vi kommer tilbake til den i et mer generelt tilfelle, nemlig som Korollar 2.49. For oss er det nok nå å kjenne til resultatet for å ha en motivasjon for definisjonen av kompakthet i topologiske rom.

Definisjon 2.22. *La X være et topologisk rom og $K \subset X$. K kalles* kompakt *i X dersom enhver* åpen dekning *har ei endelig* underdekning, *dvs. hver gang $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ er åpne mengder i X slik at $K \subset \cup_\alpha U_\alpha$, så finnes ei endelig delmengde Δ av A slik at $K \subset \cup_{j \in \Delta} U_j$.*

Det er ingenting i veien for at K kan være lik X i definisjonen over. I dette tilfellet kalles X et *kompakt rom.* Vi trenger å øve oss litt med åpne dekninger, så la oss se at kompakthet arves til lukka delmengder (se også Oppgave 10).

Proposisjon 2.23. *La X være et kompakt rom og $K \subset X$ lukka. Da er K kompakt i X.*

Bevis. La $K \subset \cup_\alpha U_\alpha$ der (U_α) er åpne i X. Siden K er lukket er K^c åpen. Om vi nå tar med K^c sammen med (U_α)'ene, har vi ei åpen dekning av X. Siden X er kompakt kan vi finne endelig mange U_α'er som, sammen med K^c dekker X. De endelig mange U_α'ene dekker nå K. Altså er K kompakt i X. $\square$

Vi har gitt en definisjon av kompakthet ved hjelp av åpne mengder. Vi skal nå gi en karakterisering også ved hjelp av lukka mengder. Men vi trenger et begrep først:

Definisjon 2.24. *La X være et topologisk rom. En familie $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ sies å ha* endelig snitt egenskapen *dersom for enhver endelig delmengde $B \subset A$, $\cap_{\alpha \in B} F_\alpha \neq \emptyset$.*

La $F_n = (0, 1/n]$ betrakta i $(0, 2)$ der $(0, 2)$ har den nedarva topologien fra $\mathbb{R}$. Da er hver F_n lukka og (F_n) har endelig snitt egenskapen. Men legg merke til at snittet over hele indeksmengda $\mathbb{N}$ er tomt. Noe sånt kan ikke skje i kompakte rom:

Proposisjon 2.25. *La X være et kompakt rom og $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ en familie av lukka delmengder av X med endelig snitt egenskapen. Da er også $\cap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$. Og dersom enhver familie av lukka delmengder av et topologisk rom X med endelig snitt egenskapen har ikke-tomt snitt, så er X kompakt.*[5]

[4] Emile Borel (1871-1956) viste dette for tellbare dekninger i 1895. Men beviset hans kan spores tilbake til et argument gitt av Eduard Heine (1821-1881) i 1872 og resultatet kalles gjerne Heine-Borels teorem. Tellbarhetskravet i de åpne dekningene oppdaget en snart at var overflødig, i Henry Lebesgues lærebok *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions* fra 1904 er det i allefall borte.

[5] Dette resultatet kalles av og til Cantors snittsats fordi det er ei generalisering av et resultat av Georg Cantor (1845-1918).

Bevis. La X være kompakt og anta $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ er en familie av lukka delmengder av X med endelig snitt egenskapen. La $U_\alpha = F_\alpha^c$. Hvis $\cap_\alpha F_\alpha$ er tomt er $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ en dekning av X. Siden X er kompakt finnes endelig delfamilie $(U_\alpha)_{\alpha\in B}$ slik at $X = \cup_{\alpha\in B} U_\alpha$. Men ved De Morgans lov er da $\cap_{\alpha\in B} F_\alpha = X^c = \emptyset$, en konflikt med endelig snitt egenskapen til F_α.

Anta så enhver familie av lukka delmengder av X med endelig snitt egenskapen har ikke-tomt snitt. La (U_α) være ei åpen dekning av X. Hvis (U_α) ikke har noen endelig underdekning, må det bety at (U_α^c) er en familie av lukka mengder med endelig snitt egenskapen. Men $\cup_\alpha U_\alpha = X$, så $\cap_\alpha U_\alpha^c = \emptyset$.

□

Vi skal nå undersøke sammenhengen kompakthet-normalitet. Vi skal i utgangspunktet arbeide med Hausdorffrom. I regulære rom kan vi skille lukka mengder fra punkter. Hausdorffrom er et stykke på vei regulære:

Proposisjon 2.26. *La X være Hausdorff, $K \subset X$ være kompakt og anta $x \in X$, men $x \notin K$. Da finnes åpne, disjunkte U og V med $U \supset K$ og $x \in V$.*

Bevis. Siden X er Hausdorff, kan vi for hver $y \in K$ velge åpne, disjunkte U_y, V_y slik at $y \in U_y$ og $x \in V_y$. Men nå er $(U_y)_{y\in K}$ ei åpen dekning av K. Siden K er kompakt kan vi velge endelig underdekning, dvs. vi kan velge $y_1, y_2, ..., y_n$ slik at $K \subset \cup_{i=1}^n U_{y_i}$. Sett $U = \cup_{i=1}^n U_{y_i}$ og $V = \cap_{i=1}^n V_{y_i}$. □

Beviset for Proposisjon 2.26 illustrerer noe veldig viktig, ja kanskje selve poenget, med kompakte delmengder K: *En egenskap som i utgangspunktet involverer alle punktene i K kan reduseres til å bare involvere endelig mange av dem.*

La oss titte på Proposisjon 2.26 en gang til og bruke den for hvert $x \in K^c$. Da ser vi at alle $x \in K^c$ har ei åpen mengde om seg som ligger inni K^c. Med andre ord har vi:

Korollar 2.27. *La X være Hausdorff og $K \subset X$ være kompakt. Da er K lukka.*

Du har kanskje gjetta neste resultat alt?

Teorem 2.28. *Kompakte Hausdorffrom er normale.*

Bevis. La X være kompakt Hausdorff og M og N to disjunkte, lukka delmengder av X. Fra Proposisjon 2.23 vet vi at M og N er kompakte. Fra Proposisjon 2.26 kan hver $x \in M$ skilles fra N via åpne, disjunkte U_x om x og $V_x \supset N$. $(U_x)_{x\in M}$ er ei åpen dekning av M og kompaktheten av M skaffer oss da endeling mange punkter $x_1, x_2, ..., x_n$ fra M slik at $M \subset \cup_{i=1}^n U_{x_n}$. La $U = \cup_{i=1}^n U_{x_n}$ og $V = \cap_{i=1}^n V_{x_n}$. □

Nå gir Urysohns lemma, Teorem 2.11, at for kompakte Hausdorffrom er $C(K)$ et rikholdig rom. Klassen av $C(K)$-rom skal vise seg å være enormt sentrale og det eksisterer en stor mengde litteratur om slike rom.

Husker du resultatet som sier at en kontinuerlig, reell funksjon på ei lukka og begrensa mengde i $\mathbb{R}$ oppnår sitt maksimum og minimum der? Vi skal snart generalisere dette resultatet, men først en viktig, generell observasjon.

Proposisjon 2.29. *La X og Y være topologiske rom og anta $f : X \to Y$ er kontinuerlig. Hvis X er kompakt, så er verdimengda $f(X)$ ei kompakt delmengde av Y.*

Bevis. La (U_α) være ei åpen dekning av $f(X)$. Siden f er kontinuerlig er $(f^{-1}(U_\alpha))$ ei åpen dekning av X. Velg underdekning $(f^{-1}(U_\alpha))_{\alpha\in B}$. Men nå er $(U_\alpha)_{\alpha\in B}$ ei endelig underdekning av $f(X)$. □

La F være ei ubegrensa delmengde av $\mathbb{R}$. Da er intervallene $(j, j)_{j\in\mathbb{N}}$ ei åpen dekning av F som åpenbart ikke kan ha noen endelig underdekning. Altså er kompakte delmengder av $\mathbb{R}$ begrensa. Samme argument går i $\mathbb{R}^2$, men da med sirkler med radius j. I $\mathbb{R}^n$ må vi bruke kuler med radius j. Whatever,

Korollar 2.30. *Kontinuerlige, reelle eller komplekse funksjoner definert på kompakte rom er begrensa.*

Her kommer det vi lovde:

Proposisjon 2.31. *En kontinuerlig reell eller kompleks funksjon definert på et kompakt rom X oppnår både sitt maksimum og sitt minimum på X.*

Bevis. Vi tar det reelle tilfellet, det komplekse er analogt. Vi nøyer oss også med å vise at maksimum oppnås. Vi vet at $f(X)$ er ei lukka og begrensa delmengde av $\mathbb{R}$. La a være supremumsverdien til $f(X)$ (enhver begrensa delmengde av $\mathbb{R}$ har ei minste øvre skranke). La $a_n \in f(X)$ være slik at $|a_n - a| < 1/n$ (ei slik følge finnes ved definisjonen av supremum). Siden $f(X)$ er lukka, er $a \in f(X)$. Velg nå $x \in X$ slik at $f(x) = a$. □

En kunne kanskje håpe på at hvis X er et topologisk rom og enhver kontinuerlig, reell f definert på X oppnår sitt maksimum og minimum over X, så er X kompakt. Det holder for en klasse av topologiske rom, men ikke for alle. Vi sier litt mer om dette i Seksjon 2.6.

Jo grovere en topologi er, jo færre åpne dekninger fins, og dess lettere er det for ei delmengde å være kompakt. Vi skal avslutte denne seksjonen med å vise et resultat som kan leses som at når en topologi på ei mengde er så grov at rommet er kompakt, så kan vi ikke svekke den uten å dra med oss Hausdorffegenskapen i fallet.

Proposisjon 2.32. *La X være kompakt og Y Hausdorff. Anta $f : X \to Y$ er en kontinuerlig bijeksjon. Da er f en homeomorfi.*

Bevis. Vi skal altså vise at funksjonen $g = f^{-1}$ er kontinuerlig. La da U være lukka i X (som er bilderommet til g). Vi må vise at $g^{-1}(U) = f(U)$ er lukka i Y. Men det er enkelt; Siden U er lukka i det kompakte X, er U kompakt. Siden f er kontinuerlig er $f(U)$ kompakt i Y. Siden Y er Hausdorff, er $f(U)$ lukka. □

2.5 Delnett, klyngepunkt og kompakthet

For følger i lukka og begrensa (=kompakte) delmengder av $\mathbb{R}$ kan vi alltid plukke konvergente delfølger. Vi vil nå forsøke å få til et delnettbegrep slik at nett i kompakte rom har konvergente delnett. Vanskeligheten ligger i det å definere delnett på rette måten.

Et nett er ei mengde (x_α) indeksert over ei retta mengde A. Vi vil at delnett også skal være nett, slik delfølger også er følger. Vi må dermed på et eller annet vis angi delnett ved å spesifisere ei ny retta mengde. Her er prosedyren:

Definisjon 2.33. *La* (x_α) *være et nett indeksert over den retta mengda* A*. La* B *være ei retta mengde der det eksisterer en funksjon* $\phi : B \to A$*, skrevet* $\phi(\beta) = \alpha_\beta$*, slik at*

- *For alle* $\alpha_0 \in A$ *finnes* $\beta_0 \in B$ *slik at hvis* $\beta_0 \preceq \beta$*, så vil* $\alpha_0 \preceq \alpha_\beta$*.*
  (ϕ *avbilder altså etterfølgerne til* β_0 *på etterfølgere til* α_0*.)*

Definer nå et nett $(y_\beta)_{\beta \in B}$*, ved* $y_\beta = x_{\alpha_\beta}$*. Da kalles* (y_β) *et* delnett *av* (x_α)*.*

Legg merke til at vi kun sier at etterfølgerne til β_0 skal avbildes på etterfølgere til α_0, vi sier ikke noe om at etterfølgerne ikke kan ligge 'hulter til bulter'. La oss illustrere med et eksempel.

Eksempel 2.34. Se på følga (x_i) av reelle tall. Den er indeksert over den retta mengda $A = \mathbb{N}$. La $B = \mathbb{N}$ og definer $\phi : B \to A$ ved $\phi(n) = n + 1$ hvis n er odde og $\phi(n) = n - 1$ hvis n er jamn. For gitt $\alpha_0 \in A$ finner vi da $\beta_0 \in B$ ved $\beta_0 = \alpha_0 + 1$, så $\{x_2, x_1, x_4, x_3, ...\}$ er et delnett av $\{x_1, x_2, ...\}$. Dermed ser vi også at delnett av følger ikke behøver være delfølger.

Grenser for delfølger pleier vi kalle opphopningspunkter for følga. Vi skal nå generalisere denne terminologien. La (x_α) være et nett i et topologisk rom X. La $E \subset X$. Vi sier at (x_α) *til stadighet er i* E*,* dersom vi for hvert $\alpha \in A$ kan finne $\beta \in A, \alpha \preceq \beta$ med $x_\beta \in E$. Et punkt $x \in X$ er et *klyngepunkt for* (x_α) hvis (x_α) til stadighet er i U for enhver åpen mengde U om x.

Vi ser at klyngepunkter for (x_α) er en spesiell type grensepunkter. For at x skal være grensepunkt til mengda (x_α) er det nok at hver åpen U_x inneholder ett x_α. For klyngepunkt inneholder U_x minst ett x_β etter hvert x_α. En nærmere presisering av forskjellen mellom grensepunkt og klyngepunkt finner du i og like etter Proposisjon 2.36. Her kommer sammenhengen mellom delnett og klyngepunkt:

Proposisjon 2.35. *La* (x_α) *være et nett i et topologisk rom* (X, τ)*.* $x \in X$ *er et klyngepunkt for* (x_α) *hvis og bare hvis* (x_α) *har et delnett som konvergerer til* x*.*

Bevis. Anta $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ har et delnett, $(y_\beta)_{\beta \in B} = (x_{\alpha_\beta})_{\beta \in B}$, som konvergerer til x. La U være åpen om x. Siden $y_\beta \to x$ kan vi finne $\beta_0 \in B$ slik at $x_\beta \in U$ når $\beta_0 \preceq \beta$. For hver $\alpha \in A$ kan vi finne $\beta(\alpha) \in B$ slik at etterfølgerne til $\beta(\alpha)$ svarer til etterfølgere til α. For β som kommer etter både $\beta(\alpha)$ og β_0 (en slik finnes fordi B er rettet), vil da $x_{\alpha_\beta} \in U$. Altså er (x_α) til stadighet i U, så x er et klyngepunkt.

La $x \in X$ være et klyngepunkt for $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Vi vil konstruere et delnett som konvergerer til x. Da trenger vi ei lur retta mengde. Vi lager den slik at den fanger opp de åpne mengdene τ_x om x. Vi vet at vi kan gjøre τ_x til ei retta mengde ved invers mengdeinklusjon. Vi kan gjøre $A \times \tau_x$ til ei retta mengde B ved å si at $(\alpha_1, U_1) \preceq (\alpha_2, U_2)$ hvis og bare hvis $\alpha_1 \preceq \alpha_2$ og $U_1 \supset U_2$ (se Oppgave 8). Nå har vi indeksmengda $B = A \times \tau_x$. Vi skal lage avbildninga ϕ: For hver $\beta = (\alpha, U)$ kan vi, siden x er klyngepunkt, finne α_β slik at $x_{\alpha_\beta} \in U$. Dette definerer avbildninga $\phi : B \to A$ ved $\beta \to \alpha_\beta$. Det gjenstår å forklare at $x_\beta \to x$. La V åpen om x. For etterfølgerne γ til $\beta = (\alpha, V)$ er da per konstruksjon $x_\gamma \in V$. $\square$

Her er en karakterisering til av klyngepunkt for nett:

Proposisjon 2.36. *La (x_α) være et nett i et topologisk rom (X, τ). $x \in X$ er et klyngepunkt for (x_α) hvis og bare hvis $x \in \cap_\alpha \overline{\{x_\beta : \alpha \preceq \beta\}}$.*

Bevis. Hvis $x \notin \cap_\alpha \overline{\{x_\beta : \alpha \preceq \beta\}}$, så er $x \in \cup_\alpha (\overline{\{x_\beta : \alpha \preceq \beta\}})^c$ ved De Morgans lov. Dermed finnes en α_0 slik at $x \in (\overline{\{x_\beta : \alpha_0 \preceq \beta\}})^c$, ei åpen mengde om x som ikke inneholder noen av α_0 sine etterfølgere. Dermed kan ikke en slik x være klyngepunkt.

