MA-179. Laplacetransformasjonen

Sverre Lunøe-Nielsen
sverreal@uia.no

22. februar 2024

Innhold

Kapittel 1

Laplacetransformasjonen

1.1 Innledning

Differensiallikninger er likninger som relaterer funksjoner $f(t)$ med sine høyre ordens deriverte $f^{(n)}(t)$. Tilstanden til mange fysiske systemer kan modelleres ved hjelp av slike likninger, i den forstand at vi beskriver systemets tilstand ved en reell funksjon $f(t)$ som varierer med parameteren t, og at denne funksjonen er relatert til sine deriverte som konsekvens av de fysiske lover systemet er underlagt.

Det første eksemplet man mest sannsynlig blir eksponert for kommer fra Newtons 2. bevegelseslov som sier at kraften F som virker på et legeme er proporsjonal med legemets akselerasjon, med legemets masse som proporsjonalitetskvotient.

Et legeme i fritt fall nær Jordens overflate opplever en kraft tilnærmet konstant lik $g \cdot m$ der g er tyngdens akselerasjon, og m legemets masse. Dette kombinert med Newtons 2. lov sier da at

$$ma = mg$$

eller

$$a = g\,. \tag{1.1}$$

Den eneste fysiske tilstandene som endrer seg over tid i dette systemet er legemets posisjon og hastighet målt i Jordens referansesystem. La oss beskrive posisjonen med en reell funksjon $p(t)$ som er lik avstanden mellom Jordens overflate og legemets massemiddelpunkt ved tiden t. Den deriverte funksjonen $p'(t)$ er da legemets momentane posisjonsendring, eller hastighet, og den dobbeltderiverte $p''(t)$ legemets akselerasjon. Med denne modellen ser likningen (1.1) ut som

$$p''(t) - g = 0\,. \tag{1.2}$$

Årsaken til at man lager slike modeller er at man ikke kjenner tilstandsfunksjonen som inngår i likningene, men ønsker å finne den. Likningene er da et utgangspunkt som i mange tilfeller gir et godt nok grep om tilstandsfunksjonen til at man kan beskrive den mer eller mindre eksplisitt.

Vi lærte i MA-178 at likninger som (1.2) kalles "homogene", og vi lærte metoder for å finne løsningen til et utvalg slike likninger. Men hva om likningen ser slik ut:

$$p''(t) - g = f(t) \tag{1.3}$$

der $f(t)$ ikke er 0 eller en annen konstant funksjon? Dette er en type likning som vi ikke lærte å løse i MA-178. Laplacetransformasjonen er en ny metode som kan brukes til å løse likninger slike ikke-homogene likninger.

Vi skal i kapittel 1 gjennomgå grunnleggende definisjoner og egenskaper rundt Laplacetransformasjonen. Alle resultatetene her kan også finnes i standard lærebøker om emnet, som f.eks. [3, §5] eller [2, §12.5].

1.2 Grunnleggende definisjoner

Vi studerer reelle funksjoner $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Laplacetransformasjonen til en funksjon $f(t)$ er en ny funksjon som vi kaller $\mathcal{L}[f]$, men for å si hva denne er må vi først sette opp noen krav til $f(t)$. Det første vi krever er at $f(t)$ er kontinuerlig i alle punkter $t \in [0, \infty)$ med unntak av noen punkter hvor $f(t)$ får lov til å gjøre diskontinuerlige "hopp".

Vi begynner med å gjøre dette presist i følgende definisjon. Se også [1, §1.4].

Definisjon 1.2.1.

- *Funksjonen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i $t = c$ dersom*

$$\lim_{t \to c^-} f(t) = f(c) = \lim_{t \to c^+} f(t)\,.$$

- *Funksjonen kalles stykkevis kontinuerlig på intervallet (a, b) dersom $f(t)$ er kontinuerlig for alle $t \in (a, b)$ med unntak av et endelig antall punkter $t = c_1, c_2, \ldots, c_k$ der de ensidige grensene*

$$\lim_{t \to c_i^-} f(t) \neq \lim_{t \to c_i^+} f(t)$$

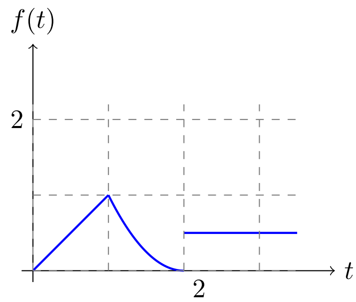
eksisterer, men er ulike.

- *Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er stykkevis kontinuerlig dersom $f(t)$ er stykkevis kontinuerlig på alle intervaller (a, b).*

Eksempel 1 Funksjonen gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1) \\ (2-t)^2 & t \in [1, 2] \\ 1/2 & t > 2\,. \end{cases}$$

er ikke kontinuerlig, men den er stykkevis kontinuerlig.



□

I tillegg til stykkevis kontinuerlig, må vi også kreve at våre funksjoner ikke vokser for raskt når $t \to \infty$.

Definisjon 1.2.2. *La $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ være en reell funksjon. Dersom det eksisterer en konstant $k > 0$ og en konstant $A \geq 0$ slik at*

$$|f(t)| \leq A \cdot e^{kt}$$

for alle $t \geq 0$, kaller vi $f(t)$ eksponensielt dominert.

De aller fleste funksjoner vi kjenner til er eksponensielt dominert. For eksempel er $\sin(t)$, $\cos(t)$, t^n og e^{at}, for alle konstante $a \in \mathbb{R}$ og $n \geq 0$, alle eksempler på eksponensielt dominerte reelle funksjoner.

Definisjon 1.2.3. *La $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ være en eksponensielt dominert, stykkevis kontinuerlig, reell funksjon slik at $|f(t)| < A \cdot e^{kt}$ for alle $t \geq 0$. Laplacetransformasjonen til $f(t)$ er den reelle funksjonen*

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \, dt \,,$$

og er definert for alle $s > k$.

Legg merke til at denne funksjonen kalles $\mathcal{L}[f]$ og at funksjonsvariabelen er s.

Laplacetransformasjonen til en stykkevis kontinuerlig, eksponensielt dominert funksjon er veldefinert. Med dette mener vi at definisjonen faktisk gir oss en reell funksjon slik vi påstår. Dette er ikke helt åpenbart – det kunne jo tenkes at det uegentlige integralet som inngår i definisjonen ikke konvergerer. Denne frykten er ubegrunnet når $f(t)$ oppfyller hypotesene vi har pålagt den. [1]

[1] Beviset for denne påstanden er utenfor pensum i MA-179, men vi gir en skisse av argumentet her. La $T > 0$ være en konstant. Da er

$$\begin{aligned}\int_0^T |f(t)| \cdot e^{-st} \, dt &\leq \int_0^T A \cdot e^{kt} \cdot e^{-st} \, dt \\ &= A \cdot \int_0^T e^{(k-s)\cdot t} \, dt = \frac{A}{s-k} \cdot \left(1 - e^{-(s-k)T}\right)\end{aligned}$$

når $s > k$, og dersom vi tar grensen når $T \to \infty$ får vi ulikheten

$$\int_0^\infty |f(t)| \cdot e^{-st} \, dt \leq \frac{A}{s-k} \,.$$

Kompletthet av de reelle tall forteller oss nå at det ubestemte integralet eksisterer fordi det er en voksende og begrenset funksjon av T. Dette, kombinert med ulikhetene

$$-\int_{T_1}^{T_2} |f(t)| e^{-st} \, dt \leq \int_{T_1}^{T_2} f(t) \cdot e^{-st} \, dt \leq \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| e^{-st} \, dt$$

betyr at integralet

$$\int_0^T f(t) \cdot e^{-st} \, dt$$

er en Cauchyfølge i T og derfor konvergent når $T \to \infty$ siden $\mathbb{R}$ er komplett.

1.3 Grunnleggende egenskaper

Det er to hovedårsaker til at Laplacetransformasjonen er nyttig når vi ønsker å løse differensiallikninger. Den første er linaritet og den andre er at dersom vi bruker Laplacetransformasjonen på den deriverte av en funksjon, så blir resultatet merkelig nok uttrykt ved Laplacetransformasjonen til funksjonen selv, altså $f(t)$ og ikke $f'(t)$. Dette gjør at vi kan transformere differensiallikninger til likninger som ikke inneholder de deriverte til den ukjente funksjonen.

1.3.1 Linearitet

La $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ være to stykkevis kontinuerlige, eksponensielt dominerte relle funksjoner. Da er enhver lineærkombinasjon $a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$ også stykkevis kontinuerlig og eksponensielt dominert, og Laplacetransformasjonen oppfyller likheten

$$\mathcal{L}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot \mathcal{L}[f(t)] + b \cdot \mathcal{L}[g(t)] \, .$$

Transformasjonen $\mathcal{L}$ oppfører seg med andre som en lineær transformasjon.

Dette følger ved å skrive opp definisjonen til Laplacetransformasjonen og bruke vanlige regneregler for integrasjon:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)](s) &= \int_0^\infty \big(a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\big) \cdot e^{-st} \, dt \\
&= a \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \, dt \\
&+ b \cdot \int_0^\infty g(t) \cdot e^{-st} \, dt \\
&= a \cdot \mathcal{L}[f](s) + b \cdot \mathcal{L}[g](s) \, .
\end{aligned}$$

1.3.2 Laplacetransformasjonen til den deriverte av en funksjon

Følgende teorem sier at Laplacetransformasjonen kan brukes til å gjøre differensiallikninger om til algebraiske likninger som ikke involverer de deriverte til funksjonen vi ser på.

Teorem 1.3.1. *La $f(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ være en deriverbar reell funksjon, slik at både f og f' er eksponensielt dominerte, stykkevis kontinuerlig funksjoner slik at $|f'(t)| \geq A \cdot e^{kt}$ for alle $t \geq 0$. Da er*

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0)$$

for alle $s > \max(0, k)$.

Bevis: Delvis integrasjon gir følgende likhet av ubestemte integraler:

$$\begin{aligned}
\int f'(t) \cdot e^{-st} \, dt &= f(t) \cdot e^{-st} - \int f(t) \cdot (-s) \cdot e^{-st} \, dt \\
&= f(t) \cdot e^{-st} + s \cdot \int f(t) \cdot e^{-st} \, dt
\end{aligned}$$

Dersom $s > 0$ blir derfor grensen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-st}\, dt &= \lim_{T\to\infty} \left[f(t) \cdot e^{-st} \right]_0^T + s \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty} f(T) \cdot e^{-sT} - f(0) + s \cdot \mathcal{L}[f](s) \\ &= s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0)\,.\end{aligned}$$

Grensen på linje to i utregningen over er lik 0 siden vi har ulikhetene

$$-A \cdot e^{(k-s)t} \leq f(t) \cdot e^{-st} \leq A \cdot e^{(k-s)t}$$

som når $s > k$ medfører at grensen av uttrykkene til venstre og høyre er lik 0. Skvisteoremet [1, §1.2 side 69] gir da at $f(t) \cdot e^{-st} \to 0$ når $t \to \infty$.

$\square$

Eksempel 2 La $f(t)$ være løsning av differensiallikningen

$$f'(t) - 2f(t) = 0$$

som oppfyller initialbetingelsen $f(0) = 1$. Begge sider av likningen er funksjoner av t, og siden de er like er de også like etter at vi har anvendt Laplacetransformasjonen på dem. Høyresiden av likningen blir 0 siden $\mathcal{L}$ er en lineær transformasjon, og likningen ser ut som

$$\mathcal{L}[f'](s) - 2\mathcal{L}[f](s) = 0\,.$$

Teorem 1.3.1 sier at $\mathcal{L}[f'](s) = s \cdot \mathcal{L}[f](s) - f(0)$, og med denne substitusjonen får vi

$$s \cdot \mathcal{L}[f](s) - 2\mathcal{L}[f](s) = f(0) = 1$$

eller

$$(s-2)\mathcal{L}[f](s) = 1$$

som betyr at

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s-2}\,.$$

Vi har med andre ord regnet ut Laplacetransformasjonen til løsningen av differensiallikningen uten å vite løsningen på forhånd! Grunnen til at vi klarte dette var Teorem 1.3.1 som gjør det mulig å transformere en differensiallikning til en ren algebraisk likning uten deriverte.

Men hva slags nytte har vi i å vite Laplacetransformasjonen til $f(t)$ men ikke $f(t)$ selv? For å finne løsningen $f(t)$ av vår opprinnelige differensiallikning er vi så nødt til å løse vår nye likning

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s-2}$$

med hensyn på $f(t)$. Vi må med andre ord spørre "Hvilken funksjon $f(t)$ er slik at $\mathcal{L}[f]$ er lik $1/(s-2)$?". Dette problemet skal vi se på i avsnitt 1.4 og 1.5. Der vi blant annet skal se at

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = 1/(s-2)\,.$$

Så da kan vi jo håpe at $f(t) = e^{2t}$ løse vår differensiallikning. Dette er korrekt, noe vi enkelt kan sjekke at stemmer ved å regne ut de deriverte og se at de passer i differensiallikningen: $f'(t) - 2f(t) = 2e^{2t} - 2e^{2t} = 0$, og $f(0) = e^0 = 1$.

Nå som vi har funnet en løsning, er det neste naturlige spørsmålet "finnes det flere $f(t)$ som er slik at $\mathcal{L}[f] = 1/(s-2)$?". Svaret på dette spørsmålet er "nei, det finnes så godt som kun én slik $f(t)$", som vi skal se i avsnitt 1.6.

□

Det finnes også en sammenheng mellom antiderivasjon og Laplactransformasjon.

Teorem 1.3.2. *La $f(t) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ være en stykkevis kontinuerlig, eksponensielt dominert reell funksjon, slik at $|f(t)| \geq A \cdot e^{kt}$ for alle $t \geq 0$. La $\phi(t) = \int_0^t f(\tau)\ d\tau$. Da er*

$$\mathcal{L}[\phi](s) = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[f](s)$$

for alle $s > \max(0,k)$.

Bevis: Fundamentalteoremet i kalkulus sier at

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\ d\tau = f(t)$$

så ved Teorem 1.3.1 følger det at

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\phi'] = s \cdot \mathcal{L}[\phi] - \phi(0)\,.$$

Siden $\phi(0) = \int_0^0 f(\tau)\ d\tau = 0$, følger det ved å dele likningen over på s at

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[f]\,,$$

for alle s slik at $s > 0$ og $s > k$.

□

1.4 Laplacetransformasjonen til noen kjente funksjoner

Behovet for å vite Laplacetransformasjonen til polynomfunksjoner og enkle trigonometriske funksjoner dukker ofte opp i praksis. I dette avsnittet regner vi ut noen slike eksempler.

De beregningsmessige resultatene fra avsnittet er samlet i tabell 1.1.