Hvis x ikke er et klyngepunkt finnes α_0 og åpen V om x slik at ingen av etterfølgerne til x_{α_0} er med i V. Med andre ord er $\{x_\beta : \alpha_0 \preceq \beta\} \cap V = \emptyset$. Siden V er åpen må vi ha at $\overline{\{x_\beta : \alpha_0 \preceq \beta\}} \cap V = \emptyset$. At dette holder for $\alpha = \alpha_0$ viser at $\cap_\alpha \overline{\{x_\beta : \alpha \preceq \beta\}} \cap V = \emptyset$, så $x \notin \cap_\alpha \overline{\{x_\beta : \alpha \preceq \beta\}}$. □

Nå ser vi mye tydeligere forskjellen på grensepunkt for (x_α) og klyngepunkt for x_α. Grensepunkt betyr nøyaktig at $x \in \overline{\{x_\alpha\}}$; betingelsen i Proposisjon 2.36 ser vi er mye sterkere.

Vi er klare til å karakterisere kompakthet i form av en generalisert Bolzano-Weierstrass egenskap:

Teorem 2.37. *La X være et topologisk rom. Da er følgende utsagn ekvivalente:*

(i) X er kompakt.

(ii) Ethvert nett i X har et klyngepunkt.

(iii) Ethvert nett i X har et konvergent delnett.

Bevis. Ekvivalensen mellom (ii) og (iii) er direkte fra Proposisjon 2.35.

(i) $\Rightarrow$ (ii): La X være kompakt og (x_α) et nett i X. Vi bruker endelig snitt egenskapen til familien $F_\alpha = \overline{\{x_\beta : \alpha \preceq \beta\}}$ og kompaktheten av X til å produsere et $x \in \cap_\alpha F_\alpha$. Et blikk på Proposisjon 2.36 viser at x er et klyngepunkt for (x_α).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Anta X ikke er kompakt. Velg åpen dekning $(U_\beta)_{\beta \in B}$ uten endelig underdekning. Vi skal lage et nett uten klyngepunkt. La A være samlingen av endelige delmengder av B ordnet ved vanlig inklusjon og la, for hver $D \in A$, x_α være et eller annet element fra $(\cup_{\alpha \in D} U_\alpha)^c$ (et slikt element må eksistere for hver D siden ingen endelige unioner dekker X). Det gjenstår å vise at (x_α) ikke kan ha noe klyngepunkt. La $x \in X$. Siden $(U_\beta)_{\beta \in B}$ er ei dekning, finnes β_0 slik at $x \in U_{\beta_0}$. Hvis nå $\{\beta_0\} \preceq D$ (altså hvis $\beta_0 \in D$), så kan ikke $x_{\alpha(D)} \in U_{\beta_0}$ slik x_α er valgt. Dermed er ikke x noe klyngepunkt for (x_α). Siden x var vilkårlig kan ikke (x_α) ha noe klyngepunkt. □

2.6 Ulike kompakthetskrav

La (X, τ) være et topologisk rom. Vi sier at

(a) X er *kompakt* hvis hver åpen dekning har en endelig underdekning.

(b) X er *tellbart kompakt* hvis hver tellbar åpen dekning har en endelig underdekning.

(c) X er *pseudokompakt* hvis enhver $f \in C(X)$ er begrensa.

(d) X er *følgekompakt* hvis hver følge i X har ei konvergent delfølge, dvs. ei delfølge som konvergerer til et punkt $x \in X$.

La oss se litt nøyere på sammenhengene mellom disse kompakthetstypene:

- Kompakte rom er tellbart kompakte
- Anta X er tellbart kompakt og $f \in C(X)$. La, for hver $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \{x \in X \ : |f(x)| < n\}$. Da er, siden f er kontinuerlig, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en tellbar åpen dekning av X. Siden X er antatt å være tellbart kompakt, finnes endelig underdekning. Altså er f begrensa. Vi har dermed vist at tellbart kompakte rom er pseudokompakte.
- Teorem 2.38 viser at følgekompakte rom er tellbart kompakte.
- En kan lage eksempler som viser at ingen andre implikasjoner holder generelt.

Det finnes et Bolzano-Weierstrass liknende teorem også for tellbar kompakthet.

Teorem 2.38. *La X være et topologisk rom. Da er følgende utsagn ekvivalente:*

(i) X er tellbart kompakt.

(ii) Hver tellbar familie av lukka mengder med endelig snitt egenskapen har ikke-tomt snitt.

(iii) Hver ekte minkende tellbar familie av lukka mengder har ikke-tomt snitt.

(iv) Hver følge i X har et klyngepunkt.

(v) Hver følge i X har et konvergent delnett.

Bevis. Beviset blir veldig likt ting vi har gjort før, men la oss likevel gjennomføre det.

(i) $\Rightarrow$ (ii): La X være tellbart kompakt og anta $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ er en tellbar familie av lukka delmengder av X med endelig snitt egenskapen. La $U_\alpha = F_\alpha^c$. Hvis $\cap_\alpha F_\alpha$ er tomt er $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ en tellbar dekning av X. Siden X er tellbart kompakt finnes endelig delfamilie $(U_\alpha)_{\alpha\in B}$ slik at $X = \cup_{\alpha\in B} U_\alpha$. Men ved De Morgans lov er da $\cap_{\alpha\in B} F_\alpha = X^c = \emptyset$, en konflikt med endelig snitt egenskapen til (F_α).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) er opplagt. (iii) $\Rightarrow$ (iv): La (x_n) være ei følge i X. Den tellbare, ekte minkende familien $(F_k) = (\overline{\{x_n \ : k \leq n\}})_{k\in\mathbb{N}}$ har endelig snitt egenskapen. Ved (iii) finnes et $x \in \cap_k F_k$. Proposisjon 2.36 viser at x er et klyngepunkt for (x_n).

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) følger fra Proposisjon 2.35.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Anta X ikke er tellbart kompakt. Velg åpen dekning $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uten endelig underdekning. For hver $n \in \mathbb{N}$ finnes $x_n \in X \setminus \cup_{i=1}^n U_i$. Vi må forklare at (x_n) ikke har noe klyngepunkt. La $x \in X$. Siden $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er dekning, finnes $k \in \mathbb{N}$ slik at $x \in U_k$. La $n = k + 1$. Ingen etterfølger av x_n er da i den åpne mengda U_k. $\square$

Fra Teorem 2.38 oppdager vi en type kompakthet som er svakere enn tellbar kompakthet: Det kunne jo tenkes at (x_n) har et grensepunkt som ikke er et klyngepunkt.

Definisjon 2.39. *X er* sekvensielt grensepunktkompakt *dersom enhver følge i X har et grensepunkt i X.*

La oss kalle ei mengde $E \in X$ *diskret* dersom det for hvert punkt $x \in E$ finnes åpen mengde U_x med $U_x \cap E = \{x\}$. I normale rom forenkles situasjonen ganske mye:

Lemma 2.40. *Når et normalt rom ikke er tellbart kompakt eksisterer ei tellbart uendelig, lukka, diskret mengde.*

Bevis. Fra Teorem 2.38 (iii) kan vi finne ei ekte minkende følge (C_i) av lukka mengder med tomt snitt. For hver i finnes x_i som ligger i C_i men ikke i C_{i+i}. La

$$D_i = \{x_1, x_2, ..., x_i\} \cup C_{i+1}.$$

Dette er lukka mengder, og det er jo da også snittet $D = \cap_{i=1}^{\infty} = \emptyset$ lukka. D er vår kandidat. Vi har at $D = \{x_1, x_2, ...\}$, inneholdt D flere punkter, ville dette måtte høre til $\cap_i C_i$. Altså er D tellbar. Det gjenstår å vise at D er diskret. Fra konstruksjonen av (x_i) vet vi at x_1 ikke er grensepunkt for $(x_i)_{i\geq 2}$. Dermed er $(x_i)_{i\geq 2}$ lukka. Ved normalitet kan vi legge åpen V om x_1 slik at $V \cap (x_i)_{i\geq 1} = \{x_1\}$. Samme argument gir at $\{x_1\} \cup (x_i)_{i\geq 3}$ er lukka, og normalitet gir ei åpen V som skiller ut x_2. For x_n får vi tilsvarende at $\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\} \cup (x_i)_{i\geq n+1}$ er lukka, og normaliteten gir oss V som skiller ut x_n. Dette viser at (x_i) er diskret. □

Korollar 2.41. *I normale rom faller tellbar kompakthet og sekvensiell grensepunktkompakthet sammen.*

Så kommer noen ekvivalente formuleringer av pseudokompakthet:

Proposisjon 2.42. *La X være et topologisk rom. Da er følgende utsagn ekvivalente:*

(i) X er pseudokompakt.

(ii) Hver $f \in C(X)$ oppnår supremum i et $x \in X$, dvs. f oppnår maksimum over X.

(iii) Hver $f \in C(X)$ oppnår minimum over X.

(iv) Hver $f \in C(X)$ oppnår både maksimum og minimum over X

Bevis. (i) ⇒ (ii): Anta det finnes $f \in C(X)$ som ikke oppnår sitt supremum s. Definer $g : X \to \mathbb{R}$ ved

$$g(x) = \frac{1}{s - f(x)}.$$

Da er g kontinuerlig (sammensatt av to kontinuerlige funksjoner) og ubegrenset. (ii) ⇒ (iii) følger ved å se på $-f$, (iii) ⇒ (iv) og (iv) ⇒ (i) er trivielle. □

I normale rom gjelder Tietzes utvidelsesteorem, det kan vi utnytte:

Proposisjon 2.43. *I normale rom er tellbar kompakthet og pseudokompakthet ekvivalente begreper.*

Bevis. Vi trenger å vise at pseudokompakthet nå medfører tellbar kompakthet. Anta X ikke er tellbart kompakt. Fra Lemma 2.40 kan vi finne tellbart uendelig, diskret, lukka mengde $C = \{x_n\}$. Vi definerer nå g på C ved at $g(x_n) = n$. Siden C er diskret er g kontinuerlig i hvert punkt. Tietzes utvidelsesteorem gir oss nå en ubegrenset, reell kontinuerlig funksjon f definert på X. Dermed er X ikke pseudokompakt. □

I førstetellbare rom kan vi greie oss med følgegrenser når det gjelder å lokalisere grensepunkt. Det hjelper oss.

Proposisjon 2.44. *I førstetellbare rom er tellbar kompakthet og følgekompakthet ekvivalent.*

Bevis. Siden følgekompakthet alltid medfører tellbar kompakthet trenger vi bare vise at tellbar kompakthet i dette tilfellet medfører følgekompakthet. La x være et klyngepunkt for $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vi skal lage ei delfølge av (x_n) som konvergerer til x. Siden X er førstetellbart, har topologien τ et nettverk som ved x kan skrives (U_i). Vi kan anta $U_1 \supset U_2 \supset ....$ La B_1 være de (uendelig mange) $n \in \mathbb{N}$ slik at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er med i U_1. Dette gir delfølga $(x_n)_{n\in B_1}$. I B_1 finnes ei uendelig delmengde B_2 slik at $(x_n)_{n\in B_2} \subset U_2$. Slik fortsetter vi. La nå n_1 være det minste elementet i B_1. La n_2 være det minste elementet i B_2 som er større enn n_1. La n_3 være det minste elementet i B_3 som er større enn n_2 osv. Da er $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ei delfølge av $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ som per konstruksjon konvergerer til klyngepunktet x. □

Vi samler opplysninger:

Korollar 2.45. *La X være et førstetellbart, normalt topologisk rom. Da er følgende utsagn ekvivalente:*

(i) X er tellbart kompakt.

(ii) X er sekvensielt grensepunktkompakt.

(iii) X er pseudokompakt.

(iv) X er følgekompakt.

2.7 Metriske rom

Vi skal nå møte en svært viktig type topologiske rom, nemlig metriske rom. Disse rommene ble introdusert av M. Frechet i 1906, noen år før generelle topologiske rom.

Definisjon 2.46. *La X være ei mengde. En* metrikk *på X er en funksjon $d : X \times X \to \mathbb{R}$ slik at*

- $d(x, y) \geq 0$ *for alle* $x, y \in X$.
- $d(x, y) = 0$ *hvis og bare hvis* $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$ *for alle par* $x, y \in X$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *for alle tripler* $x, y, z \in X$.

$d(x, y)$ *kalles* distansen *eller* avstanden *mellom* x *og* y. *Mengda* X *sammen med metrikken* d *kalles et* metrisk rom *og vi skriver dette* (X, d).

Vi kjenner allerede haugevis av metriske rom; normen $\|x - y\|$ i et normert rom ser vi er en metrikk, så normerte rom er metriske. Spesielt er da de Euklidske rom ℓ_2^n metriske rom. Normerte rom er forutsatt å være vektorrom. Vi ser at metriske rom ikke er forutsatt å ha noen algebraisk struktur.

Når det finnes en metrikk på X induseres en topologi ved at vi lager et nettverk på følgende måte: For hver $x \in X$ og hver $\varepsilon > 0$ lar vi

$$U(x, \varepsilon) = \{y \in X \ : d(x, y) < \varepsilon\}. \tag{2.3}$$

(du bør vise at disse danner et nettverk, se Oppgave 17). Hvis $A \subset X$ og $x \in X$ kan vi snakke om avstanden $d(x, A)$ fra x til A og definere denne ved

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Vi lister noen grunnleggende egenskaper ved metriske rom:

Proposisjon 2.47. *I et metrisk rom* X *gjelder*

(a) X *er førstetellbart.*

(b) For $A \subset X$ *gjelder at* $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

(c) $B(x, r) \overset{def}{=} \overline{U(x, r)} = \{y \in X \ : d(x, y) \leq r\}$.

(d) For hver delmengde $A \subset X$ *er funksjonen* $f : X \to \mathbb{R}$ *definert ved* $f(x) = d(x, A)$ *kontinuerlig.*

(e) X *er normalt.*

Bevis. (a) X er førstetellbart fordi $U(x, n) = \{y \in X \ : d(x, y) < 1/n\}$ gir et nettverk med samme topologi som nettverket definert i (2.3) (se Oppgave 17).

(b) Vi har at $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, a(\varepsilon) \in A \ : d(x, a(\varepsilon)) < \varepsilon \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

(c) Dette følger fra punkt (b).

(d) Vi må vise at for alle $x \in X$ og alle $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at $f(U(x, \delta)) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. La x, y være to elementer i X. For alle $a \in A$ gjelder ved trekantulikheten at $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Dermed må

$$\begin{aligned} d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) &\leq \inf_{a \in A} (d(x, y) + d(y, a)) = d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a) \\ &= d(x, y) + d(y, A) \end{aligned}$$

Da får vi at $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$. Ved å bytte rundt x og y, får vi $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Dermed får vi

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

La nå $x \in X$ og $\varepsilon > 0$. Velg $\delta = \varepsilon$. For $y \in U(x, \delta)$ har vi da nettopp vist at $y \in f(U(x, \varepsilon))$.

(e) La A og B være to disjunkte, lukka delmengder av X. Ved (b) og (d) er $f(x) = d(x, A)$ en kontinuerlig, reell funksjon slik at $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$. La $d_1 = d(A, B) = \inf_{b \in B} d(b, A)$. La $d_2 = \sup_{b \in B} d(A, b)$. Da er, ved (b), $d_1 > 0$. Det er to tilfeller av d_2; endelig eller uendelig. La $\varepsilon < d_1/2$. Da er $f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ en åpen mengde som dekker A, mens $f^{-1}(d_1 - \varepsilon, d_2 + \varepsilon)$ dekker B når $d_2 < \infty$. De to har tomt snitt siden $\varepsilon < d_1/2$. Hvis $d_2 = \infty$, bruker vi $f^{-1}(d_1 - \varepsilon, \infty))$ som dekning av B.

□

For ei delmengde E i et metrisk rom X kan vi definere *diameteren* til E ved

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x,y \in E} d(x, y).$$

Dersom $\operatorname{diam} E < \infty$, sier vi at E er *begrensa.* Vi har at $\operatorname{diam} U(x, r) = r = \operatorname{diam} B(x, r)$. Hvis E kan dekkes med endelig mange kuler, $U(x_i, \varepsilon)_{x_i \in E}$, uansett hvor liten ε er, kalles E *totalt begrensa.* Enhver totalt begrensa mengde er begrensa, men vi skal se i Teorem 2.48 at det omvendte ikke trenger være tilfelle.

Vi kan enkelt generalisere kompletthetsbegrepet fra $\mathbb{R}$ til vilkårlige metriske rom: Ei følge (x_n) kalles for ei *Cauchyfølge* dersom vi for alle $\varepsilon > 0$ kan finne et $N \in \mathbb{N}$ slik at hvis $m, n \geq N$, så er $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Det metriske rommet X kalles *komplett* dersom enhver Cauchyfølge konvergerer til et punkt i X. Lukka delmengder av X er komplette.

I metriske rom faller alle kompakthetstypene vi har sett til nå sammen. Og disse er igjen ekvivalente til en ny betingelse:

Teorem 2.48. *La X være et metrisk rom og $K \subset X$. Følgende utsagn er da ekvivalente.*[6]

(a) K er kompakt.