1.4.1 Polynomer

Rad (1) i tabell 1.1 forteller oss hva som skjer når vi Laplacetransformerer en polynomfunksjon. Det vil si, formelen i tabellen forteller oss $\mathcal{L}[t^n]$, så dersom vi har et polynom med flere ledd kan vi bruke linearitet til å regne ut $\mathcal{L}[p(t)]$.

Eksempel 3 La $f(t) = 3t^2 - t + 2$. Da er $\mathcal{L}[f(t)]$ mulig å beregne ved å kombinere at $\mathcal{L}$ er lineær med formelen $\mathcal{L}[t^n] = n!/s^{n+1}$ fra tabell 1.1:

$$\mathcal{L}[f](s) = 3\mathcal{L}[t^2] - \mathcal{L}[t] + 2\mathcal{L}[1] = \frac{6}{t^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\,.$$

□

Teorem 1.4.1. *La $n \geq 0$, og la $f(t) = t^n$. Da er $\mathcal{L}[f](s)$ gitt ved*

$$\mathcal{L}[t^n](s) = n\mathcal{L}[t^{n-1}]/s = n!/s^{n+1}$$

for $s > 0$.

Bevis. Vi starter med å se på tilfellet $n = 0$. Da er $f(t) = 1$, og når $s > 0$ er

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[1] &= \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{-1}{s} \cdot e^{-st}\right]_{t=0}^T \\
&= \frac{-1}{s} \cdot \lim_{T\to\infty} \left[e^{-s\cdot T} - e^0\right] = \frac{1}{s}\,.
\end{aligned}$$

Vi bruker at $s > 0$ for å antiderivere e^{-st}, siden vi deler på s i svaret. Deretter bruker vi antagelsen en gang til når vi regner ut grensen

$$\lim_{T\to\infty} e^{-sT} = 0$$

på den siste linjen i utregningen. Denne grensen er kun lik 0 når $s > 0$.

For å vise den generelle formelen når $n > 0$, bruker vi at den deriverte av t^n er lik nt^{n-1}. Kombinert med Teorem 1.3.1 har vi derfor at

$$\mathcal{L}[nt^{n-1}] = s \cdot \mathcal{L}[t^n] - (0^n) = s \cdot \mathcal{L}[t^n]\,,$$

og ut i fra denne likheten følger det at

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[nt^{n-1}] = \frac{n}{s} \cdot \mathcal{L}[t^{n-1}]\,.$$

Ved å anvende denne rekursive formelen n ganger, får vi

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^n} \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{n!}{s^n} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}\,.$$

□

1.4.2 Trigonometriske funksjoner

La

$$f(t) = c \cdot \sin(\omega t + \rho)$$

være en harmonisk svingning med frekvens $\omega/2\pi$, faseforskyvning ρ og amplitude c. Vi ønsker å beregne Laplacetransformasjonen til $f(t)$. Ved hjelp av summeformelen for $\sin(x)$ kan vi skrive $f(t)$ som

$$f(t) = c \cdot \cos(\rho) \cdot \sin(\omega t) + c \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\omega t)\,,$$

så ved linearitet trenger vi kun å beregne $\mathcal{L}[\sin(\omega t)]$ og $\mathcal{L}[cos(\omega t)]$.

Resultatene fra dette avsnittet er samlet i tabell 1.1.

Teorem 1.4.2. *La $\omega \in \mathbb{R}$ være en reell konstant. Da er*

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

for $s > 0$.

Bevis: Delvis integrasjon gir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) &= \int_0^\infty \sin(\omega t) \cdot e^{-st}\ dt \\
&= \left[\sin(\omega t) \cdot \frac{-1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \omega \cos(\omega t) \cdot \frac{-1}{s} e^{-st}\ dt
\end{aligned}$$

Grensen $\lim_{T\to\infty} \sin(\omega t) s^{-1} e^{-sT} = 0$ når $s > 0$, så uttrykket over forenkler til:

$$= 0 + \int_0^\infty \omega \cos(\omega t) \cdot \frac{1}{s} e^{-st}\ dt$$

og en ny runde med delvis integrasjon gir:

$$\begin{aligned}
&= \left[\omega \cos(\omega t) \cdot \frac{-1}{s^2} e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\omega^2 \sin(\omega t) \cdot \frac{-1}{s^2} e^{-st}\ dt \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^\infty \sin(\omega t) \cdot e^{-st}\ dt \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} \cdot \mathcal{L} \sin(\omega t)](s)\,.
\end{aligned}$$

Vi samler integralene på venstre side av likningen, og får:

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right) \cdot \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2}$$

og til slutt:

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2(1 + \omega^2/s^2)} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\,.$$

$\square$

Teorem 1.4.3. *La $\omega \in \mathbb{R}$ være en reell konstant. Da er*

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

for $s > 0$.

Bevis: Beviset er en utregning som er nesten lik utregningen i beviset for Teorem 1.4.2.

$\square$

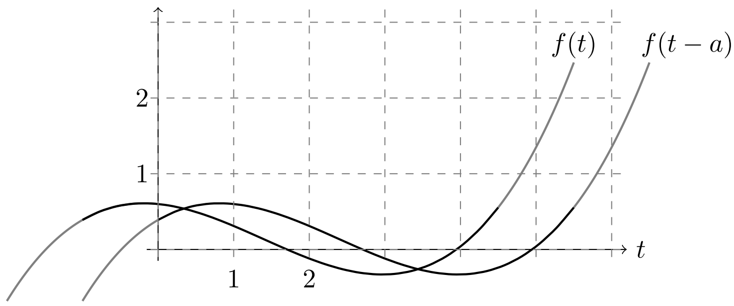
1.5 Funksjoner med forskyvning

La $f(t)$ være en stykkevis kontinuerlig reell funksjon og la $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ være Laplacetransformasjonen til $f(t)$.

Vi lager nå en ny funksjon $f_a(t) = f(t-a)$ som vi kaller t-forskyvningen til $f(t)$ med a. Hvis vi tenker på parameteren t som tid og funksjonsverdiene til $f(t)$ som hendelser, vil $f_a(t)$ fortelle den samme historien som $f(t)$, bare forskjøvet i tid: Forskyvningen $f_a(t)$ beskriver de samme hendelsene når vi starter i $t = a$, som $f(t)$ gjør når vi starter i $t = 0$. Grafen til $f_a(t)$ er den vi får dersom vi parallellforskyver grafen til $f(t)$ med a enheter langs t-aksen.

På samme måten kan vi danne $F_a(s) = F(s-a)$ ved å forskyve F i parameteren s. Vi kaller dette s-forskyvning med a.

Dette avsnittet handler om hvordan forskyvning, enten i s eller t, spiller sammen med å anvende Laplacetransformasjonen.



Figur 1.1: Grafen til $f_a(t) = f(t-a)$ fremkommer ved å skyve grafen til $f(t)$ a enheter langs t-aksen. I denne figuren er $a > 0$ et positivt tall.

1.5.1 s-forskyvning

Forskyvning $\mathcal{L}[f](s)$ med a tilsvarer etter Laplacetransformasjon å multiplisere $f(t)$ med e^{at} før vi anvender Laplacetransformasjonen. Mer presist:

Teorem 1.5.1. *La a være en reell konstant, og anta at $|f(t)| \leq Me^{kt}$. Da er*

$$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = \mathcal{L}[f](s-a) \quad \textit{(for } s > a+k\textit{).}$$

Bevis: Når $s - a > k$, følger resultatet av utregningen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st+at}\, dt \\
&= \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-(s-a)t}\, dt = \mathcal{L}[f](s-a)\,.
\end{aligned}$$

□

Et viktig spesialtilfelle får vi ved å la $f(t) = 1$:

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \mathcal{L}[1](s-a) = \frac{1}{s-a} \quad (\text{for } s > a)\,. \tag{1.4}$$

Eksempel 4 Anta at $F(s) = 1/(s^2+s+1)$. Finn $f(t)$ slik at $\mathcal{L}[f] = F(s)$. For å gjøre dette skal vi skrive om nevneren i brøkfunksjonen $F(s)$ slik at den får formen $(s-a)^2 + \omega^2$. Dersom vi klarer det blir

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$$

og vi kan bruke Teorem 1.5.1 sammen med Teorem 1.4.2 for å konkludere med at

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} e^{at} \cdot \sin(\omega t)\right] = \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} = F(s)\,.$$

Så derfor vi regner ut

$$s^2 + s + 1 = (s-a)^2 + \omega^2 = s^2 - 2as + a^2 + \omega^2$$

som betyr at $1 = -2a$ og $1 = a^2 + \omega^2$. Disse to likningene har løsninger $a = -1/2$ og $\omega = \sqrt{3}/2$. Dermed er

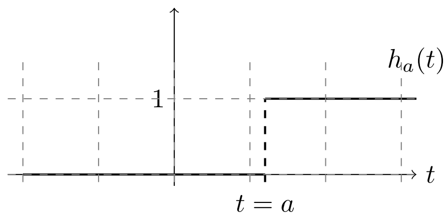
$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-t/2} \cdot \sin(\sqrt{3}t/2)\,.$$

□

1.5.2 t-forskyvning

La $h(t)$ være Heavisides stegfunksjon definert ved

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0\,. \end{cases}$$



Figur 1.2: Heavisidefunksjonen t-forskjøvet med $a > 0$.

Vi bruker $h(t)$ sammen med t-forskyvning til å lage funksjoner som "skrur seg på" på et visst tidspunkt.

Eksempel 5 La $f(t)$ være gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in [0,2) \\ \cos(t-2) & t \in [2,3) \\ 0 & t \geq 3\,. \end{cases}$$

Vi kan bruke Heavisides stegfunksjon til å gi en alternativ formel for $f(t)$. Nøkkelen er å lage en funksjon som er 1 når $t \in [0,2)$ og 0 ellers ved å multiplisere to forskyvninger av Heavisides funksjon slik:

$$h(t) \cdot \big(1 - h_2(t)\big) = h(t) \cdot \big(1 - h(t-2)\big)\,.$$

Denne funksjonen har egenskapen vi ønsker, siden den er lik 1 hvis og bare hvis $h(t) = 1$ og $1 - h_2(t) = 1$, eller med andre ord når $h(t) = 1$ og $h(t-2) = 0$, som intreffer nøyaktig når $t \in [0,2)$. På samme måte vil funksjonen

$$h_2(t) \cdot (1 - h_3(t)) = \begin{cases} 1 & t \in [2,3) \\ 0 & \text{ellers}\,. \end{cases}$$

Derfor kan vi skrive

$$\begin{aligned} f(t) = {} & h(t) \cdot (1 - h_2(t)) \cdot x \\ & + h_2(t) \cdot (1 - h_3(t)) \cdot \cos(t-2)\,, \end{aligned}$$

og det er lett å sjekke at dette stemmer med den opprinnelige definisjonen av $f(t)$: Når $t \in [0,2)$ er koeffisienten foran x i den første summanden lik 1 og den andre summanden 0. Når $t \in [2,3)$ er den første summanden 0 og den andre lik $1 \cdot \cos(t-2)$. Og i alle andre tilfeller er begge summandene lik 0 og hele uttrykket derfor 0.

Fordelen med denne formen er at det er lettere å beregne Laplacetransformasjonen til $f(t)$ på denne formen enn når den var på sin opprinnelige form.

□

Laplacetransformasjonen til $h(t)$ er lik $\mathcal{L}[1]$ ved Lemma 1.6.1 siden $h(t) = 1$ for alle $t > 0$. Så med andre ord er

$$\mathcal{L}[h](s) = \frac{1}{s} \quad \text{for } s > 0. \tag{1.5}$$

Mer generelt har vi

Teorem 1.5.2. *La a være en reell konstant, og anta at $f(t)$ er en stykkevis kontinuerlig, eksponensielt dominert funksjon slik at $|f(t)| \leq Me^{kt}$ for alle $t \geq 0$. Da er*

$$\mathcal{L}[h_a \cdot f_a](s) = e^{-sa} \cdot \mathcal{L}[f](s) \quad \textit{for } s > k.$$

Bevis: Når $s > k$, følger resultatet av utregningen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[h_a \cdot f_a](s) &= \int_0^\infty h_a(t) \cdot f_a(t) \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \int_a^\infty h_a(t) \cdot f_a(t) \cdot e^{-st}\, dt \quad \text{(siden } h_a(t) = 0 \text{ når } t < a) \\
&= \int_a^\infty f_a(t) \cdot e^{-st}\, dt \quad \text{(siden } h_a(t) = 1 \text{ når } t \geq a) \\
&= \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-s\tau - sa}\, d\tau \quad \text{(ved variableskiftet } \tau = t - a) \\
&= e^{-sa} \cdot \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-s\tau}\, d\tau \\
&= e^{-sa} \cdot \mathcal{L}[f](s)\,.
\end{aligned}$$

□

1.6 Inversen til Laplacetransformasjonen

I eksempel 2 tok vi utgangspunkt i en differensiallikning og regnet fra den ut Laplacetransformasjonen av løsningen. Beregningene i avsnitt 1.4 og 1.5 gjør at vi mange tilfeller kan finne en $f(t)$ slik at $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$. Men hvorfor vet vi at denne funksjonen er den vi ønsker? Det kunne tenkes at det finnes en annen funksjon $f(t)$ som også gir oss $F(s)$ og som ikke passer med differensiallikningen vi startet med. I dette avsnittet skal vi se at Laplacetransformasjonen er så godt som injektiv, som er en annen måte å si at likningen $\mathcal{L}[f] = F(s)$ har éntydig løsning.

Først og fremst må vi kommentere uttrykket "så godt som injektiv" i setningen over. At $\mathcal{L}$ er injektiv (eller "1-1") betyr at dersom $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, så er $f = g$ som funksjoner. Dersom vi hadde visst dette, hadde vi også visst at den løsningen vi fant i eksempel 2 er den eneste funksjonen $f(t)$ som gir oss $F(s)$, så da hadde vi også visst at $f(t)$ er den funksjonen som oppfyller differensialliknigen vi begynte med.

Følgende utsagn følger av vanlige egenskaper ved det bestemte integralet som definerer Laplacetransformasjonen.

Lemma 1.6.1. *La $f(t)$ og $g(t)$ være relle funksjoner som er identitiske for alle $t > 0$, med unntak av et visst antall punkter $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$. Dersom Laplacetransformasjonenene $\mathcal{L}[f]$ og $\mathcal{L}[g]$ eksisterer, er de like som funksjoner av s.*

Så med andre ord ser ikke Laplacetransformasjonen forskjell på $f(t)$ og $g(t)$ selv om de er forskjellige som funksjoner. Altså er ikke $\mathcal{L}$ injektiv i ordets strenge forstand. Men dette er også alt som går galt, slik det neste teoremet forteller oss.

Teorem 1.6.2. *La $f(t), g(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ være to stykkevis kontinuerlige, eksponensielt dominerte reelle funksjoner. Dersom*

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$$

så er $f(t) = g(t)$ for alle $t \geq 0$ der både $f(t)$ og $g(t)$ er kontinuerlige.