(b) K er tellbart kompakt.

(c) K er pseudokompakt.

(d) K er følgekompakt.

(e) K er komplett og totalt begrensa.

Bevis. Ved å bruke Korollar 2.45 og Proposisjon 2.47, ser vi at (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d). Vi skal vise (d) $\Rightarrow$ (e), (e) $\Rightarrow$ (d) og at (d)+(e) $\Rightarrow$ (a).

(d) $\Rightarrow$ (e): Hvis K ikke er komplett finnes ei Cauchyfølge $(x_n) \subset K$ som ikke har grense i K. Ingen delfølge kan konvergere i K fordi, siden (x_n) er Cauchy, ville da (x_n) konvergere til samme grensa. Så kompletthet er en nødvendig betingelse for følgekompakthet. Hvis K ikke er totalt begrensa, la $\varepsilon > 0$ være slik at K ikke kan dekkes med endelig mange kuler av radius ε uansett hvor de har sentrene sine. La $x_1 \in K$. Velg $x_2 \in K \setminus U(x_1, \varepsilon)$. Velg så $x_3 \in K \setminus \cup_{i=1}^{2} U(x_i, \varepsilon)$ og fortsett sånn. Da er (x_n) ei følge uten konvergent delfølge. Altså er det også nødvendig at K er totalt begrensa.

(e) $\Rightarrow$ (d): La (x_n) være ei følge i K. Siden K er totalt begrensa, kan K dekkes av et endelig antall kuler med radius $1/2$. Minst ei av disse kulene må inneholde uendelig mange elementer fra følga, kall denne U_1 og den korresponderende

[6] Sammenhengen med punkt (e) er oppdaga av M. Fréchet som en del av hans doktorarbeid.

delmengda av $\mathbb{N}$ kaller vi $\mathbb{N}_1$. Neste steg: $K \cap U_1$ kan dekkes av et endelig antall kuler med radius $1/4$. Minst ei slik kule U_2 inneholder ei uendelig delmengde $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$. Sånn kan vi fortsette, og vi ender opp med ei samling av kuler (U_i) der U_i har radius 2^{-i} samt en minkende familie av uendelige delmengder av naturlige tall, $\mathbb{N}_i$. Disse er kopla ved at $x_n \in U_j$ når $n \in \mathbb{N}_j$. Siden hver $\mathbb{N}_j$ er uendelig kan vi plukke $n_1 \in \mathbb{N}_1, n_2 \in \mathbb{N}_2, ...$ slik at $n_1 < n_2 < ....$ Da er (x_{n_k}) Cauchy fordi for $j \geq k$ er $d(x_{n_j}, x_{n_k}) < 2^{-j}$. Dermed har vi påvist ei Cauchy delfølge. Resultatet følger nå av komplettheten som garanterer at delfølga faktisk konvergerer.

(d)+(e) $\Rightarrow$ (a): Vi skal først vise at

hvis (V_α) er ei åpen dekning av K og K er følgekompakt, så finnes et $\varepsilon > 0$ (avhengig av dekninga (V_α)) slik at hver kule i X med radius ε som snitter K faktisk er inneholdt i ei V_α.[7]

Anta i motsatt fall at det for hver $n \in \mathbb{N}$ finnes kule $U_n = U(x_n, 2^{-n})$ som snitter K uten å ligge inni noen V_α. Velg $x_n \in U_n \cap K$. Siden K er følgekompakt har (x_n) ei delfølge som konvergerer til et $x \in K$. Vi lar likegodt (x_n) være denne delfølga. Siden (V_α) er ei dekning av K finnes α slik at $x \in V_\alpha$. Og siden V_α er åpen finnes kule $U(x, \varepsilon)$ slik at $U(x, \varepsilon) \subset V_\alpha$. Men velg nå n så stor at $d(x_n, x) < \varepsilon/3$ og $2^{-n} < \varepsilon/3$. Da er $U_n \subset U(x, \varepsilon) \subset V_\alpha$, som er en selvmotsigelse.

Vi kan nå avslutte argumentet: La (V_α) være ei åpen dekning av K. Ved observasjonen over finnes $\varepsilon > 0$ slik at enhver kule av radius ε som snitter K befinner seg inni en V_α. Men ved (e) kan K dekkes med, la oss si, M kuler $U(x_1, \varepsilon), U(x_2, \varepsilon), ..., U(x_M, \varepsilon)$. La V_{α_j} være slik at $U(x_j, \varepsilon) \subset V_{\alpha_j}$. Da er $(V_{\alpha_j})_{j=1}^M$ ei endelig underdekning. $\square$

Vi skal ha anledning til å bruke dette teoremet flere ganger. Det finnes tilfeller der Teorem 2.48 (a)-(d) holder uten at rommet er metrisk; Det finnes en veldig naturlig topologi på normerte rom som gjør enhetskula, $\{x : \|x\| \leq 1\}$ til et topologisk rom som ikke nødvendigvis er metrisk, men der Teorem 2.48 (a)-(d) likevel holder. Vi kommer tilbake med en kommentar om dette når vi har introdusert svak topologi på normerte rom.

La oss runde av denne seksjonen med det resultatet vi starta med som motivasjon for definisjonen av kompakthet i topologiske rom i Seksjon 2.4.

Korollar 2.49. *I $\mathbb{R}^n$ med Euklidsk metrikk er de kompakte mengdene nøyaktig de mengdene som er lukka og begrensa.*

Bevis. Dette følger fra Teorem 2.48 såsnart vi har vist at begrensa delmengder av $\mathbb{R}^n$ er totalt begrensa siden lukka delmengder av $\mathbb{R}^n$ er komplette. Vi gjør argumentet i $\mathbb{R}^2$, idéen kommer da klart fram. La $K \subset \mathbb{R}^2$ være begrensa. Da finnes kube $Q = [-r, r] \times [-r, r]$ slik at $K \subset Q$. Det er nok å vise at Q er totalt begrensa. La $\varepsilon > 0$. Del intervallet $[-r, r]$ inn i biter med lengde $< \sqrt{2}\varepsilon/2$. Da deles Q inn i små kvadrater med sidelengder $< \sqrt{2}\varepsilon/2$. Diagonalen i hvert av disse kvadratene er da, ved Pythagoras setning, $< \varepsilon$. Hvert kvadrat har et senter og er dekket av en sirkel med radius $< \varepsilon$. Siden det er endelig mange kvadrater, er det endelig mange sirkler også. Siden ε var vilkårlig er Q totalt begrensa. $\square$

[7]Et slikt ε kalles *Lebesguetallet* til dekninga (V_α).

2.8 Alexanders lemma og Tychonoffs teorem

Anta vi kjenner ei dekning som genererer topologien vi jobber med. Da vet vi at vi i arbeidet med å undersøke konvergens og kontinuitet kan redusere problemet til bare å arbeide med dekningas medlemmer. Tychonoffs teorem er et resultat om kompakthet i produkttopologi, et tilfelle der vi kjenner et nettverk for topologien. Følgende interessante resultat av James Alexander (1888-1971) fra begynnelsen av 1920-tallet reduserer arbeidet med å teste kompakthet til det å arbeide med medlemmer fra dekninga.

Teorem 2.50. (Alexanders lemma) *Anta (X, τ) er et topologisk rom der τ er generert av Δ. Hvis hver dekning av X av medlemmer fra Δ har en endelig underdekning, så er X kompakt.*

Bevis. Hvis X ikke er kompakt finnes åpen dekning uten endelig underdekning. Vi må vise at en av disse kommer fra Δ, og da trenger vi å produsere en kandidat. La $\mathcal{U}$ være samlinga av åpne dekninger uten endelig underdekning. Vi kan ordne $\mathcal{U}$ på naturlig måte. Legg nå merke til at hvis $(\mathcal{A}_\beta)_{\beta \in B}$ er ei lineært ordna delsamling av åpne dekninger fra $\mathcal{U}$, så er også $\cup_\beta \mathcal{A}_\beta \in \mathcal{U}$. Siden alle lineært ordna delsamlinger dermed har ei øvre skranke (unionen), finnes ei maksimal lineært ordna delsamling $\mathcal{A}$.[8] At $\mathcal{A}$ er maksimal betyr i dette tilfellet at hvis U er åpen, så har $\mathcal{A} \cup \{U\}$ endelig underdekning. La oss sette $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \Delta$. $\mathcal{B}$ er kandidaten vår; vi må nå bare vise at $\mathcal{B}$ virkelig dekker X.

Anta $x \in X \setminus \cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Vi kan finne $U \in \mathcal{A}$ slik at $x \in U$ (siden vi vet at $\mathcal{A}$ dekker). Så vet vi at U er en union av endelige snitt fra Δ, spesielt finnes $V_1, V_2, ..., V_n \in \Delta$ slik at $x \in \cap_{i=1}^n V_n \subset U$. Da kan ikke noen V_i komme fra $\mathcal{A}$ siden x er utenfor $\cup_{B \in \mathcal{B}} B$. Siden $\mathcal{A}$ er maksimal har $\mathcal{A} \cup \{V_i\}$ endelig underdekning for hver $1 \leq i \leq n$. Med andre ord finnes endelige unioner W_i fra $\mathcal{A}$ slik at $V_i \cup W_i = X$. Men nå er

$$U \cup \left(\bigcup_{i=1}^n W_i \right) \supset \left(\bigcap_{i=1}^n V_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n W_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (V_i \cup W_i) = X,$$

ei endelig underdekning fra $\mathcal{A}$. $\square$

Det neste resultatet vakte adskillig oppsikt og overraskelse da det kom. Vi skal bruke det senere, nemlig når vi skal bevise Alaoglus teorem.

Teorem 2.51. (Tychonoffs teorem, 1930) *Hvis $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ er en familie av kompakte topologiske rom, så er $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ (med produkttopologi) kompakt.*

Bevis. Ved Alexanders lemma er det nok å vise at hver dekning med mengder av typen $\pi_\alpha^{-1}(U)$, U åpen i X_α, har endelig underdekning. La $\mathcal{A}$ være ei slik dekning og la, for hver α, $\mathcal{A}_\alpha$ være alle åpne mengder U i X_α slik at $\pi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{A}$. Anta et øyeblikk at vi kunne vise at for en eller annen $\alpha \in A$ må $\mathcal{A}_\alpha$ være ei åpen dekning av X_α. Da kan vi bruke at X_α er kompakt til å velge endelig underdekning $U_1, U_2, ..., U_n$. Men da er $\pi_\alpha^{-1}(U_1), \pi_\alpha^{-1}(U_2), ..., \pi_\alpha^{-1}(U_n)$ ei endelig underdekning av $\mathcal{A}$.

Det gjenstår altså å argumentere for at for en eller annen $\alpha \in A$ må $\mathcal{A}_\alpha$ være ei åpen dekning av X_α. Anta ikke. Da finnes for hver α en x_α som ikke er

[8] Her brukte vi Zorns lemma: *Hvis enhver lineært ordna samling har en øvre skranke, så finnes ei maksimal lineært ordna samling.*

dekka av noe medlem av $\mathcal{A}_\alpha$. La x være 'den' $x \in X$ som er slik at $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ for alle α.[9] x kan da ikke ligge i noen $\pi_\alpha^{-1}(U)$, som er imot det faktum at $\mathcal{A}$ var antatt å være ei åpen dekning. $\square$

Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906-1993) viste dette resultatet for produkter av intervaller. Det generelle tilfellet ble vist i 1937 av tsjekkeren Eduard Čech (1893-1960). Så teoremet skulle kanskje heller hete Čechs teorem. Men Čech er berømt for noe som heter Stone-Čech kompaktifisering, og i dette prinsippet oppdaga visstnok Tychonoff Čechs del før Čech, så det går vel opp i opp da:-)

2.9 Oppgaver

Oppgaver til Seksjon 2.1

Oppgave 1. (a) La X være et topologisk rom. Vis at at en lineærkombinasjon av to reelle eller komplekse kontinuerlige funksjoner definert på X er kontinuerlig, dvs. vis at $C(X)$ er et vektorrom.

(b) La $\phi_n(t) = t^n, n = 1, 2, ...$ Vis at (ϕ_n) konvergerer punktvis mot en diskontinuerlig funksjon.

Oppgave 2. Vi skal studere det normerte rommet $C^{(1)}[0,1]$, altså rommet av deriverbare funksjoner på $[0,1]$. Fra Eksempel 2.3 vet vi at derivasjonsoperatoren ikke er kontinuerlig ved sup-norm. Vi skal nå legge på en annen norm, nemlig.

$$|||f||| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|.$$

Vi setter $X = (C^{(1)}[0,1], |||\cdot|||)$.

(a) Vis at $\|\cdot\|$ virkelig er en norm slik at X er et normert rom.

(b) Finn noen elementer med norm 1 i X.

(c) Beskriv med ord hva det vil si at følga (f_n) konvergerer til f i X.

(d) Vis at derivasjonsoperatoren $\psi : X \to C[0,1]$ nå er kontinuerlig.

(e) Er $\Phi(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ en norm på $C^{(1)}[0,1]$?

Oppgave 3. La $X = \ell_2$. For $x \in \ell_2$ virker e_n som en lineær funksjonal ved at $e_n(x) = x_n$. La $S = (e_n)$. Vi vet nå at $S \in \ell_2^+$.

(a) Vis at A skiller punkter på ℓ_2. La τ være S-topologien på ℓ_2.

(b) Hva er normen til e_k som elementer i det normerte rommet ℓ_2? Vis at følga (e_k) ikke konvergerer i norm.

(c) Beskriv med ord hva det vil si at ei følge i ℓ_2 konvergerer i S-topologi.

(d) Vis at (e_n) konvergerer til 0 i S-topologi.

[9] At en slik x finnes er akkurat det berømte og mye omdiskuterte Axiom of Choice. Dette aksiomet er ekvivalent til Zorns lemma, til Hausdorffs maksimalitetsteorem og faktisk også til Tychonoffs teorem; dette siste ble vist i 1950 av John L. Kelley (1917-1999).

Oppgaver til Seksjon 2.2

Oppgave 4. Vi skal se litt på karakteriseringer av normale rom.

(a) Vis at egenskapen (2.1) karakteriserer normale rom.

(b) Vis at X er normalt hvis og bare hvis for hvert par A, B av disjunkte lukka mengder, det finnes åpen U med $A \subset U$ og $\overline{U} \cap B = \emptyset$.

Oppgave 5. Ei mengde i et topologisk rom X sies å være ei $\mathcal{G}_\delta$-mengde dersom den er et tellbart snitt av åpne mengder. Vi får ikke bruk for det her, men en tellbar union av lukka mengder kalles ei $\mathcal{F}_\sigma$-mengde.[10]

(a) La $X = \mathbb{R}$. La $A = [0, 1]$ og $B = [2, 3]$. Finn et eksplistt uttrykk for en Urysohnfunksjon for paret (A, B). Forklar at du kan velge den slik at $f^{-1}(0) = A$.

(b) Vis at intervaller $[a, b]$ er $\mathcal{G}_\delta$-mengder i $\mathbb{R}$.

(c) La A og B være lukka disjunkte mengder. La f være en Urysohnfunksjon. Vis at $f^{-1}(0)$ er ei $\mathcal{G}_\delta$-mengde.

(d) I Urysohns lemma sies det ingenting om at A sammenfaller med $f^{-1}(0)$. Det kan vi ikke vente heller. Men anta A er ei $\mathcal{G}_\delta$-mengde. Vis at da finnes en Urysohnfunksjon slik at $A = f^{-1}(0)$.
(Hint: Skriv A som et minkende snitt av åpne mengder U_n. La f_n være Urysohnfunksjon for paret $(\overline{U_n}, B)$. Se på $f(x) = \sum_n 2^{-n} f_n(x)$.)

Oppgave 6. Her skal vi arbeide mer med egenskaper til normale rom.

(a) La X være normalt rom og $F_1, F_2, ..., F_n$ være lukka delmengder slik at $\cap_{i=1}^n F_i = \emptyset$. Vis at da finnes åpne $V_i \supset F_i$ slik at $\cap_{i=1}^n \overline{V_i} = \emptyset$ også.

(b) Vis at X er normalt hvis og bare hvis det har følgende egenskap: *For hver dekning $U_1, U_2, ..., U_n$ av åpne mengder finnes n kontinuerlige funksjoner $f_i : X \to [0, 1]$ slik at $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ og hver f_i er null på $X \setminus U_i$.*

Oppgaver til Seksjon 2.3

Oppgave 7. Noen retta mengder.

(a) Vis at $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$ er retta mengder under ordninga $\leq$.

(b) Vis at, når (X, τ) er et topologisk rom og β er et nettverk for τ, så er β_x ei retta mengde under invers mengdeinklusjon.

(c) La B være ei mengde og la A være samlinga av endelige delmengder av B. Vis at A er ei retta mengde under mengdeinklusjon.