Altså er $f(t) = g(t)$ "nesten overalt" dersom de har lik Laplacetransformasjon. Dette er godt nok til at vi velger å omtale $f(t)$ som funksjonen (merk bestemt form) som har $F(s)$ som sin Laplacetransformerte.

Bevis: Følgende bevis er ikke pensum i MA-179. Vi skal heller ikke bevise teoremet for alle funksjoner som oppfyller hypotesen, men begrense oss til spesialtilfellet der $f(t)$ og $g(t)$ er polynomfunsjoner.

Ved linearitet holder det å vise at dersom $\mathcal{L}[f-g] = 0 \Rightarrow f - g = 0$ (nesten overalt). La $f(t) - g(t) = p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ være et polynom av grad n. Da er

$$\mathcal{L}[p] = \frac{c_n}{s^{n+1}} + \frac{c_{n-1}}{s^n} + \ldots + \frac{c_2}{s^3} + \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_0}{s}$$

der $c_n = n! \cdot a_n$. Dersom $\mathcal{L}[p] = 0$ er også $s^{n+1}\mathcal{L}[p] = 0$, så

$$0 = s^{n+1}\mathcal{L}[f] = c_n + c_{n-1}s + \ldots + c_2 s^n + c_1 s^{n-1} + c_0 s^n$$

som medfører at $c_k = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, n$. Siden $c_k = 0$ impliserer at $a_k = 0$, betyr det at $p = f - g = 0$, så $f = g$.

□

1.7 Oppsummering

Utregningene gjort i avsnitt 1.4 er oppsummert i tabell 1.1. Disse er så kombinert med Teorem 1.5.2 og Teorem 1.5.1 om t- og s-forskyvning for å produsere formlene i tabell 1.2 og 1.3.

	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$	**Definisjonsområde**
(1)	t^n	$n!/s^{n+1}$	$s > 0$ og $n \geq 0$
(2)	$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$	$s > 0$
(3)	$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$	$s > 0$

Tabell 1.1: Laplacetransformasjonen til noen kjente funksjoner.

$f(t), \quad \lvert f(t)\rvert \leq Me^{kt}$	$\mathcal{L}[f](s)$	**Definisjonsområde**
$h_a(t) \cdot f_a(t)$	$e^{-as} \cdot \mathcal{L}[f](s)$	$s > k$
$h_a(t)$	e^{-as}/s	$s > a$
$h_a(t) \cdot (t-a)$	e^{-as}/s^2	$s > a$
$h_a(t) \cdot (t-a)^n$	$n!e^{-as}/s^{n+1}$	$s > a$
$h_a(t) \cdot \sin(\omega(t-a))$	$e^{-as}\omega/(s^2+\omega^2)$	$s > a$
$h_a(t) \cdot \cos(\omega(t-a))$	$e^{-as}s/(s^2+\omega^2)$	$s > a$

Tabell 1.2: Laplacetransformasjonen og t-forskyvning.

$f(t), \quad f(t)\rvert \leq Me^{kt}$	$\mathcal{L}[f](s)$	**Definisjonsområde**
$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)](s)$	$\mathcal{L}[f]_a(s) = \mathcal{L}[f](s-a)$	$s > a + k$
e^{at}	$1/(s-a)$	$s > a$
$e^{at} \cdot t$	$1/(s-a)^2$	$s > a$
$e^{at} \cdot t^n$	$n!/(s-a)^{n+1}$	$s > a$
$e^{at} \cdot \sin(\omega t)$	$\omega/((s-a)^2+\omega^2)$	$s > a$
$e^{at} \cdot \cos(\omega t)$	$(s-a)/((s-a)^2+\omega^2)$	$s > a$

Tabell 1.3: Laplacetransformasjonen og s-forskyvning

Oppgaver

1.1 Beregn $\mathcal{L}[f]$ når $f(t) = -t^2 + 1$.

1.2 Beregn $\mathcal{L}[f]$ når $f(t) = (t+1)(t-2)$.

1.3 Finn en funksjon $f(t)$ slik at $\mathcal{L}[f] = -1/s^3$.

1.4 Finn en funksjon $f(t)$ slik at $\mathcal{L}[f] = 1/(s^2+4)$.

1.5 Regn ut $\mathcal{L}[e^{3t} \cdot \sin(t)]$.

1.6 Finn en $f(t)$ slik at $\mathcal{L}[f] = 2e^{-2s}/(s^1+4)$.

1.7 Bruk Laplacetransformasjonen til å løse differensiallikningen $y'' = -2y$ med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

1.8 Bruk Laplacetransformasjonen til å løse differensiallikningen $y'' + y' + y = 0$ med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Kapittel 2

Eksempler

2.1 Harmoniske svingninger

Vi begynner med et problem som vi kan løse med metoder vi lærte i MA-178. Vi minner om hvordan dette kan gjøres før vi så i avsnitt 2.2 gjør en endring av problemet som gjør det nødvendig å ta i bruk nye metoder for å finne løsningen.

La et punktlegeme med masse m henge i en fjær fra et tak. Stivheten i fjæren er gitt med fjærkonstanten $k > 0$, og posisjonen til legemet er lik lengden til fjæren, som vi angir som en funksjon av tiden, $l(t)$. Vi får vite at ved tiden $t = 0$ er lengden på fjæren lik 1 meter, og hastigheten til legemet er lik 0.

2.1.1 Modellering

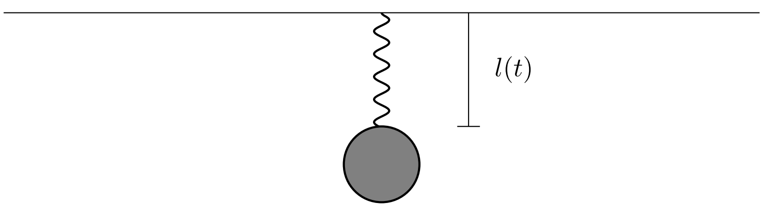
Vi skal modellere dette mekaniske systemet og finne en funksjon som beskriver legemets posisjon ettersom tiden går.

Til en hver tid vil Jordens tyngdekraft påvirke legemet med en kraft lik

$$m \cdot g$$

der g er tyngdens akselerasjon. Videre beskriver vi fjærens virkning ved Hookes lov som sier at dersom hvilelengden til fjæren er L, så virker det en kraft på legemet som er lik

$$-k \cdot (l(t) - L)$$



Figur 2.1: Et legeme, en fjær og et urørlig tak.

Dette, kombinert med Newtons 2. lov, gir følgende differensiallikning:

$$gm - k \cdot \big(l(t) - L\big) = F = ma = m \cdot l''(t)\,, \tag{2.1}$$

som er ekvivalent med

$$m \cdot l''(t) + k \cdot l(t) = K \tag{2.2}$$

der høyresiden $K = gm + kL$ er konstant.

2.1.2 Repetisjon fra MA-178

Vi lærte i MA-178 å løse lineære differensiallikninger av 2. orden, med konstante koeffisienter som også er homogene. Vår likning (2.2) er alt dette bortsett fra homogen, siden $K \neq 0$. Men vi lærte også at når det inhomogene leddet er konstant, kan vi lage en ny likningen som er homogen ved hjelp av en substitusjon: La $u(t) = l(t) - K/k$. Da er $k \cdot l(t) = k \cdot u(t) + K$, $u' = l'$, $u'' = l'$, og likningen over blir til den homogene likningen:

$$m \cdot u''(t) + k \cdot u(t) = 0$$

I denne formen kan vi bruke metoden vi lærte i MA-178 for å finne løsningen. Vi setter da først opp den tilhørende karakteristiske likningen

$$m \cdot r^2 + k = 0\,.$$

Denne har komplekse løsninger $r = \pm i\sqrt{k/m}$, som betyr at den generelle løsningen til differensiallikningen vår er

$$u(t) = e^{0 \cdot t} \cdot (A \cdot \cos(\sqrt{k/m} \cdot t) + B \cdot \sin(\sqrt{k/m} \cdot t))\,.$$

For å bestemme den spesielle løsningen bruker vi initialbetingelsene. Vi har fått oppgitt at den deriverte til posisjonen er lik 0 når $t = 0$. Med andre ord er

$$\begin{aligned} 0 = l'(0) = u'(0) &= -\sqrt{k/m}A \cdot \sin(\sqrt{k/m} \cdot 0) + \sqrt{k/m}B \cdot \cos(\sqrt{k/m} \cdot 0) \\ &= \sqrt{k/m}B \end{aligned}$$

som betyr at $B = 0$. Videre har fått vite at $l(0) = 1$, som betyr at $u(0) = l(0) - K/k = 1 - K/k$, så

$$1 - K/k = u(0) = A \cdot \cos(\sqrt{k/m} \cdot 0) + B \cdot \sin(\sqrt{k/m} \cdot 0) = A$$

og den spesielle løsningen blir

$$u(t) = (1 - K/k) \cdot \cos(\sqrt{k/m} \cdot t)$$

og til slutt

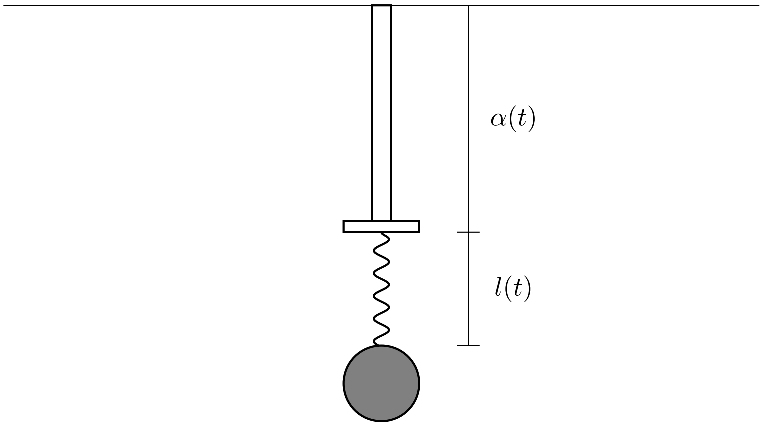
$$\begin{aligned} l(t) &= K/k + u(t) \\ &= K/k + (1 - K/k) \cdot \cos(\sqrt{k/m} \cdot t)\,. \end{aligned}$$

2.2 En ikke-homogen komplikasjon

Vi tar utgangspunkt i det samme mekaniske systemet som i avsnitt 2.1, men antar videre at konstantene $k = 1$ og $m = 1$, og at fjæren ikke er festet i taket, men i enden av et stempel som er festet i taket. Fjærfestet beveger seg med stempelet i avstand fra taket gitt ved funksjonen

$$\alpha(t) = 1 + \sin(\omega t)\,.$$

Vi innfører med andre ord en upåvirkelig oscillasjon av fjærfestet med frekvens $\omega/2\pi$. For å gjøre utregningen som følger litt enklere, skal vi anta at $\omega \neq \pm 1$.



Figur 2.2: Et legeme, en fjær, et stempel og et urørlig tak.

2.2.1 Modellering

Funksjonen $l(t)$ beskriver fremdeles lengden til fjæren, men posisjonen til legemet er nå gitt ved

$$p(t) = l(t) + \alpha(t)\,.$$

Hookes og Newtons 2. lov gir nå, som før, en 2. ordens differensiallikning

$$\begin{aligned} m \cdot p''(t) &= gm - k \cdot (l(t) - L) \\ &= gm + kL - k \cdot l(t) \\ &= K - k \cdot (p(t) - \alpha(t)) \end{aligned}$$

som vi kan skrive som

$$m \cdot p''(t) + k \cdot p(t) = K + k \cdot \alpha(t)\,,$$

eller

$$p''(t) + p(t) = K + \alpha(t)$$

siden $k = m = 1$.

Vi kan kvitte oss med konstanten K som tidligere, ved å gjøre subsitusjonen $u(t) = p(t) - K$ og få likningen

$$u''(t) + u(t) = \alpha(t) \tag{2.3}$$

men dette gjør ikke likningen homogen siden $\alpha(t)$ ikke er konstant lik 0. Dette er en type likning som vi ikke lærte å løse i MA-178, og vi ta i bruk nye metoder for å komme frem til svaret.

2.2.2 Løsning, steg 1: Bruk Laplacetransformasjonen

Vi anvender derfor Laplace-transformasjonen på begge sidene av likning (2.3), og får

$$s \cdot \mathcal{L}[u'] - u'(0) + \mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[\alpha]$$

på grunn av Teorem 1.3.1. Ved å bruke det samme teoremet en gang til blir denne likningen til slutt

$$s \cdot (s \cdot \mathcal{L}[u] - u(0)) - u'(0) + \mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[\alpha]$$

Når vi ganger ut parantesene i dette uttrykket og samler leddene får vi følgende likning:

$$\mathcal{L}[u] \cdot (s^2 + 1) = \mathcal{L}[\alpha] + s \cdot u(0) + u'(0)\,. \tag{2.4}$$

Initialbetingelsene sier fremdeles at $l(0) = 1$ og $l'(0) = 0$, så

$$\begin{aligned} u(0) &= p(0) - K \qquad (\text{Husk at } u(t) = p(t) - K) \\ &= l(0) + \alpha(0) - K \qquad (\text{Siden } p(t) = l(t) + \alpha(t)) \\ &= 1 + (1 + \sin(\omega \cdot 0)) - K \\ &= 2 - K \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} u'(0) &= p'(0) \\ &= l'(0) + \alpha'(0) \\ &= 0 + \omega \cos(\omega \cdot 0) \\ &= \omega. \end{aligned}$$

I tillegg leser vi ut i fra tabell 1.1 at

$$\mathcal{L}[\alpha] = \mathcal{L}[1 + \sin(\omega t)] = \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{1}{s} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\,.$$

Vi substituerer disse verdiene i likning (2.4) og får

$$\mathcal{L}[u] \cdot (s^2 + 1) = \frac{1}{s} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + s \cdot (2 - K) + \omega \tag{2.5}$$

Ved dividere begge sider av denne likningen med $(s^2 + 1)$ (som alltid er et positivt tall), blir likningen seende ut som

$$\mathcal{L}[u](s) = U(s) \tag{2.6}$$

der

$$\begin{aligned} U(s) = &\quad \frac{1}{s(s^2+1)} && (2.7) \\ + &\quad \omega \cdot \frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 1)} && (2.8) \\ + &\quad (2 - K) \cdot \frac{s}{(s^2 + 1)} && (2.9) \\ + &\quad \omega \cdot \frac{1}{(s^2 + 1)}\,. && (2.10) \end{aligned}$$