Oppgave 8. La A og B være retta mengder under ordningene $\preceq_A$ og $\preceq_B$ hhv. Definer ei ordning $\preceq$ på $A \times B$ ved at $(a, b) \preceq (c, d)$ hvis og bare hvis $a \preceq_A c$ og $b \preceq_B d$. Vis at $\preceq$ gjør $A \times B$ til ei retta mengde.

Oppgave 9. La A være ei retta mengde og la $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ og $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ være nett i to topologiske rom X og Y hhv. Vis at hvis $x_\alpha \to x$ og $y_\alpha \to y$, så vil $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y)$ i $X \times Y$.

[10] Betegnelsene $\mathcal{G}_\delta$ og $\mathcal{F}_\sigma$ kommer fra tysk tradisjon. $\mathcal{G}$ står for *Gebiet* δ står for *durchsnitt.* σ står for *summe* . Men $\mathcal{F}$'en står for det franske ordet *fermé,* som betyr lukka.

Oppgaver til Seksjon 2.4

Oppgave 10. La K være kompakt i X. Vis at da er K et kompakt rom i sin relative topologi. Vis også at det omvendte ikke holder.

Oppgave 11. Forklar tolkninga som er gitt like før Proposisjon 2.32. (Hint: La f være identitetsfunksjonen på X.)

Oppgave 12. La c_0 være mengda av nullfølger og $K = \{(x_n) \in c_0 \ : \|(x_n)\| = \sup_n |x_n| \leq 1\}$. For hver følge $(a_n) \in \ell_1$ definerer vi en funksjonal på c_0 ved $(a_n)(x_n) = \sum_n a_n x_n$. La w være topologien på c_0 generert av ℓ_1.

(a) Vis at (a_n) er lineær.

(b) Vis at (a_n) oppfyller at $|(a_n)(x_n)| \leq \|(a_n)\|_{\ell_1} cdot \|(x_n)\|_{c_0}$.

(c) La $(a_n) = (2^{-n})$. Vis at (a_n) ikke oppnår maksimumsverdi på K.

(d) Er K w-kompakt?

Oppgave 13. Denne oppgava skal handle om *Baire-kategori,*[11] et begrep som har vist seg å være nyttig i mange sammenhenger.

(a) La K være kompakt og la (U_n) være en tellbar familie av åpne, tette delmengder av K. La U være ei vilkårlig åpen delmengde av K. Forklar at det finnes åpen K_1 slik at $\overline{K_1} \subset U \cap U_1$.

(b) Forklar at det finnes åpen K_2 slik at $\overline{K_2} \subset K_1 \cap U_2$ og åpen K_3 slik at $\overline{K_3} \subset K_2 \cap U_3$ osv.

(c) Forklar at $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{K_n} \neq \emptyset$.
(Hint: Endelig snitt egenskap.)

(d) Forklar at du gjennom (a), (b) og (c) har vist følgende teorem:

I et kompakt rom er et tellbart snitt av tette åpne mengder tett.

(e) Vis at et kompakt rom ikke kan være en tellbar union av ingensteds tette mengder.
(Hint: Vis først at hvis E er ingensteds tett, så er $\overline{E}^c$ tett og åpen. Bruk så De Morgans lov og teoremet over.)

Topologiske rom som oppfyller at tellbare snitt av tette åpne mengder er tett kalles *Bairerom.* Vi har nå vist at kompakte rom er Baire rom. Senere skal vi også se at komplette metriske rom er Bairerom. Mengder som kan skrives som en tellbar union av ingensteds tette mengder sier vi at er av *første Baire-kategori* mens de som ikke er av første kategori sies å være av *andre Baire-kategori.* Noen sier *mager* og *ikke-mager.* I punkt (e) har du vist at kompakte rom er av andre kategori.

(f) Vis at begrepene andre kategori og Bairerom er ekvivalente.

Oppgaver til Seksjon 2.5

Oppgave 14. La (x_n) være ei følge i et topologisk rom X. Vis at hver delfølge av (x_n) også er et delnett.

Oppgave 15. La X og Y være topologiske rom. Et nett i X kalles *universelt* dersom det har den egenskapen at for hver delmengde $M \subset X$ så er nettet enten før eller siden i M eller så er det før eller siden i $X \setminus M$.

(a) La (x_α, y_α) være et universelt nett i $X \times Y$. Forklar at da er $(\pi_1(x_\alpha)$ universelt i X og $(\pi_2(x_\alpha)$ universelt i Y.

[11] Baire-kategori er oppkalt etter franskmannen René Baire (1874-1932).

(b) Utvid resultatet i (a) til vilkårlige produkter.

(c) Vis at hvis $K \subset X$ er kompakt og $(x_n) \subset K$ er et universelt nett, så konvergerer (x_n).
(Hint: (x_n) har et konvergent delnett.)

(d) Vis at hvis (X_α) er en familie av kompakte rom, så vil ethvert universelt nett i $\Pi_\alpha X_\alpha$ konvergere.

At ethvert universelt nett konvergerer er faktisk ekvivalent til kompakthet, men det er vanskeligere å vise.

Oppgaver til Seksjon 2.6

Oppgave 16. La c_0 være mengda av nullfølger og $B = \{(x_n) \in c_0 \ : \|(x_n)\| = \sup_n |x_n| \leq 1\}$.

(a) Vis at B ikke er sekvensielt kompakt.
(Hint: Se på følga (e_n) og forsøk å finne konvergent delfølge.)

(b) Vis at for alle $x \in B$ finnes $y \neq x, z \neq x \in B$ slik at $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$.[12]

Oppgaver til Seksjon 2.7

Oppgave 17. Vi har overlatt litt arbeid til leseren:

(a) Vis at samlinga definert i (2.3) er et nettverk.

(b) Vis at det lokalt tellbare nettverket vi får ved å la ε gjennomløpe brøkene $1/n$ gir samme topologi som nettverket i (a).

Oppgave 18. La c_0 være mengda av nullfølger og $K = \{(x_n) \in c_0 \ : \|(x_n)\| = \sup_n |x_n| \leq 1\}$.

(a) Vis at K er et metrisk rom.

(b) Vis at K er komplett.

(c) Forklar at K er begrensa, men ikke totalt begrensa.

(d) La $C \subset K$ være definert ved $C = (e_n/n)_{n=1}^\infty$. Vis at C er totalt begrensa og dermed kompakt.

Oppgave 19. La X være et normert rom og definer en funksjon $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ ved at

$$\rho(x, y) = \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}$$

(a) Vis at ρ er en metrikk på X.
(Hint: Bruk trekantulikhet i teller og omvendt trekantulikhet i nevner.))

(b) Vis at ρ ikke er en norm på X.
(Hint: La $\|x\| = 1$ og se på hvor langt ρ mener det er fra x til $2x$.)

(c) Vis at ei følge konvergerer i metrikken ρ hvis og bare hvis den konvergerer i norm.

(d) Forklar at (X, ρ) og $(X, \|\cdot\|)$ er homeomorfe.

Oppgave 20. La X være ei mengde med potensmengde $\mathcal{P}(X)$. For to mengder $A, B \in \mathcal{P}(X)$ definerer vi den symmetriske differensen $A\Delta B$ ved $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Vi skal nå la X være en sirkel med radius 10 om origo i $\mathbb{R}^2$ og vi skal la $m(A)$ bety arealet til A for $A \subset X$. La d være definert på $X \times X$ ved

$$d(A, B) = m(A\delta B)$$

[12]Noe slikt kan aldri skje i kompakte delmengder av normerte rom i følge et berømt teorem fra 1940 som heter Krein-Milman teoremet.

(a) Vis at d er en metrikk på $\mathcal{P}(X)$.

(b) La A_n være kvadrater med høyde 2 og sentrum i $(1/n, 0)$, der toppen er parallell med x-aksen. Vis at (A_n) konvergerer og bestem grensa.

(c) La (A_n) være en konvergent minkende familie av mengder. Bestem grensa.

Oppgaver til Seksjon 2.8

Oppgave 21. Gi et direkte bevis for at produktet av to kompakte rom er kompakt.

Oppgave 22. La K og A være mengder der K er kompakt Hausdorff. Vis at K^A er kompakt Hausdorff.

Kapittel 3

Normerte vektorrom med sine svake topologier

Vi skal nå studere vektorrom med topologier. Mange av eksemplene vi har studert til nå har hatt en algebraisk struktur i tillegg til den topologiske, men et eventuelt samspill mellom topologiske egenskaper og algebraiske egenskaper har vi ikke lagt vekt på. Den kanskje viktigste kombinasjonen topologi/algebra er begrepet normert rom. Men for å studere normerte rom viser det seg at vi må studere sammenhengen algebra/topologi mer generelt. Vi skal likevel forsøke å ikke generalisere for generaliseringas skyld, men legge vekt på å få fram sentrale ideer.

La X være et vektorrom over en skalarkropp $\mathbb{F}$ (som vi lar være $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). La $a \in \mathbb{F}$ og la A og B være to delmengder av X. Vi bruker notasjonene

- $A + B = \{x + y \ : x \in A, y \in B\}$. Legg merke til at $A + B = B + A$.
- $aA = \{ax \ : x \in A\}$.

Dersom mengda B skulle bestå av bare ett punkt, $B = \{x\}$, skriver vi $x + A$ og vi kaller mengder av typen $x + A$ for *translater* av A. Denne notasjonen vi bruker er veldig praktisk, men vi må være litt forsiktige når vi bruker den:

Eksempel 3.1. La A være delmengda i $\mathbb{R}^2$ dannet ved unionen av intervallene $[0, 1]$ på hver av aksene. Da er $A + A$ lik kvadratet med hjørner $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ og $(0, 1)$ pluss intervallet $[0, 2]$ på hver av aksene, mens mengda $2A$ kun blir unionen av intervallene $[0, 2]$ på hver av aksene.

3.1 Topologiske vektorrom og lineære operatorer

Vi kjenner et nettverk for topologien i normerte rom, nemlig

$$\{U(x, \varepsilon) \ : x \in X, \varepsilon > 0\}, \text{ der } U(x, \varepsilon) = \{y \in X \ : \|y - x\| < \varepsilon\}.$$

La oss vise at

$$x + U(0, \varepsilon) = U(x, \varepsilon), \tag{3.1}$$

altså at nettverket ved x bare er nettverket ved 0 translatert til x. La først $y \in x + U(0, \varepsilon)$. Velg $z \in U(0, \varepsilon)$ slik at $y = x + z$. Da er $\|y - x\| = \|z\| < \varepsilon$, så $y \in U(x, \varepsilon)$. La så $y \in U(x, \varepsilon)$. Da er $y = x + (y - x)$, og $\|y - x\| < \varepsilon$, så $y \in x + U(0, \varepsilon)$.

Vi skal nå studere mer generelt når nettverk og åpne mengder er translater av tilsvarende ved 0.

Definisjon 3.2. *En familie av delmengder av et vektorrom X der de ikke-tomme medlemmene av familien nøyaktig er translater av familiemedlemmer om 0, kalles* translasjonsinvariant.

Det kjekke med translasjonsinvariante familier er at vi kjenner hele familien akkurat når vi kjenner medlemmene ved origo. Her kommer en setning som sparer oss for endel arbeid.

Proposisjon 3.3. *La Δ være ei translasjonsinvariant dekning av X. Da er topologien τ generert av Δ også translasjonsinvariant.*

Bevis. Først skal vi vise at hvis $x \in X$ og V er åpen ikke-tom om 0, så er $U = x + V$ åpen. Siden V er åpen om 0, har vi at V er av typen $V = \cup_\alpha \cap_{i=1}^{n(\alpha)} V_i^\alpha$, der $(V_i^\alpha) \subset \Delta$. Men nå er $U = \cup_\alpha \cap_{i=1}^{n(\alpha)} x + V_i^\alpha$, så U er åpen.

La $U \in \tau, U \neq \emptyset$ og $x \in U$. Vi skal finne ei åpen mengde V om 0 slik at $U = x + V$. Kandidaten er naturligvis $V = -x + U$, da er jo $U = x + V$. Vi må bare være sikre på at V er åpen. Men argumentet for det er akkurat som i første del av beviset. $\square$

her kommer en svært sentral definisjon:

Definisjon 3.4. *Et vektorrom med en topologi kalles et* topologisk vektorrom *dersom topologien er Hausdorff og de to funksjonene*

- $(x, y) \to x + y$ *fra* $X \times X$ *inn i* X
- $(a, x) \to ax$ *fra* $\mathbb{F} \times X$ *inn i* X

er kontinuerlige.[1]

Fra Proposisjon 2.21 ser vi at de to kontinuitetskravene i Definisjon 3.4 er ekvivalente til følgende krav:

- $x_\alpha \to x, y_\alpha \to y \Rightarrow x_\alpha + y_\alpha \to x + y$
- $a_\alpha \to a, x_\alpha \to x \Rightarrow a_\alpha x_\alpha \to ax.$

Dersom topologien på X er førstetellbar, holder det å bruke følger siden topologien i skalarkroppen er førstetellbar (faktisk andretellbar) så lenge vi bare ser på $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

Merknad 3.5. I et topologisk vektorrom blir topologien automatisk translasjon-sinvariant fordi det å addere med x er kontinuerlig med kontinuerlig invers lik det å addere med $-x$. Skalering med et tall $\lambda \neq 0$ har kontinuerlig invers lik skalering med $1/\lambda$.

[1]Vi kan vise at hvis topologien er T_1, så følger faktisk T_3 med de to kontinuitetskravene, så vår definisjon er ikke den mest elegante. Se f. eks [Ru2, 1.10 Theorem] for et bevis.

Merknad 3.6. Du lurer kanskje på hva som må kreves av nettverket om 0 i tillegg til translasjonsinvarians for å få et topologisk vektorrom. Her er et teorem som svarer på dette.

Teorem 3.7. *En topologi τ på et reelt eller komplekst vektorrom X gjør (X, τ) til et topologisk vektorrom hvis og bare hvis τ er translasjonsinvariant og τ har et nettverk β slik at β_0 oppfyller følgende krav:*

(i) For hver $U \in \beta_0$ finnes $V \in \beta_0$ slik at $V + V \subset U$.

(ii) For enhver $U \in \beta_0$ og alle skalarer α med $|\alpha| \leq 1$ gjelder at $\alpha U \subset U$.

(iii) For hver $x \in X$ finnes $u \in U$ og α fra skalarene, slik at $x = \alpha u$.

Et bevis kan finnes i [Sch, s. 14]. Vi møter igjen egenskap (ii) og (iii) om et øyeblikk.

Som forkortelse for topologisk vektorrom pleier vi gjerne skrive TVR. Du viser lett direkte fra definisjonen av TVR at normerte rom er eksempler på TVR. Men nettverket i et normert rom har flere egenskaper enn det som trengs for å lage et TVR:

- Nettverket om 0 består av *konvekse* mengder, dvs. hver gang $x, y \in U(0, \varepsilon)$, så er $\{tx + (1-t)y\} \subset U(0, \varepsilon)$. Det geometriske bildet er at linja fra x til y ligger inni $U(x, \varepsilon)$ mellom hvert par x, y av punkter i $U(0, \varepsilon)$.
- Nettverksmedlemmene om 0 oppfyller også at de er *balanserte* mengder, dvs $|r| \leq 1$ medfører $rU(0, \varepsilon) \subset U(0, \varepsilon)$.
- Enda en viktig egenskap kan vi finne ved $U(0, \varepsilon)$: Hvis $y \in X$, og $\alpha < \varepsilon / \|y\|$, så er $z = \alpha y \in U(0, \varepsilon)$. Altså er y et multiplum av en vektor i $U(0, \varepsilon)$. Vi kan lese dette som at $U(0, \varepsilon)$ inneholder noe i alle retninger. Mengder $A \subset X$ med den egenskapen at for alle $y \in X$ finnes $z \in A$ og skalar s med $y = sz$ kalles *absorberende.* $U(x, \varepsilon)$ er altså absorberende.

Disse tre egenskapene kan vi raskt overbevise oss om at er uendret under translasjon. Derfor har alle medlemmene i et nettverk disse egenskapene med en gang medlemmene om 0 har dem. Ethvert normert rom har altså et translasjonsinvariant nettverk bestående av konvekse, balanserte og absorberende mengder.

Vi gir TVR med konvekse nettverk et eget navn:

Definisjon 3.8. *Et TVR der det finnes et nettverk (om 0) bestående av konvekse mengder kalles et* lokalkonvekst *TVR.*[2]

Vi bruker forkortelsen LKTVR for lokalkonvekst topologisk vektorrom. Ofte sier vi også bare lokalkonvekst rom. Normerte rom er viktige spesialtilfeller av lokalkonvekse rom. Følgende resultat er en fundamental observasjon og antyder at det langt fra bare er normerte rom som er lokalkonvekse TVR.