2.2.3 Løsning, steg 2: Finn inverstransformasjonen

Vi ønsker nå å finne den $u(t)$ som løser likningen

$$\mathcal{L}[u](s) = U(s)\,.$$

For å gjøre dette skal vi bruke tabellene 1.1-1.3. Siden Laplacetransformasjonen er lineær, holder det å gjøre denne analysen ledd for ledd i summen (2.7)-(2.10). Den siste summanden kjenner vi igjen som Laplacetransformasjonen til $\sin(t)$, multiplisert med konstanten ω. Det vil si: formel (2) i tabell 1.1 sier at når $\omega = 1$, så er

$$\mathcal{L}[\sin(t)] = \frac{1}{s^2+1}$$

og siden $\mathcal{L}$ er lineær, er

$$\mathcal{L}[\omega \cdot \sin(t)] = \omega \cdot \mathcal{L}[\sin(t)] = \omega \cdot \frac{1}{s^2+1}\,. \tag{2.11}$$

Det nest siste leddet (2.9) er også å finne i tabell 1.1: formel (3) i denne tabellen sier at når $\omega = 1$, så er

$$\mathcal{L}[\cos(t)] = \frac{s}{s^2+1}$$

og igjen siden $\mathcal{L}$ er lineær, er

$$\mathcal{L}[(2-K)\cdot \cos(t)] = (2-K)\cdot \mathcal{L}[\cos(t)] = (2-K)\cdot \frac{s}{s^2+1}\,. \tag{2.12}$$

Vi har med andre funnet Laplace-inversene til de to siste leddene (2.9) og (2.10) i funksjonen $U(s)$, og det gjenstår å finne de to første.

Men nå finner vi ikke det vi trenger i tabellene våre. Hvis vi starter med (2.7), så ser vi at nevneren i denne brøkfunksjonen er et 3. gradspolynom, og tabellene våre inneholder bare brøkfunksjoner der nevnerne er 1. og 2. gradspolynomer. Løsningen på denne floken er å anvende delbrøksoppspaltning. Vi ser at nevneren i (2.7) har faktorer s og s^2+1 som begge to er irredusible polynomer. Vi søker derfor en oppspalting

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

der A, B, C er konstante koeffisienter. Nå går vi frem som vi gjorde i MA-178 og skriver høyresiden av likningen på felles brøkstrek. Dette gir

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+1)}\,.$$

For at dette skal være en likhet av funksjoner, må tellerne i brøkene være like for alle s. Så

$$1 = (A+B)s^2 + Cs + A$$

som betyr at

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ C &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

som betyr at $A = 1$, $B = -1$ og $C = 0$. Vi kan altså skrive (2.7) som

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \,. \tag{2.13}$$

Fordelen med dette er at disse to funksjonene er å finne i tabell 1.1. Det siste leddet å gjenkjenne i $U(s)$ er (2.8). Også her bruker delbrøksoppspalting, og ønsker å skrive

$$\frac{1}{(s^2+\omega^2)(s^2+1)} = \frac{A+Bs}{s^2+\omega^2} + \frac{C+Ds}{s^2+1} \,.$$

Vi går frem som i det forrige tilfellet, og får liknigen

$$1 = (B+D)s^3 + (A+C)s^2 + (B+\omega^2\cdot D)s + A + \omega^2 \cdot C \,,$$

som gir et system av lineære likninger med ukjente A, B, C, D som har utvidet matrise

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & \omega^2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2-1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2-1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (\omega^2-1)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -(\omega^2-1)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (\omega^2-1)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] .$$

På dette tidspunktet bemerker vi at siden vi antok at $\omega \neq \pm 1$, så er $\omega^2 - 1 \neq 0$. Dette er viktig i utregningen over siden dette tallet forekommer i nevneren til brøkene i svaret. Så derfor er $B = D = 0$ og $-A = C = 1/(\omega^2 - 1)$ og (2.8) kan skrives om til:

$$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+1)} = -\frac{\omega}{(\omega^2-1)}\frac{1}{(s^2+\omega^2)} + \frac{\omega}{(\omega^2-1)}\frac{1}{(s^2+1)} \,. \tag{2.14}$$

Alle leddene i summen (2.7)-(2.10) er nå skrevet på en form som vi finner igjen i tabell 1.1, og vi er endelig klare til å løse likningen (2.6) og finne løsningen $u(t)$.

$$
\begin{aligned}
U(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \\
&+ \frac{-\omega}{(\omega^2-1)} \cdot \frac{1}{(s^2+\omega^2)} + \frac{\omega}{(\omega^2-1)} \cdot \frac{1}{(s^2+1)} \\
&+ (2-K) \cdot \frac{s}{s^2+1} \\
&+ \omega \cdot \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

og dersom vi samler like ledd, får vi

$$
\begin{aligned}
U(s) &= \frac{1}{s} \\
&+ \frac{\omega^3}{(\omega^2-1)} \cdot \frac{1}{s^2+1} \\
&+ \frac{-1}{(\omega^2-1)} \cdot \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)} \\
&+ (1-K) \cdot \frac{s}{s^2+1}\,.
\end{aligned}
$$

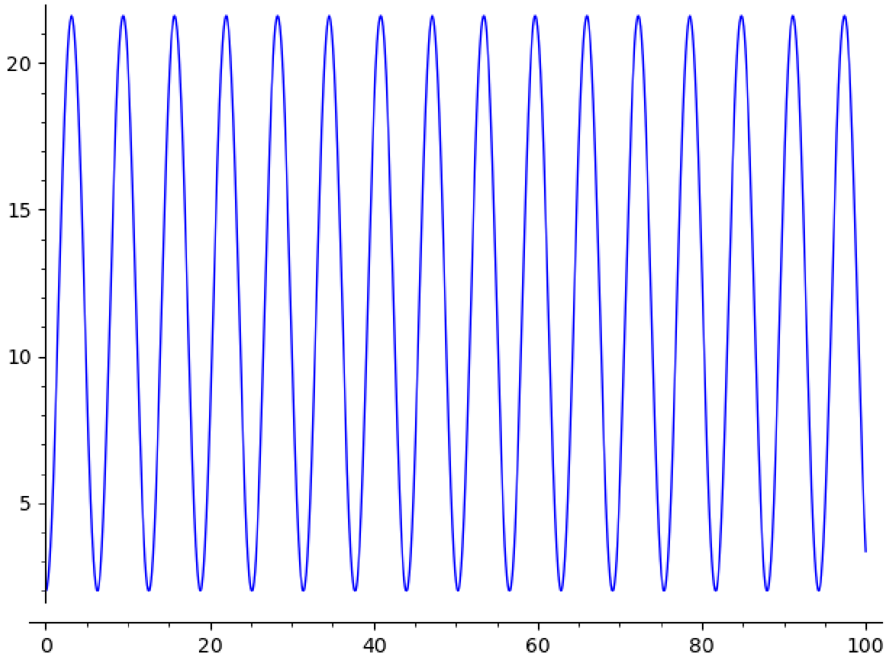
Ved å bruke tabell 1.1, finner vi at

$$
\begin{aligned}
u(t) &= 1 \\
&+ \frac{\omega^3}{(\omega^2-1)} \cdot \sin(t) \\
&- \frac{1}{(\omega^2-1)} \cdot \sin(\omega t) \\
&+ (1-K) \cdot \cos(t)\,.
\end{aligned}
$$