Proposisjon 3.9. *La X være et vektorrom og la $S \subset X^+$ skille punkter på X. La τ være den svake topologien generert av S. Da er (X, τ) et LKTVR.*

[2]Vi kan vise at det finnes et balansert, absorberende, konvekst nettverk for et TVR såsnart det finnes et konvekst nettverk om 0, slik Teorem 3.7 viser. Også i [Ru2] kan du finne bevis for dette.

Bevis. τ er Hausdorff siden S skiller punkter. Per konstruksjon av τ er elementene i S kontinuerlige (τ er jo den svakeste topologien med denne egenskapen). La nå (x_α) og (y_α) være nett i X slik at $x_\alpha \to x$ og $y_\alpha \to y$ i τ-topologi. Med andre ord,

$$s(x_\alpha) \to s(x) \text{ og } s(y_\alpha) \to s(y) \text{ for alle } s \in S.$$

Vi skal vise at $s(x_\alpha + y_\alpha) \to s(x+y)$. Ved linearitet av s har vi $s(x_\alpha + y_\alpha) = s(x_\alpha) + s(y_\alpha)$. Ved kontinuitet av s konvergerer dette til $s(x) + s(y)$. Linearitet av s gir oss nå det ønskede resultat. Vi har altså argumentert for at

$$s(x_\alpha + y_\alpha) = s(x_\alpha) + s(y_\alpha) \to s(x) + s(y) = s(x+y).$$

Tilsvarende får vi, når $a_\alpha \to a$ og $x_\alpha \to x$ at

$$s(a_\alpha x_\alpha) = a_\alpha \cdot s(x_\alpha) \to a \cdot s(x) = s(ax).$$

Pila kan vi sette fordi multiplikasjon av skalarer er en kontinuerlig operasjon fra $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ inn i $\mathbb{R}$. Dette viser at (X, τ) er et TVR. Det gjenstår å vise at

$$U = U(0, \{s_1, s_2, ...s_n\}, \varepsilon) = \{x \in X : |s_i(x)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$$

er konveks. La da $x, y \in U$ og $0 \leq t \leq 1$. Da er, for alle $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} |s_i(tx + (1-t)y))| &= |ts_i(x) + (1-t)s_i(y)| \leq |ts_i(x)| + |(1-t)s_i(y)| \\ &= t|s_i(x)| + (1-t)|s_i(y)| \\ &\leq t + (1-t) = 1. \end{aligned}$$

Altså inneholder U linjestykket $\{tx+(1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$ og er dermed konveks. $\square$

Merknad 3.10. I situasjonen i Proposisjon 3.9 har vi i tillegg at span $S \subset (X, \tau)^*$. La nemlig $f \in \text{span}S$. Da finnes $s_1, s_2, ..., s_n \in S$ og skalarer $a_1, a_2, ..., a_n$ slik at $f = \sum a_i s_i$. La nå (x_α) være et nett i X slik at $x_\alpha \to x$ i τ-topologi. Da vet vi at $s_i(x_\alpha) \to s_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$. Men ved kontinuitet av vektorromsoperasjonene har vi da

$$f(x_\alpha) = (\sum a_i s_i)(x_\alpha) = \sum a_i s_i(x_\alpha) \to \sum a_i s_i(x) = (\sum a_i s_i)(x) = f(x),$$

som viser at $f \in (X, \tau)^*$. Men span S er ofte ekte inneholdt i $(X, \tau)^*$. Vi skal senere se hvor mye ekstra vi får med, men før det må vi lære noe mer.

Et spesialtilfelle av Proposisjon 3.9 er ekstra viktig: La X være et normert vektorrom og la $S = X^*$. Vi vet jo ikke nå noe om størrelsen på X^*, men Hahn-Banach teoremet skal vise oss at når X er et lokalkonvekst TVR, noe et normert rom jo er, så vil X^* skille punkter på X. Vi kaller den svake topologien på X generert av $S = X^*$ for den svake topologien på X. At et nett konvergerer i svak topologi omtaler vi som at nettet konvergerer svakt.

Vi skal i resten av dette kapitlet studere mange eksempler på normerte rom. I de fleste av disse eksemplene skal vi faktisk greie å finne dualen X^*. Når vi har gjort det, kan vi se hva f. eks. svak konvergens og svak kompakthet betyr i de konkrete tilfellene. Men før vi går til konkrete eksempler trenger vi å gjøre et par generelle observasjoner.

Proposisjon 3.11. *La X og Y være to TVR og anta $T : X \to Y$ er en lineær operator. Da er T kontinuerlig hvis og bare hvis den er kontinuerlig i 0.*

Bevis. Hvis T er kontinuerlig, er den kontinuerlig i alle punkt, og spesielt i 0. Det er andre veien som er poenget. Anta T er kontinuerlig i 0. Ha i bakhodet at $T(0) = 0$. La $x \in X$ og anta $x_\alpha \to x$. Da vil $x_\alpha - x \to 0$. Siden T er lineær og kontinuerlig i 0, får vi at

$$\begin{aligned}\lim_\alpha T(x_\alpha) &= \lim_\alpha T(x_\alpha - x + x) = \lim_\alpha[T(x_\alpha - x) + T(x)] \\ &= \lim_\alpha T(x_\alpha - x) + T(x) = T(0) + T(x) = T(x).\end{aligned}$$

□

Vi skriver mengden av kontinuerlige, lineære operatorer fra X inn i Y som $\mathcal{L}(X, Y)$. Her kommer en test på om T hører til $\mathcal{L}(X, Y)$ når X og Y er normerte rom.

Proposisjon 3.12. *La X og Y være to normerte rom og anta $T : X \to Y$ er en lineær operator. Følgende er ekvivalent:*

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(b) T er kontinuerlig i 0.

(c) Det finnes et $m < \infty$ slik at $\|Tx\| \leq m\|x\|$ for alle $x \in X$.

(d) Det finnes et $m < \infty$ slik at $\|Tx\| \leq m\|x\|$ for alle $x \in X$ med $\|x\| \leq 1$.

(e) Det finnes et $m < \infty$ slik at $\|Tx\| \leq m\|x\|$ for alle $x \in X$ med $\|x\| = 1$.

Bevis. (a) $\Leftrightarrow$ (b) følger fra Proposisjon 3.11. (c), (d) og (e) er ekvivalente fordi normen er homogen og T er lineær (se Oppgave 5). Vi viser (b) $\Leftrightarrow$ (d). Hvis T er kontinuerlig i 0, finnes ei lukka kule K i X med $TK \subset B_Y$. Om r er radius i K, så har vi ved homogenitet at $K = rB_X$. Siden T er lineær, er $T(rB_X) = rTB_X$. Nå har vi altså vist at $rTB_X \subset B_Y$. Men da er $TB_X \subset (1/r)B_Y$. Velg $m = 1/r$. Anta så at (d) holder. Vi kan oversette (d) til følgende informasjon: $TB_X \subset mB_Y$. Men da er kula $K = (1/m)B_X$ slik at $TK \subset B_Y$. Siden alle kuler i Y er multiplum av B_Y og T er lineær, viser dette kontinuitet. □

På grunn av Proposisjon 3.12 kalles ofte kontinuerlige, lineære operatorer mellom normerte rom for begrensede, lineære operatorer. I vektorrommet $\mathcal{L}(X, Y)$ dukker det nå opp en naturlig norm, nemlig

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|,$$

altså radius til bildet av enhetskula i X. $\|T\|$ blir altså infimum over alle m'er i Proposisjon 3.12 (d), (e) eller (f). Fra definisjonen av operatornormen har vi den viktige ulikheten

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X. \tag{3.2}$$

Et spesialtilfelle av Proposisjon 3.12 er ekstra viktig, nemlig når $Y = \mathbb{F}$. Da har vi tilfellet X^*. En lineær funksjonal x^* er altså med i X^* hvis og bare hvis den oppfyller $|x^*(x)| \leq m\|x\|$ for alle x. Og vi får definert en norm på X^* ved

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|.$$

Vi oppsummerer: Når X og Y er normerte, er kontinuitet det samme som uniform begrensethet ved 0 og $\mathcal{L}(X,Y)$ er et normert rom. Spesielt er X^* et normert rom. Men for alt vi vet til nå kan det være smått med elementer i X^*!

3.2 c_0 og ℓ_p-rommene

Vi har møtt noen eksempler på normerte rom, slik som $\mathbb{R}^n$, Hilberts rom av følger og $C(K)$. Vi kunne studert disse for å bli bedre kjent i normerte rom. Problemet er imidlertid at de to første har så mange egenskaper i tillegg til det å være normerte, slik at det er vanskelig å se hva som er generelle egenskaper for normerte rom, mens $C(K)$ har en dual som er komplisert å beskrive. Vi vil møte $C(K)^*$ senere når vi har lært målteori.

3.2.1 Rommet c_0 av reelle nullfølger

Det første eksemplet vi skal studere i detalj er c_0. Mengda c_0 er samlinga av alle reelle følger som konvergerer mot 0. Et vilkårlig element i c_0 kan dermed skrives $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. For enkelhets skyld skriver vi bare (x_n). Vi måler normen til ei nullfølge ved 'største ledd i følga',

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Det er lett å se at norm-funksjonen oppfyller de algebraiske kravene til å være en norm, men du lurer kanskje på hvorfor $\|x\| < \infty$. Det er fordi vi vet at det finnes et N slik at $n > N$ medfører $|x_n - 0| = |x_n| < 1$ (sett $\varepsilon = 1$ i definisjonen av konvergens). Dermed er

$$\sup_n \|x_n\| = \max\{\sup_{1\le n\le N} |x_n|, \sup_{n>N} |x_n|\} = \max\{\max_{1\le n\le N} |x_n|, 1\} < \infty.$$

Vi skal på jakt etter dualen til c_0. La oss da først observere at hvis (s_n) er ei følge, så svarer (s_n) til en lineær funksjonal f ved at

$$f(x) = f((x_n)) = \sum_n x_n \cdot s_n$$

hvis summen konvergerer for alle $x = (x_n) \in c_0$. La oss sjekke linearitet:

$$f(x+y) = \sum (x_n + y_n)s_n = \sum x_n s_n + \sum y_n s_n = f(x) + f(y)$$

$$f(ax) = \sum a x_n s_n = a \sum x_n s_n = a \cdot f(x).$$

Mengda av følger (s_n) slik at $\sum_n x_n s_n$ konvergerer for alle $(x_n) \in c_0$ svarer altså til lineære funksjonaler på c_0.

La oss se hva som må til av krav på (s_n) for at $\sum_n x_n s_n$ konvergerer for alle $(x_n) \in c_0$. Hvis nå (s_n) oppfyller $\sum |s_n| < \infty$, har vi

$$\sum x_n s_n \le \sum |x_n s_n| \le \sup_n |x_n| \sum |s_n| = \|(x_n)\| \sum |s_n| < \infty, \tag{3.3}$$

så kravet $\sum_n |s_n| < \infty$ er et tilstrekkelig krav. Vi skal argumentere for at dette kravet også er nødvendig. La $\mathrm{sgn}(s_n)$ bety fortegnet til s_n (vi leser sgn-funksjonen som 'signum'). Da har vi $|s_n| = \mathrm{sgn}(s_n) \cdot s_n$. Hvis $\sum |s_n| = \infty$, finnes for hver $k = 1, 2, ...$ et $N(k)$ slik at $\sum_{n=1}^{N(k)} |s_n| > k$. Men da finnes følger $x^k \in c_0$ slik at $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^k s_n > k$. Velg nemlig

$$(x_n^k) = (\text{sgn}(s_1), \text{sgn}(s_2), ..., \text{sgn}(s_{N(k)}), 0, 0...).$$

La ℓ_1 bety mengda av reelle følger (s_n) slik at $\sum_n |s_n| < \infty$, altså mengda av absolutt konvergente rekker. Definer en norm i ℓ_1 ved $\|(s_n)\| = \sum_n |s_n|$. Da er ℓ_1 et normert rom, se Oppgave 2 i Kapittel 1.

Proposisjon 3.13. *$c_0^* = \ell_1$. Men denne likheten mener vi at hvert $x^* \in c_0^*$ er* representert *ved ei følge $(s_n) \in \ell_1$, dvs. c_0^* og ℓ_1 står i 1-1 korrespondanse, denne 1-1 korrespondansen er lineær og normen til x^* som objekt i c_0^* er lik ℓ_1-normen til den følga (s_n) som svarer til x^*.*

En ekvivalent formulering av denne proposisjonen er at det finnes en lineær bijeksjon fra c_0^* på ℓ_1 som bevarer normer.

La oss skrive $e_n = (0, 0, ..., 1, 0, 0...)$ der 1-tallet står som n'te leddet i følga. Alle e_n er med i både c_0 og ℓ_1. Vi vil ha stor nytte av følgende observasjon: Setter vi $x = (x_n)$ og studerer delsummene $(\sum_{n=1}^{m})_{m=1}^{\infty} x_n e_n$, ser vi at disse konvergerer i norm i c_0 til x. Altså har vi at (se også Oppgave 6)

$$\textit{ethvert element } x = (x_n) \textit{ i } c_0 \textit{ kan skrives } x = \sum_n x_n e_n. \tag{3.4}$$

Bevis. Vi skal finne bijeksjonen $\phi : c_0^* \to \ell_1$ (se gjerne Figur 3.1 for en ide til et bilde). For $x^* \in c_0^*$ setter vi

$$\phi(x^*) = (x^*(e_n))_{n=1}^{\infty}.$$

Vi vil først argumentere for at ϕ er veldefinert, dvs. at ϕ har entydige verdier. Anta $x^* \neq y^*$. Da finnes $x \in c_0$ slik at $x^*(x) \neq y^*(x)$. Ved (3.4) kan vi skrive $x = \sum x_n e_n$. Siden x^* og y^* er kontinuerlige, har vi at $\sum_n x_n x^*(e_n) \neq \sum_n x_n y^*(e_n)$. Da må det finnes et naturlig tall k slik at $x^*(e_k) \neq y^*(e_k)$. Men da er $\phi(x^*) \neq \phi(y^*)$.

Vi skal gi et liknende argument for at ϕ er injektiv. Anta $\phi(x^*) = \phi(y^*)$. Da er $x^*(e_k) = y^*(e_k)$ for alle k. La nå $x \in c_0$ og skriv $x = \sum_n x_n e_n$. Da er $x^*(x) = y^*(x)$, så $x^* = y^*$.

Når det gjelder linearitet av ϕ, har vi

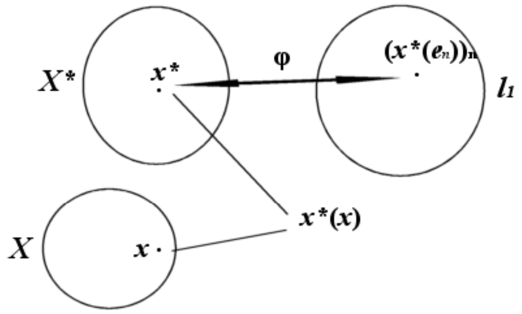
$$\begin{aligned}\phi(ax^* + by^*) &= ((ax^* + by^*)(e_n))_{n=1}^{\infty} = (ax^*(e_n) + by^*(e_n))_{n=1}^{\infty} \\ &= a(x^*(e_n))_{n=1}^{\infty} + b(y^*(e_n))_{n=1}^{\infty} = a\phi(x^*) + b\phi(y^*),\end{aligned}$$

så ϕ er lineær. Dessuten, $\|\phi(x^*)\| = \|(x^*(e_n))_{n=1}^{\infty}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(e_n)|$, og for hver $k \in \mathbb{N}$ er

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n=1}^{k} |x^*(e_n)| &= \textstyle\sum_{n=1}^{k} \text{sgn}(x^*(e_n))x^*(e_n) = x^*\left(\sum_{n=1}^{k} \text{sgn}(x^*(e_n))e_n\right) \\ &= x^*\left(\text{sgn}(x^*(e_1)), \text{sgn}(x^*(e_2)), ..., \text{sgn}(x^*(e_k)), 0, 0, ...\right) \\ &\leq \|x^*\| \cdot \|\left(\text{sgn}(x^*(e_1)), \text{sgn}(x^*(e_2)), ..., \text{sgn}(x^*(e_k)), 0, 0, ...\right)\| \\ &= \|x^*\|.\end{aligned}$$

Dermed må (la $k \to \infty$)

$$\|\phi(x^*)\| \leq \|x^*\|,$$



Figur 3.1: Forfatterens bilde av representasjon.

så ϕ er kontinuerlig og norm-reduserende.

Vi skal så vise at ϕ er surjektiv. La $(s_n) \in \ell_1$. La h være definert på c_0 ved at $h[(x_n)] = \sum x_n \cdot s_n$. Da er h lineær og vi har fra (3.3) at h er kontinuerlig. Altså vet vi at $h \in c_0^*$. Dessuten er

$$\phi(h) = (h(e_n))_{n=1}^{\infty} = (1 \cdot s_n)_{n=1}^{\infty} = (s_n)_{n=1}^{\infty},$$

så $\phi(h) = (s_n)$.

Fra (3.3) har vi også $\|h\| \leq \|(s_n)\|$, så ϕ er også norm-økende. Summa summarum har vi vist det vi skulle. $\square$

Når vi nå kjenner dualen til c_0, kan vi begynne å undersøke hva det betyr at f.eks. ei følge konvergerer svakt. Ei følge i c_0 er ei følge av følger, vi skriver dette (x_n^k) og tenker oss at for hver k har vi ei følge i c_0 indeksert ved n. La oss skrive det ut:

$$\begin{array}{lllllll}
k=1: & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \ldots & & \\
k=2: & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & & \\
k=3: & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \ldots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
k & x_1^k & x_2^k & x_3^k & \ldots & x_n^k & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

At følga (x_n^k) konvergerer i norm til følga (y_n) betyr at

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^k - y_n| \to 0, \qquad k \to \infty$$

altså at vi har uniform konvergens i n. Svak konvergens betyr per definisjon at $x^*(x_n^k) \to x^*(x_n^k)$ for hver $x^* \in X^*$ når $k \to \infty$. Fra Proposisjon 3.13 kan vi oversette dette til at $\sum_n x_n^k y_n \to \sum_n x_n^k y_n$ for hver $(y_n) \in \ell_1$. Da må dette spesielt holde for hver enhetsvektor $(e_n) \in \ell_1$. Så hvis vi har svak konvergens må $x_n^k \to y_n$ for hver n når $k \to \infty$. Svak konvergens må altså medføre at 'kolonne' nr. n i lista over konvergerer til y_n. Kan det tenkes at dette faktisk beskriver svak konvergens av følger?

La oss tenke litt prinsipielt. Vi skulle egentlig bruke alle $x^* \in X^*$, men vi har bare sett hva som skjer ved å bruke noen spesielle funksjonaler, la oss si $A \in X^*$. Nå er det likevel sånn at denne mengda A sier mye om dualen ℓ_1. Akkurat som i c_0 ligger spannet til enhetsvektorene tett (se Oppgave 6). La oss gjenoppdage et nyttig resultat av H. Hahn fra begynnelsen av 20-tallet:

Proposisjon 3.14. *La X være et normert rom og la $A \in X^*$ være ei fundamental mengde, dvs. $\operatorname{span} A$ er norm-tett i X^*. Hvis (x_k) er ei begrensa følge (eller bare et begrensa nett) i X og $x^*(x_k) \to x^*(x)$ for alle $x^* \in A$, så vil $x_k \to x$ svakt.*

Bevis. La $y^* \in X^*$. Vi skal vise at nå må også $y^*(x_k) \to y^*(x)$. La $\varepsilon > 0$. La M være slik at normene til elementene i følga samt $\|x\|$ er begrensa av M. Siden A er fundamental finnes et $x^* \in \operatorname{span} A$ slik at $\|y^* - x^*\|_{X^*} < \varepsilon$. Siden $x^*(x_k) \to x^*(x)$, finnes et N slik at $k > N$ medfører at $|x^*(x_k) - x^*(x)| < \varepsilon$. Dermed er, for $k > N$,

$$\begin{aligned}
|y^*(x_k) - y^*(x)| &\leq |y^*(x_k) - x^*(x_k)| + |x^*(x_k) - x^*(x)| + |x^*(x) - y^*(x)| \\
&= |(y^* - x^*)(x_k)| + |x^*(x_k) - x^*(x)| + |(x^* - y^*)(x)| \\
&\leq \|y^* - x^*\|\|x_k\| + |x^*(x_k) - x^*(x)| + \|x^* - y^*\|\|x\| \\
&< \varepsilon \cdot M + \varepsilon + \varepsilon \cdot M \\
&= (1 + 2M)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tilsvarende argument holder for begrensa nett (Oppgave 7). □

Vi kombinerer observasjonene, det at (e_n) er fundamental i ℓ_1 og Proposisjon 3.14 og får:

Proposisjon 3.15. *Ei begrensa følge i c_0 konvergerer svakt hvis og bare hvis den konvergerer koordinatvis.*

Eksempel 3.16. La følga $(x_n) \subset c_0$ være gitt ved $x_n = e_n$. Da konvergerer (x_n) koordinatvis mot nullfølga og den er begrensa. Fra Proposisjon 3.15 ser vi at (e_n) er ei følge som befinner seg på enhetskuleskallet i c_0, og som konvergerer svakt til origo.

Merknad 3.17. La oss se på det vi har lært om c_0 i lys av Proposisjon 3.9. Her er S lik (e_n) og vi har sett at selv om S genererer en svakere topologi enn den svake topologien på c_0, så blir det likevel ikke noen forskjell på begrensa mengder. Dette betyr at på begrensa mengder er den svake topologien førstetellbar fordi den er generert av ei tellbar samling av funksjonaler. Altså kan vi avgjøre svak tillukning og svak konvergens i begrensa mengder ved hjelp av følger i c_0.

3.2.2 Rommet ℓ_1 av reelle absolutt konvergente rekker

Vi har sett at $\ell_1 = c_0^*$ og at ℓ_1 er et normert rom. Da kan vi jo lure på hva dualen til ℓ_1 er. La ℓ_∞ bety det normerte rommet av alle begrensa, reelle følger med supremumsnorm. Et argument veldig likt det vi gjorde for å vise at $\ell_1 = c_0^*$ viser

Proposisjon 3.18. *$\ell_1^* = \ell_\infty$, der $(y_n) \in \ell_\infty$ representerer $x^* \in X^*$ ved $x^*(x_n) = \sum y_n x_n$ for alle $(x_n) \in \ell_1$.*

Merknad 3.19. Vi så at i c_0 hadde vi at (e_n) konvergerer svakt mot 0. Slik er det ikke i ℓ_1. For fra Proposisjon 3.18 har vi at $(1, 1, 1, ...) \in \ell_1^*$. Dermed måtte $(\sum_{n=1}^{k} e_n)_k$ gå mot null, og det stemmer ikke. Vi ser at det blir vanskeligere å være svakt konvergent i ℓ_1 enn i c_0. Faktisk gjelder følgende resultat:

Teorem 3.20. (Schur, 1910) *Hvis ei følge i ℓ_1 konvergerer svakt, så konvergerer den i norm.*

Teorem 3.20 betyr ikke at svak topologi og norm-topologi faller sammen på ℓ_1, resultatet holder ikke for nett. Rom der Schurs teorem holder sies å ha Schuregenskapen.

Vi ser at c_0 utgjør ei delmengde av ℓ_1^* på en slik måte at normene er de samme. Vi sier at vi kan *embedde* c_0 isometrisk i ℓ_∞. Dermed genererer c_0 en topologi på ℓ_1 som er svakere enn den svake topologien. Følga (e_n) konvergerer til 0 i denne svakere topologien. Legg merke til denne situasjonen: ℓ_1 er en dual og får da en naturlig topologi både fra dualen sin og fra rommet den er topologisk dual til.

Verken B_{c_0} eller B_{ℓ_1} er svakt kompakte. Hvis B_{ℓ_1} var svakt kompakt kunne ikke topologien generert av c_0 ha vært Hausdorff, men det er den siden $(e_n) \subset c_0$ skiller punkter på ℓ_1. At B_{c_0} ikke er svakt kompakt er litt vanskeligere, men vi kan i allefall se at den ikke kan være svakt følgekompakt: Hvis B_{c_0} var svakt følgekompakt, måtte følga

$$(1, 0, 0, 0...), (1, 1, 0, 0,), (1, 1, 1, 0, 0, ..)....$$

ha ei svakt konvergent delfølge. Men eneste mulige grense for ei slik delfølge er $(1, 1, 1, ...)$ (husk vi skal ha koordinatvis konvergens), som ikke ligger i c_0. Vi skal senere se at for normerte rom med separabel dual er enhetskula med svak topologi metriserbar (det finnes en metrikk som iduserer den svake topologien restrisert til enhetskula). Dermed får vi fra Teorem 2.48 at B_{c_0} ikke er svakt kompakt. Men i topologien generert av c_0 er B_{ℓ_1} kompakt. Dette er et spesialtilfelle av Alaoglu's teorem, som vi kommer til snart.

3.2.3 Rommene ℓ_p av p-absolutt konvergente rekker

I hele denne seksjonen skal p og q være to reelle tall slik at $1/p + 1/q = 1$, der vi lar $1 < p < \infty$. Vi sier at p og q er *eksponent-konjugerte.* Vi lar mengda ℓ_p være definert ved samlinga av reelle (eller komplekse) tallfølger (x_n) slik at $\sum_n |x_n|^p < \infty$. På ℓ_p legger vi følgende kandidat til å være norm:

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Det som er vrient, er å vise at $\|\cdot\|_p$ oppfyller trekantulikheten. Vi starter med en skikkelig klassiker:

Lemma 3.21. (Hölders ulikhet) *La $(a_k)_{k=1}^n, (b_k)_{k=1}^n$ være endelige følger av ikke-negative, reelle tall. Hvis $1 < p < \infty$ og $1 < q < \infty$ er eksponent-konjugerte, så gjelder*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Bevis. Vi skal utnytte en ulikhet som gjelder under disse betingelsene for ikke-negative reelle tall, a og b, nemlig at

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{3.5}$$

For å se dette, kan du tegne grafen til $y = x^{p-1}$ for $x \geq 0$. Tegn så inn to områder; A_1 er avgrensa av grafen, x-aksen og linja $x = a$. A_2 er avgrensa av grafen, y-aksen og linja $y = b$. Det er klart at $A_1 = \int_0^a x^{p-1}dx = \frac{a^p}{p}$. Siden $y = x^{p-1}$, er $x = y^{1/(p-1)}$. Men

$$1 + \frac{p}{q} = p \text{ og } 1 + \frac{q}{p} = q \text{ gir } \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p/q} = \frac{q}{p} = q - 1.$$

Dermed ser vi at $A_2 = \int_0^b y^{q-1} = \frac{b^q}{q}$. Ulikheten følger nå fra bildet du ser, siden vi må ha $ab \leq A_1 + A_2$.

Vi er klare for å bevise Hölders ulikhet. Hvis en a_k eller en b_k er null, holder Hölders ulikhet. Så anta minst en a_k og minst en b_k er positiv. Definer

$$A_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ og } B_k = \frac{b_k}{\left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Vi merker oss at $\sum_{k=1}^n A_k^p = 1 = \sum_{k=1}^n B_k^q$. Fra (3.5) har vi for hver $1, 2, ..., n$ at

$$A_k B_k \leq \frac{1}{p} A_k^p + \frac{1}{q} B_k^q.$$

Men denne ulikheten må holde om vi summerer over k på begge sider. Vi får

$$\sum_{k=1}^n A_k B_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n A_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n B_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dermed står det

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_k}{\left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1,$$

som gir Hölders ulikhet ved å multiplisere opp nevnerne. □

Korollar 3.22. (Hölders ulikhet) *La $(x_k) \in \ell_p, (y_k) \in \ell_q$. Hvis $1 < p < \infty$ og $1 < q < \infty$ er eksponent-konjugerte, så gjelder*

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k| \cdot |y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^\infty |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|(x_k)\|_p \cdot \|(y_k)\|_q.$$

Vi nærmer oss trekantulikheten for $\| \cdot \|_p$.

Lemma 3.23. (Minkowskis ulikhet) *La $(a_k)_{k=1}^n, (b_k)_{k=1}^n$ være endelige følger av ikke-negative reelle tall og la $p \in [1, \infty)$. Da gjelder*

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bevis. For $p = 1$ er dette trivielt, så vi antar $p > 1$. La q være den eksponent-konjugerte til p. Da er $(p-1)q = p$. Vi regner litt først for å skaffe oss anledning til å bruke Hölders ulikhet, så bruker vi Hölders ulikhet og regner videre:

$$\begin{aligned}
\sum(a_k + b_k)^p &= \sum(a_k + b_k)^{p-1}(a_k + b_k) \\
&= \sum a_k(a_k + b_k)^{p-1} + \sum b_k(a_k + b_k)^{p-1} \\
&\leq (\sum a_k^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum(a_k + b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + (\sum b_k^p)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum(a_k + b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\sum a_k^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum(a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{q}} + (\sum b_k^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum(a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Nå dividerer vi med det positive tallet $\sum((a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{q}}$ på begge sider i ulikheten over. Da blir venstresiden

$$\frac{\sum(a_k + b_k)^p}{\sum((a_k + b_k)^p)^{\frac{1}{q}}} = \sum [(a_k + b_k)^p]^{1-\frac{1}{q}} = \sum [(a_k + b_k)^p]^{\frac{1}{p}}$$

og høyresiden

$$\left(\sum a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Korollar 3.24. *La $(x_k) \in \ell_p, (y_k) \in \ell_p$. Hvis $1 \leq p < \infty$, så gjelder*

$$\|(x_k) + (y_k)\|_p \leq \|(x_k)\|_p + \|(y_k)\|_p.$$

Vi har nå vist at ℓ_p'ene er normerte rom (Minkowskis ulikhet viser både at normkandidaten er en norm og at ℓ_p er lukket under addisjon). Hva med dualen til ℓ_p?

Proposisjon 3.25. Riesz' representasjonsteorem for følgerom[3] $\ell_p^* = \ell_q$, *der p og q er eksponent-konjugerte og $1 < p < \infty$.*

Bevis. Vi setter opp avbildninga $\phi : \ell_p^* \to \ell_q$ ved at $\phi(f) = (f(e_n))_n = (a_n)_n$. Da får vi, ved betingelsen $\phi[f](x_n) = f(x_n)$, at

$$\phi[f](x_n) = f(\sum x_n e_n) = \sum x_n f(e_n) = \sum x_n a_n.$$

Hvis $(a_i) \in \ell_q$ og $(x_i) \in \ell_p$, konvergerer $\sum x_i a_i$ ved Hölders ulikhet. Beviset for veldefinerthet, linearitet, surjektivitet og en-entydighet er som i c_0-tilfellet. Hölders ulikhet viser også at $\|\sum a_i x_i\| \leq \|(a_i)\|_q \cdot \|(x_i)\|_p$, noe vi kan oversette til at

$$\|f\| = \sup_{\|(x_n)\|=1} |f(x_n)| \leq \sup_{\|(x_n)\|=1} |\sum a_i x_i| \leq \|(a_i)\|q.$$

Nå vet vi at ϕ er en lineær bijeksjon som ikke reduserer norm. Vi skal vise at ϕ er en isometri ved å vise at den heller ikke øker normer. Sett

$$x^n = (|a_1|^{q-1}\mathrm{sgn}(a_1), |a_2|^{q-1}\mathrm{sgn}(a_2), ...|a_n|^{q-1}\mathrm{sgn}(a_n), 0, 0, ...)$$

[3]Det finnes mange teoremer som går under navnet Riesz' representasjonsteorem. Vi skal møte resten av dem etter hvert.

og legg merke til at

$$f(x^n) = f(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{q-1}\mathrm{sgn}(a_i)e_i) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^{q-1}\mathrm{sgn}(a_i)\cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^q.$$

Dermed er

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q = f(x^n) \leq \|f\|\|x^n\|_p = \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} (|a_i|^{q-1})^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vi dividerer med $(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q)^{\frac{1}{p}}$ og får

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|,$$

som gir oss at $\|(a_i)\|_q \leq \|f\|$. □

Vi ser nå at vi faktisk kan ha at et normert rom kan være isometrisk isomorft til sin egen dual, dette er nemlig tilfellet for ℓ_2, som akkurat er Hilberts rom av følger.

3.3 Hahn-Banach teoremet

Vi har mange ganger stresset at vi ikke vet om X^* er noen rik mengde. I de tilfellene vi har sett i Seksjon 3.2 viste X^* seg å være riktig så stor. For det separable normerte rommet ℓ_1 er endatil den topologiske dualen ikke-separabel. Spørsmålet vi nå vil stille oss er om vi kan finne betingelser på det topologiske vektorrommet X som garanterer oss at det er 'mange' elementer i X^*. For å få bort flest mulig kompliserende faktorer, jobber vi bare med reelle rom. De tilsvarende resultater for komplekse vektorrom kan finnes i [Ru2, s. 56-62].

Vi skal løse problemet gjennom mange steg. Først et rent algebraisk resultat:

Teorem 3.26. (Hahn-Banach utvidelsesteorem) *Anta X er et* reelt *vektorrom og at M er et undervektorrom av X. Anta videre at vi kjenner en reell funksjon p på X som oppfyller*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad og \quad p(tx) = tp(x) \qquad for\ alle\, x, y \in X, t \geq 0.$$

Hvis nå f er lineær, definert på M og oppfyller $f(x) \leq p(x)$ på M, så finnes det en lineær funksjonal F definert på hele X slik at $F|_M = f$ og $F(x) \leq p(x)$ på X.

Merknad 3.27. *Legg merke til at når X er et normert rom, er $\|\cdot\|$ et eksempel på en p som oppfyller betingelsene over. F kalles en* utvidelse *eller* forlengelse *av f.*

Bevis. Vi kan selvsagt anta $M \neq X$. Vi skal først vise hvordan vi utvider f fra M til en L definert på et undervektorrom med dimensjon én høyere enn M. Et slikt rom må være på formen $M_1 = \{u + tx_1 : u \in M, t \in \mathbb{R}\}$, der $x_1 \in X \setminus M$ er et fast punkt. Hvis L skal virke lineært må

$$L(x) = L(u + tx_1) = L(u) + L(tx_1) = f(u) + tL(x_1) = f(u) + tr.$$

Dermed har vi en klasse av kandidater (L_r), der $r = L(x_1)$. Vi vil nå variere over (L_r) og vise at minst en av disse også oppfyller $L_r \leq p$.

Vi starter nå på å finne en slik r. Vi må for denne r'en forlange at

$$f(u) + tr \leq p(u + tx_1) \text{ for alle } u \in M, t \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

For $t = 0$ holder (3.7) allerede. For $t > 0$ krever (3.7)

$$tr \leq p(u + tx_1) - f(u) \text{ for alle } u \in M,$$

altså

$$r \leq p(\frac{u}{t} + x_1) - f(\frac{u}{t}) \text{ for alle } u \in M.$$

Men M er lineært, så vi kan skrive dette

$$r \leq p(v + x_1) - f(v) \text{ for alle } v \in M.$$

Enhver r mindre enn eller lik infimum til $p(v + x_1) - f(v)$ vil altså gjøre nytten for $t > 0$ (men vi vet ikke at en slik r finnes ennå, vi bare sonderer terrenget).

For $t < 0$ krever (3.7) at

$$tr \leq p(u + tx_1) - f(u) \text{ for alle } u \in M,$$

altså

$$-r \leq p(\frac{u}{-t} - x_1) - f(\frac{u}{-t}) \text{ for alle } u \in M.$$

Men M er lineært, så vi kan skrive dette

$$-r \leq p(w - x_1) - f(w) \text{ for alle } w \in M,$$

altså

$$r \geq f(w) - p(w - x_1) \text{ for alle } w \in M.$$

Enhver r større enn eller lik supremum til $p(v+x_1) - f(v)$ vil altså gjøre nytten for $t < 0$.

Vi kombinerer de to tilfellene, $t < 0$ og $t > 0$ og ser at det finnes $r \in \mathbb{R}$ slik at $L_r \leq p$ hvis og bare hvis

$$f(w) - p(w - x_1) \leq p(v + x_1) - f(v) \text{ for alle } v, w \in M.$$

Men dette omformer vi til kravet

$$f(v) + f(w) \leq p(v + x_1) + p(w - x_1) \text{ for alle } v, w \in M. \tag{3.7}$$

Det gjelder altså å vise at 3.7 er oppfylt. Men det kan vi raskt sjekke:

$$f(v) + f(w) = f(v+w) \leq p(v+w) = p(v+x_1+w-x_1) \leq p(v+x_1) + p(v-x_1).$$

Altså vet vi én-dimensjonal utvidelse eksisterer.

Nå skal vi bruke Zorn's lemma for å utvide til hele X. La $\mathcal{P}$ være samlinga av ordna par (V, L_V) der $V \supset M$ og L_V er en utvidelse av f til V med $L_V \leq p$. Vi vil nå ordne $\mathcal{P}$ delvis ved å si at $(V, L_V) \leq (W, L_W)$ hvis og bare hvis $V \subset W$ og $L_W = L_V$ på V.

Zorns lemma sier at hvis, i en ikke-tom delvis ordna mengde, enhver lineært ordna delmengde har ei øvre grense, så har mengda selv et maksimalt element. Maksimal (Y, ϕ) betyr her at $(Y, \phi) \leq (Z, \psi)$ medfører $Y = Z$ og $\phi = \psi$. Det er klart at $\mathcal{P}$ er ikke-tom. La så $\mathcal{S} = (V_\alpha, L_{V_\alpha})$ være ei lineært ordna delmengde av $\mathcal{P}$. Se på (V, L_V) der $V = \cup_\alpha V_\alpha$ og $L_V(x) = L_{V_\alpha}$ for $x \in V_\alpha$. Da er (V, L_V) ei øvre skranke for $\mathcal{S}$. Altså gir Zorns lemma oss et maksimalt element (Y, ϕ).

Vi må vise at $Y = X$. Anta ikke. Da ligger det en x_1 i $X \setminus Y$. Men nå viser første trinn av beviset at (Y, ϕ) har en majorant, så dette motsier maksimaliteten til (Y, ϕ). □

Merknad 3.28. Enhver r som oppfyller

$$f(w) - p(w - x_1) \leq r \leq p(v + x_1) - f(v) \text{ for alle } v, w \in M$$

vil fungere for hver én-dimensjonal utvidelse. Dermed kan det være flere utvidelser F av f. Hvis f utvides til F og g utvides til G, er det heller ikke noe som sier at $f + g$ utvides til $F + G$, ikke om utvidelser skulle være entydige heller. Men av og til har vi entydighet og i andre situasjoner kan det blant utvidelsesprosessene velges en som er lineær.

At $F(x) < p(x)$ for alle $x \in X$ i Teorem 3.26 gir oss litt mer på kjøpet når p er en norm. Vi har jo at $\|-x\| = \|x\|$. Dermed har vi $-F(x) \leq \|x\|$ som kombinert med $F(x) < \|x\|$ for alle $x \in X$ gir

$$|f(x)| \leq \|x\| \text{ for alle } x \in X. \tag{3.8}$$

Teorem 3.29. (Hahn-Banach utvidelsesteorem) *La X være et reelt normert rom og Y et undervektorrom. Enhver $y \in Y^*$ har en utvidelse $x^* \in X^*$ slik at $\|y^*\| = \|x^*\|$. y^* har altså en* norm-bevarende *utvidelse.*

Bevis. La $p(x) = \|y^*\|\|x\|$. Fra Teorem 3.26 og observasjonen (3.8) finner vi en lineær utvidelse x^* slik at $|x^*(x)| \leq \|y^*\|\|x\|$. Dermed er $\|x^*\| \leq \|y^*\|$. Men vi har også

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| \geq \sup_{y \in B_Y} |x^*(y)| = \sup_{y \in B_Y} |x^*(y)| = \|y^*\|.$$

□

Merknad 3.30. Teorem 3.29 holder også for komplekse vektorrom.

Endelig skal vi bevise at X^* er stor, nå i førstninga for normerte rom.

Korollar 3.31. *La X være et normert, reelt rom. For alle $x \in X$ finnes minst en $x^* \in X^*$ slik at $\|x^*\| = 1$ og $x^*(x) = \|x\|$. Spesielt skiller X^* punkter på X, så den svake topologien w generert av X^* gjør (X, w) til et LKTVR.*

Bevis. La Y være spannet til $\{x\}$ og definer $\phi : Y \to \mathbb{R}$ ved $\phi(y) = \phi(\lambda x) = \lambda\|x\|$. Da er ϕ lineær og har norm 1. Ved Teorem 3.29 finnes utvidelse x^*. Denne gjør jobben.

For å vise at X^* skiller punkter, antar vi $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$. Da er $x_1 - x_2 \neq 0$ og har følgelig norm ulik null. Velg x^* slik at $x^*(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\|$. Da er $x^*(x_1) - x^*(x_2) = x^*(x_1 - x_2) \neq 0$. □

Det neste resultatet er klart blant topp tre i funksjonalanalyse. Det har utrolig mange anvendelser og implikasjoner, som vi skal se etter hvert.

Teorem 3.32. (Hahn-Banach separasjonsteorem) *La A og B være disjunkte, ikke-tomme, konvekse mengder av et reelt TVR X.*

(i) Hvis A er åpen, så finnes $\Lambda \in X^*$ slik at

$$\sup_{x\in A} \Lambda(x) \leq \inf_{y\in B} \Lambda(y).$$

(ii) Hvis A er kompakt, B er lukka og X er lokalkonvekst, så finnes $\Lambda \in X^*$ slik at

$$\sup_{x\in A} \Lambda(x) < \inf_{y\in B} \Lambda(y).$$

Bevis. Vi starter med punkt (i) og vi skal nøye oss med å fortelle hovedideen i beviset, detaljer kan finnes f. eks. i [Ru2, s. 59-60]. Først velger vi $a_0 \in A$ og $b_0 \in B$. Så lar vi $x_0 = a_0 - b_0$ og lar $C = A - B + x_0$. Da er det greit å overbevise seg om at C er ei konveks, åpen mengde og at $0 \in C$. Så vil vi ha en p slik som i Teorem 3.26. Vi setter

$$p(x) = \inf\{r \in \mathbb{R} \ : \frac{1}{r}x \in U\},$$

så p viser altså hvor mye vi minst må 'blåse opp C for å få med x'. Det er nå et stykke arbeid å vise at p er endelig, og at den har de algebraiske egenskapene den skal ha. Siden $A \cap B = \emptyset$, ligger garantert x_0 utenfor C. Dermed vet vi at $p(x_0) \geq 1$.

Neste steg er å se på det en-dimensjonale undervektorrommet Y generert av x_0 og å definere en lineær funksjonal f der. Vi setter $f(tx_0) = t$. Da er klart f lineær. Vi vil vise at $f \leq p$ på Y. Hvis $t \geq 0$ er $f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$, siden $p(x_0) \geq 1$. Hvis $t < 0$ er $f(tx_0) = t < 0 \leq p(tx_0)$, siden p fra definisjonen bare kan ha verdier ≥ 0. Vi utvider nå f til en lineær funksjonal $F \in X^+$ slik at $F \leq p$. Vi vet da at $F \leq 1$ på C og dermed $F \geq -1$ på $-C$. Altså er $|F| \leq 1$ på den åpne mengda $C \cap (-C)$. Siden F er lineær sikrer dette kontinuitet i 0, så $F \in X^*$ ved Teorem 3.11.

La $a \in A$ og $b \in B$. Vi må vise at $\Lambda(a) < \Lambda(b)$. Husk at $\Lambda(x_0) = 1$. Dermed er $\Lambda(a) - \Lambda(b) + 1 = \Lambda(a - b + x_0)$. Men så er $\Lambda \leq p$ for alle $x \in X$, spesielt er $\Lambda(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0)$. Endelig er $a - b + x_0 \in C$ og åpenheten av C kan brukes til å vise at $p < 1$ på C. Summa sumarum $\Lambda(a) - \Lambda(b) + 1 < 1$, eller med andre ord, $\Lambda(a) < \Lambda(b)$.

Vi tar så punkt (ii). Tenk deg først at A besto av ett punkt. Dette ligger i det åpne komplementet til B. Derfor finnes åpen V om 0 slik at $A + V \cap B = \emptyset$. Siden X er lokalkonvekst, kan vi velge V fra det konvekse nettverket. Tilbake til den kompakte A'en: For hvert $x \in A$ velger vi konveks, åpen V_x om 0 slik at $A + V_x \cap B = \emptyset$. $(A + V_x)_{x\in A}$ er åpen dekning av A, og kompakthet gir oss endelig underdekning $(A + V_{x_n})_{n=1}^k$. Tar vi nå snittet V av disse konvekse, åpne mengdene om 0, får vi ei konveks, åpen mengde om 0 slik at $A + V \cap B = \emptyset$. Vi kan nå bruke punkt (i) til å finne $\Lambda \in X^*$ slik at $\Lambda(A+V)$ og $\Lambda(B)$ er disjunkte, konvekse delmengder av $\mathbb{R}$ og $\Lambda(A + V)$ til venstre for $\Lambda(B)$. $\Lambda(A)$ er kompakt og konveks og ekte inneholdt i $\Lambda(A + V)$. Resultatet følger da fordi $\Lambda(A + V)$ er ei åpen mengde (enhver ikke-null lineær, kontinuerlig funksjonal på et TVR er en open mapping). □

Et spesialtilfelle av Teorem 3.32 (ii) er ekstra viktig:

Korollar 3.33. *La X være et LKTVR. Da skiller X^* punkter på X.*

Vi får en veldig fin test for å finne tillukning av undervektorrom:

Teorem 3.34. *La M være et undervektorrom av et lokalkonvekst rom X. Hvis x ikke ligger i tillukninga til M, så finnes $F \in X^*$ slik at $F(x) = 1$, men $F = 0$ overalt på M.*

Bevis. Sett $A = x$ og $B = \overline{M}$. Velg $\Lambda \in X^*$ slik at $\Lambda(x_0)$ og $\Lambda(M)$ er disjunkte. Siden Λ er lineær og M er et vektorrom, må $\Lambda(M)$ være et vektorrom. Av slike er det bare to i $\mathbb{R}$, $\{0\}$ og $\mathbb{R}$. Disjunktheten med $\Lambda(x)$, gir $\Lambda(M) = \{0\}$. Nå gjenstår bare å skalere Λ slik at $\Lambda(x) = 1$ (divider Λ med $\Lambda(x)$). $\square$

Merknad 3.35. Ved kontinuitet er $\Lambda(\overline{M}) = \{0\}$, så Teorem 3.34 gir en karakterisering av $\overline{M}$.

Vi avslutter med en anvendelse av Hahn-Banach separasjon i normerte rom.

Teorem 3.36. (**Mazurs teorem**[4]) *La X være et normert rom og $A \subset X$ være ei konveks mengde. Da faller norm-tillukninga og den svake tillukninga av A sammen.*

Bevis. Siden tillukning er snitt over alle lukka mengder 'utenpå' A, er det klart at $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subset \overline{A}^{w}$. Anta denne inklusjonen var ekte, altså at det finnes $x \in \overline{A}^{w} \setminus \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Ved Hahn-Banach separasjon finnes nå $F \in X^*$ slik at

$$F(x) > \sup_{y \in \overline{A}^{\|\cdot\|}} F(y). \tag{3.9}$$

Siden $x \in \overline{A}^{w}$, finnes et nett (x_α) i A slik at $x_\alpha \to x$ svakt, dvs $x^*(x_\alpha) \to x^*(x)$ for alle $x^* \in X^*$. Spesielt må $F(x_\alpha) \to F(x)$, men det er i konflikt med (3.9). $\square$

3.4 Mer om svake topologier og Alaoglu's teorem

I Seksjon 3.2 ble vi kjent med noen eksempler på normerte rom. Vi så at for c_0 er dualen ℓ_1 og dualen til dualen er ℓ_∞. La oss kalle dualen til dualen for *bidualen.* Vi skriver $\ell_\infty = \ell_1^* = c_0^{**}$. Så la vi merke til at c_0 naturlig finnes som et subrom av sitt biduale. La oss etter hvert se at dette ikke er noe som er spesielt for c_0.

Vi starter med et normert rom X og dets duale X^*. Da har vi at $\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|$. Men så viste vi i Korollar 3.31 at det finnes $f \in B_{X^*}$ slik at $f(x) = \|x\|$. Altså har vi at

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)|,$$

altså normen x har som en lineær funksjonal på X^* ved at $x(x^*) = x^*(x)$.

Dette gir ei naturlig avbildning fra $X \to X^{**}$ som vi kan skrive $x \to \iota x$. Da viser argumentasjonen vår at ι er en lineær isometri av X inn i X^{**}.

Vi oppsummerer så langt:

[4]Stanisław Mazur (1905-1981) var en student og senere kollega og nær venn av Stefan Banach i Lvov, Polen, nå Ukraina.

- ιX er et norm-lukka undervektorrom av X^{**}. Ofte skriver vi bare $X \subset X^{**}$ og underforstår at den naturlige embeddinga ligger bak.

- Vi kan bruke ιX til å lage en topologi på X^*. Anta $x^* \neq y^*$. Da finnes $x \in X$ slik at $x^*(x) \neq y^*(x)$, ellers var jo x^* og y^* to like funksjoner. Så X skiller punkter på X^*. Topologien vår er altså Hausdorff, så X^* forsynt med denne topologien blir et LKTVR. Vi kanner denne topologien for *svak-stjerne* topologien på X^* og bruker symbolet w^*. Vi har $w^* \subset weak \subset \|\cdot\|$.

La oss se på den naturlige embeddinga av c_0 i sitt biduale, ℓ_∞. $x^*(x_n)$ betyr her $\sum a_n x_n$, vi ser at det å bruke (x_n) på (a_n) bli akkurat det samme, så innlemmelsen av c_0 i ℓ_∞ vi har observert tildligere er akkurat ι. Det samme gjelder $\ell_p, 1 < p < \infty$. Men det er to vesensforskjeller. $\iota(c_0)$ er et ekte undervektorrom av sitt biduale ℓ_∞, mens Proposisjon 3.25 viser at $\iota(\ell_p)$ fyller ut hele det biduale.

Definisjon 3.37. *Et normert rom kalles refleksivt dersom den naturlige embeddinga ι av X inn i X^{**} er surjektiv.*

$\ell_p, 1 < p < \infty$ er eksempler på refleksive, mens c_0 ikke er refleksivt. For refleksive rom vil svak topologi og svak-stjerne topologi falle sammen på X^*, siden de er generert av samme familie av funksjonaler. Her kommer et generelt resultat om hvor stor ιX er i X^{**}:

Teorem 3.38. (Goldstines teorem, 1938) *La X være et normert rom. Da ligger B_X svak-stjerne tett i $B_{X^{**}}$. Spesielt er X svak-stjerne tett i X^{**}.*

Bevis. Anta det finnes et $F \in B_{X^{**}} \setminus \overline{B_X}^{w^*}$. $\overline{B_X}^{w^*}$ er svak-stjerne lukka og konveks. Ved Hahn-Banach separasjonsteorem finnes $f \in B_{X^*}$ slik at

$$F(f) > \sup_{x^{**} \in \overline{B_X}^{w^*}} |x^{**}(f)|.$$

Men det er umulig siden $F(f) \leq 1$ og $\sup_{x^{**} \in \overline{B_X}^{w^*}} |x^{**}(f)| = 1$. □

3.4.1 Normerte rom med separabel dual

Vi har sett at c_0 og ℓ_p har separabel dual. La oss studere slike rom generelt. Det første vi kan spørre oss om er om dualen kan være separabel uten at rommet selv er separabelt.

Proposisjon 3.39. *Hvis et normert rom har separabel dual, så er det separabelt.*

Bevis. La (x_n^*) være tellbar, tett i X^*. La $\varepsilon > 0$. Bruk definisjonen av normen i X^* til å velge $(x_n) \subset X$ slik at $x_n^*(x_n) > \|x^*\| - \varepsilon$. Det er nok å vise at $M = \text{span } (x_n)$ er tett i X. Anta ikke. Da finnes i følge Teorem 3.34 $x \in X$ og $x^* \in X^*$ med $x^*(x) = 1$, men $x^*(M) = \{0\}$. Men det er umulig; det finnes en x_k^* slik at $\|x^* - x_k^*\| < \varepsilon$. Da kan ikke $x^*(x_k)$ avvike mer enn ε fra $x_k^*(x_k) = 1$. □

Siden ℓ_1 er et separabelt normert rom med ikke-separabel dual, gjelder ikke det omvendte av Proposisjon 3.39.

Vi skal nå studere mengda B_X og gi den relativ svak topologi, dvs de åpne mengdene er nøyaktig mengdene av typen $U \cap B_X$, der U er svakt åpen i X. Når

(x_n^*) er ei tett delmengde av S_{X^*} (ei slik finnes nøyaktig når X^* er separabel), kan vi lage en metrikk på B_X ved å sette

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n^*(x-y)|.$$

Vi skal forsøke å argumentere for at topologien δ indusert av denne metrikken og den relative svake topologien w faller sammen på B_X. Det er nok å vise at hvert nettverkselement i δ inneholder et nettverkselement fra w og vice versa.

La først V være et δ-nettverkselement om $x \in B_X$. Da er V på formen $V = \{y \in B_X : \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n^*(x-y)| < \varepsilon\}$. Definer nå en kontinuerlig lineær funksjonal f ved $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x_n^*(x)$. Vi har

$$f(x-y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n^*(x-y)| = d(x,y),$$

som viser at $f^{-1}(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subset V$.

La dernest U være et w-nettverkselement om x. Da er U på formen $U = \{y \in B_X : |f_i(y-x)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq N\}$. Vi kan anta $\|f_i\| = 1$ (siden $X^* = \operatorname{span} S_{X^*}$). Velg nå $(x_i^*)_{i=1}^N$ slik at $\|f_i - x_i^*\| < \varepsilon/4, 1 \leq i \leq N$. Se på δ-nettverksmedlemmet

$$V = \left\{ y \in B_X : \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n^*(x-y)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^N} \right\}.$$

Siden rekka består av bare positive ledd, må vi ha $2^{-n}|x_n^*(x-y)| < \varepsilon/(2 \cdot 2^N)$ for alle n. For de x_i som approksimerer f_i'er har vi at $i \leq N$, så $|x_i^*(x-y)| < \varepsilon/2$, $1 \leq i \leq N$. Altså er

$$\begin{aligned} |f_j(x-y)| &\leq |f_j(x-y) - x_j^*(x-y)| + |x_j^*(x-y)| \\ &\leq \|f_j - x_j^*\|\|x-y\| + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

for $1 \leq j \leq N$, så $V \subset U$. Vi har bevist

Proposisjon 3.40. *La X være et normert rom, la M være ei norm-begrensa mengde i X og anta X^* er separabelt. Da er (M, w) et metriserbart rom.*[5] *Tilsvarende, hvis X er separabelt og M er norm-begrensa delmengde av X^*, så er (M, w^*) metriserbart.*

3.4.2 Kompakthet i svak-stjerne topologi og refleksivitet

La nå X være et separabelt, normert rom med tett, tellbar delmengde (x_i). Da er, i følge Proposisjon 3.40, (B_{X^*}, w^*) metriserbar. La nå (x_n^*) være ei følge i

[5] Metriserbarheten gjør at alle kompakthetstypene (kompakthet, tellbar kompakthet, sekvensiell grensepunktkompakthet, følgekompakthet og pseudokompakthet) faller sammen på B_X i tilfellene med separabel dual. Merkelig nok er dette sant også uten at dualen er separabel. V. Smulian viste i 1940 at svak kompakthet medfører svak følgekompakthet. At svak følgekompakthet medfører svak kompakthet ble vist av W.F Eberlein i 1947.

B_{X^*} og se på de skalare følgene $(x_n^*(x_i))$:

$$\begin{array}{llllll}
n=1: & x_1^*(x_1) & x_1^*(x_2) & x_1^*(x_3) & \ldots & \\
n=2: & x_2^*(x_1) & x_2^*(x_2) & x_2^*(x_3) & \ldots & \\
n=3: & x_3^*(x_1) & x_3^*(x_2) & x_3^*(x_3) & \ldots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
n=k & x_k^*(x_1) & x_k^*(x_2) & x_k^*(x_3) & \ldots & x_k^*(x_j) \ \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Ved Bolzano-Weierstrass teoremet har kolonne én ei konvergent delfølge. Vi sparer på de radene som svarer til denne delfølga. La y_1^* være den x_n^* som nå er i øverste rad. I det som nå gjenstår, sparer vi bare på de radene som svarer til ei konvergent delfølge av kolonne to. La y_2^* være den x_n^* som nå er i nest-øverste rad. Etterpå dette sparer vi bare på de radene som svarer til ei konvergent delfølge av kolonne tre. La y_3^* være den x_n^* som nå er i tredje-øverste rad. Sånn holder vi på. Da ender vi opp med ei følge (y_j^*) som er ei delfølge av (x_n^*). Videre har vi ordna det slik at den konvergerer punktvis på ei tett delmengde av X. Altså konvergerer den svak-stjerne ved Proposisjon 3.14.

Hvis vi kan vise at (B_{X^*}, w^*) er lukka, så vil grensa til denne følga ligge i (B_{X^*}, w^*) og vi har vist at (B_{X^*}, w^*) er følgekompakt, og dermed kompakt ved metriserbarhet. Det er nok å vise at B_{X^*} inneholder alle sine svak-stjerne-følgegrenser. La $x = w^* - \lim x_n$. Da er opplagt x lineær. Vi må bare vise at $\|x^*\| \leq 1$. Anta ikke. Da finnes $x \in S_X$ slik at $x^*(x) > 1$. Men $x_n^*(x) \to x^*(x)$, som motsier dette. Vi har vist

Proposisjon 3.41. *Når det normerte rommet X er separabelt, så er (B_{X^*}, w^*) følgekompakt (og kompakt).*[6]

Vi har sett at når X er separabelt, så er (B_{X^*}, w^*) metriserbart, følgekompakt. Her kommer den ikke-separable versjonen av Proposisjon 3.41:

Teorem 3.42. (Alaoglu's teorem, 1938) *La X være et normert rom. Da er (B_{X^*}, w^*) et kompakt Hausdorffrom.*[7]

Bevis. Det er kompaktheten vi må vise, at det er Hausdorff skyldes bare at X skiller punkter på X^*. Vi tar bare det reelle tilfellet, det komplekse er helt likt. Vi har at $B_{X^*} \subset [-1,1]^{B_X}$ som mengder. Dessuten er topologien av punktvis konvergens lik produkttopologien, som vi beviste i Teorem 2.6. Ved Tychonoffs teorem er $[-1,1]^{B_X}$ kompakt. Ved Proposisjon 2.23 vil Alaoglus teorem følge om vi kan vise at B_{X^*} er lukka i $[-1,1]^{B_X}$. La (f_α) være et nett i B_{X^*} som konvergerer til $f \in [-1,1]^{B_X}$. Siden grenser bevarer linearitet, må f være lineær. Vi må bare vise at $\|f\| \leq 1$. Anta $\|f\| > 1$. Da finnes, ved definisjonen av $\|\cdot\|$ en $x \in B_X$ slik at $|f(x)| > 1$. Men $f_\alpha(x) \to f(x)$, så dermed må det finnes β slik at $\beta \leq \alpha$ medfører $|f(\alpha)| > 1$, en umulig oppgave for f_α. $\square$

[6] Vi finner dette resultatet som Théorème 3 på s. 123 i [B]. Vi skal snart vise at (B_{X^*}, w^*) alltid er kompakt. Men obs, obs, (B_{X^*}, w^*) er ikke alltid følgekompakt!

[7] Alaoglu annonserte resultatet 1. februar 1938 og publiserte bevis i januar 1939. Men resultatet ble uavhengig oppdaget av flere andre omtrent samtidig.

La oss bruke Alaoglus teorem. Husk at et refleksivt rom er et normert rom der $\iota X = X^{**}$.

Teorem 3.43. *Et normert rom er refleksivt hvis og bare hvis (B_X, w) er kompakt.*[8]

Bevis. Anta X er refleksivt. Legg merke til at (X, w) og $(\iota X, w^*)$ er 'samme' rommet. Siden B_X er hele $B_{X^{**}}$, som er w^*-kompakt ved Alaoglus teorem, er B_X svakt kompakt.

Anta så at B_X er svakt kompakt. Siden ι er w-w^* kontinuerlig er ιB_X w^*-kompakt og dermed w^*-lukka i x^{**}. Ved Hahn-Banach separasjonsteorem finnes $f \in B_{X^*}$ slik at

$$F(f) > \sup_{x^{**} \in \overline{B_X}^{w^*}} |x^{**}(f)|.$$

Men det er umulig på samme måte som i beviset for Goldstines teorem (Teorem 3.38). $\square$

3.5 Oppgaver

Oppgaver til Seksjon 3.1

Oppgave 1. La X være et vektorrom. Vi har sett i Eksempel 3.1 at vi ikke trenger ha $A + A = 2A$.

(a) Vis at vi alltid har $2A \subset A + A$.

(b) Anta $(s + t)A = sA + tA$ for alle skalarer, s og t. Forklar at da er A konveks.

(c) Vis at hvis A er konveks, så er $(s + t)A = sA + tA$ for alle skalarer, s og t.

Oppgave 2. La X være et vektorrom.

(a) Vis at ethvert snitt og enhver union av balanserte mengder er balansert.

(b) Vis at ethvert snitt av konvekse mengder er konvekst. Er det samme sant for unioner?

(c) Vis at hvis A og B er konvekse, så er $A + B$ konveks.

(d) Vis at hvis A og B er balanserte, så er $A + B$ balansert.

Oppgave 3. La X være et topologisk vektorrom.

(a) Vis at for $A \subset X$ gjelder $\overline{A} = \cap(A + V)$, der V gjennomløper et nettverk ved 0.

(b) Vis at for alle $A, B \subset X$ gjelder at $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.

(c) Vis at summen av to åpne delmengder er åpen. Forklar så at hvis $C \subset X$ er konveks, så er C^0 konveks.

(d) Vis at hvis $C \subset X$ er konveks, så er $\overline{C}$ konveks.

(e) Vis at hvis $C \subset X$ er balansert, så er $\overline{C}$ balansert.

(a) Vis at hvis A og B er kompakte, så er $A + B$ kompakt.

Oppgave 4. (a) La X være $C[0, 1]$ med topologien τ av punktvis konvergens. Vis at $(C[0, 1], \tau)$ er lokalkonvekst.
(Hint: Hvilken mengde S i $C[0, 1]^+$ er det som genererer τ?)

[8] Teorem 3.43 ser ut til å være oppdaget omtrent samtidig av Bourbaki (franskmennene), Kakutani og Šmulian.

(b) Vis at elementene i S (fra hintet i (a)) også er elementer i $(X, \|\cdot\|)^*$ og bestem normen deres.

(c) Definer en funksjonal ϕ på $C[0,1]$ ved at $\phi(f) = \int_0^1 f(t)e^t dt$. Vis at ϕ er lineær og begrensa. Bestem $\|\phi\|$.

Oppgave 5. La X og Y være normerte rom og $T : X \to Y$.

(a) Vis at punktene (c), (d) og (e) i Proposisjon 3.12 er ekvivalente.

(b) La $X = Y = \mathbb{R}^2$ med euklidsk topologi. La T være ortogonalprojeksjonen ned på første koordinat. Vis at $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ og bestem normen til T.

Oppgaver til Seksjon 3.2

Oppgave 6. Ei delmengde A av et normert rom X kalles fundamental dersom $\operatorname{span} A$ ligger tett i X.

(a) Vis at (e_n) er fundamental i c_0 ved å vise det sterkere resultatet gitt i (3.4).

(b) Vis at (e_n) er fundamental i ℓ_1.

(c) Vis at (e_n) er fundamental i ℓ_p, $1 < p < \infty$.

(d) Vis at (e_n) ikke er fundamental i ℓ_∞.

Oppgave 7. Gjennomfør beviset for Proposisjon 3.14 for nett.

Oppgave 8. Sett $p = q = 2$ i Hölders ulikhet. Hvilken kjent ulikhet får du da?

Oppgave 9. Undersøk hva det vil si at ei følge konvergerer svakt i ℓ_1, $1 < p < \infty$.

Oppgave 10. Et punkt x i ei delmengde A av et normert rom kalles et ekstrempunkt for A dersom $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ og $y, z \in A$ medfører at $y = z$.

(a) Undersøk hva det vil si å være ekstrempunkt til ei delmengde i planet.

(b) Vis at $(1, 0, 0, 0, ...)$ er et ekstrempunkt i B_{ℓ_1}. Finn flere ekstrempunkter i B_{ℓ_1}.

(c) Vis at B_{c_0} ikke har noen ekstrempunkter.

Bibliografi

[B] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires,* Monografje Matematyczne no. 1, Warszawa, 1932.

[D] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces,* Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer, 1984.

[DU] J. Diestel and J. J. Uhl, jr., *Vector Measures,* Math. Surveys, vol. 15, Amer. Math. Soc., 1977.

[Du] J. Dugundji, *Topology,* Allyn and Bacon, 1966.

[DS] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators. Part 1: General Theory,* Wiley Interscience, 1958.

[F] G. B. Folland, *Real Analysis, Modern techniques and their Applications,* Wiley Interscience, 1984.

[HHZ] P. Habala, P. Hájek and V. Zizler, *Introduction to Banach spaces. I+II,* Matfyzpress, Praha, 1996.

[HR] P. Holm og J. Reed, *Topologi,* Universitetsforlaget, Oslo, 1986.

[J] K. Jänich, *Topology,* Undergratuate Texts in Mathematics, Springer, 1984.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **92**, Springer-Verlag, 1977.

[Mu] J. R. Munkres, *Topology, 2. ed,* Prentice Hall, 2000.

[Pi] A. Pietsch, *Banach Spaces and Linear Operators, a piece of history,* Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Friedrich-Schiller-Univertität, Jena, 2000.

[Ru1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis. 3. ed,* Mc. Graw-Hill 1987.

[Ru2] W. Rudin, *Functional Analysis. 2. ed,* Mc. Graw-Hill 1991.

[Sch] H. H. Schaefer, *Topological Vector spaces,* Springer, GTM no. 3 1971.