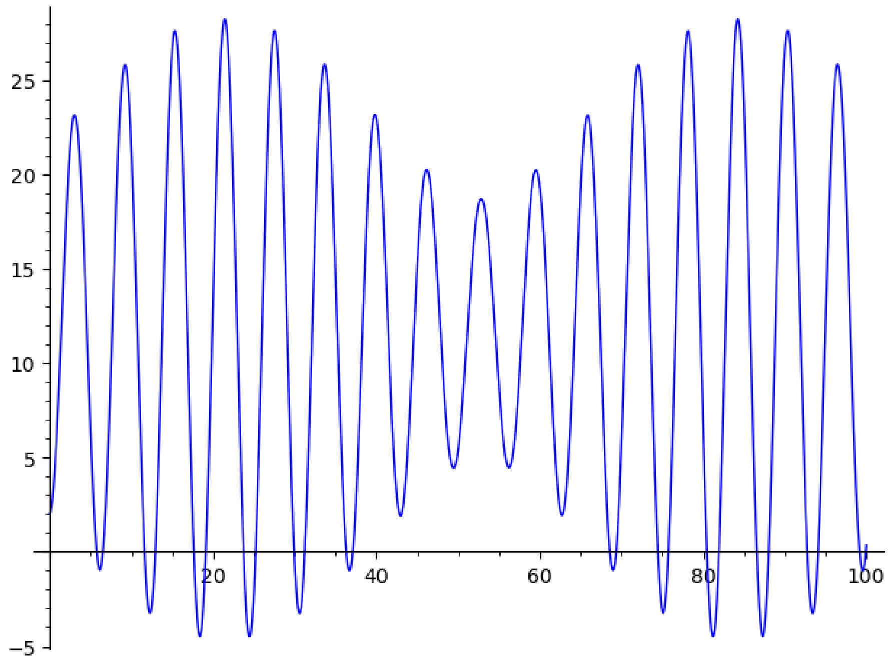
Siden $k = m = 1$, blir $K = g + L$ og siden $u(t) = p(t) - K$, er

$$
\begin{aligned}
p(t) &= 1 + g + L \\
&+ \frac{\omega^3}{(\omega^2-1)} \cdot \sin(t) \\
&- \frac{1}{(\omega^2-1)} \cdot \sin(\omega t) \\
&+ (1-g-L) \cdot \cos(t)\,.
\end{aligned}
$$

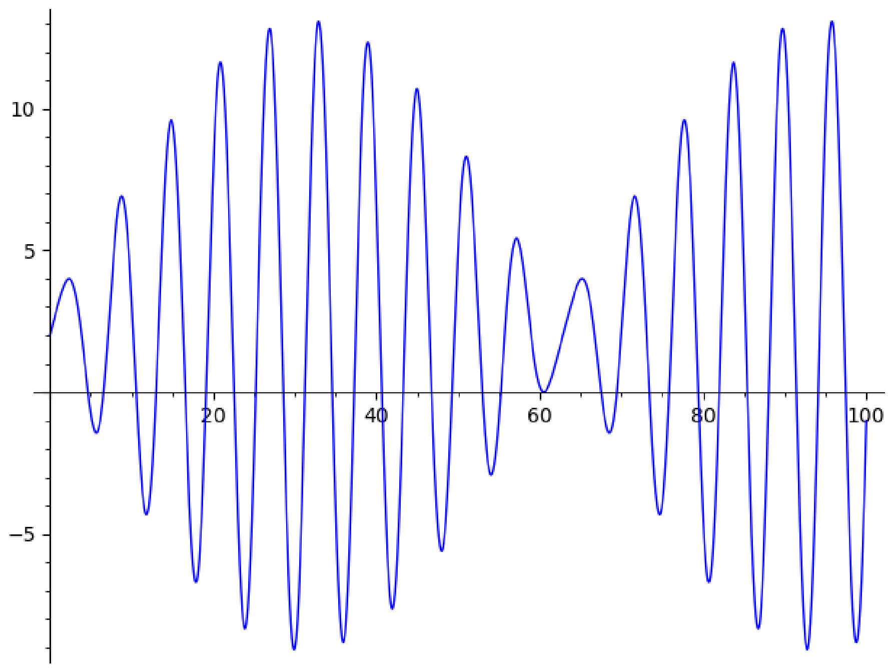
Figurene under viser løsningen under forskjellige valg av parameteren ω, med og uten gravitasjonskrefter.



Figur 2.3: $L = 1$, $g = 9{,}8$ og $\omega = 0$ (ingen stempeloscillasjon)



Figur 2.4: $L = 1$, $g = 9{,}8$ og $\omega = 1, 1$



Figur 2.5: $L = 1$, $g = 0,0$ (vektløst) og $\omega = 1,1$

2.3 Systemer av ikke-homogene differensiallikninger

La $\mathbf{y}(t)$ være en vektor av funksjoner, det vil si

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix},$$

der $y_i(t)$ er en reell funksjon av t for $i = 1, 2, \ldots, n$. Vi definerer Laplacetransformasjonen til $\mathbf{y}(t)$ komponentvis, det vil si

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](s) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[y_1](s) \\ \mathcal{L}[y_2](s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}[y_n](s) \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

Vi krever derfor at hver $y_i(t)$ er en stykkevis kontinuerlig, eksponensielt dominert funksjon for at Laplacetransformasjonen skal eksistere.

La A være en $m \times n$-matrise med reelle koeffisienter. Da er $A \cdot \mathbf{y}$ en n-vektor der hver koeffisient er en lineærkombinasjon av funksjonene $y_i(t)$. Siden Laplace-transformasjonen er lineær, følger det at vi kan bytte om rekkefølgen vi gjør Laplacetransformasjon og lineærkombinasjon, og vi får at:

$$\mathcal{L}[A \cdot \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[A_{11}y_1 + \ldots + A_{1n}y_n] \\ \mathcal{L}[A_{21}y_1 + \ldots + A_{2n}y_n] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[A_{m1}y_1 + \ldots + A_{mn}y_n] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}\mathcal{L}[y_1] + \ldots + A_{1n}\mathcal{L}[y_n] \\ A_{21}\mathcal{L}[y_1] + \ldots + A_{2n}\mathcal{L}[y_n] \\ \vdots \\ A_{m1}\mathcal{L}[y_1] + \ldots + A_{mn}\mathcal{L}[y_n] \end{bmatrix} = A \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}]$$

Ved å bruke Teorem 1.3.1 og 1.3.2 på vektorer, får vi videre at:

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}'](s) = s \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](s) - \mathbf{y}(0) \tag{2.16}$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t \mathbf{y}(u)\ du](s) = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](s)]\,. \tag{2.17}$$

Vi kan bruke dette til å løse systemer av differensiallikninger.

2.3.1 Et inhomogent differensialikningssystem

Vi har fått oppgitt følgende system av differensiallikninger:

$$y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) + e^{3t} \tag{2.18}$$

$$y_2'(t) = y_2(t) - t \tag{2.19}$$

med tilhørende initialbetingelser

$$y_1(0) = 1 \tag{2.20}$$

$$y_2(0) = 2 \tag{2.21}$$

Vi ønsker å finne funksjoner $y_1(t)$ og $y_2(t)$ som tilfredsstiller disse likningene.

Vi starter med å skrive problemet på matriseform. Dersom

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -t \end{bmatrix}\,,$$

kan vi uttrykke (2.19)-(2.21) som matriselikningen

$$\mathbf{y}'(t) = A \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) \tag{2.22}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -t \end{bmatrix}\,, \tag{2.23}$$

og initialbetingelsen

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\,.$$

Vi anvender nå Laplacetransformasjonen på differensiallikningen (2.22), og får ved (2.15) og (2.16) likningen:

$$s \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](s) - \mathbf{y}(\mathbf{0}) = A \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](s) + \mathcal{L}[\mathbf{g}](s)$$

På dette tidspunktet er formlene våre blitt litt vanskelig å lese, så vi forenkler situasjonen ved å gi de involverte funksjonene nye navn. Vi skriver:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{y}](s)$$
$$\mathbf{G}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{g}](s)$$

Likningen vår ser nå slik ut:

$$s \cdot \mathbf{Y}(s) - \mathbf{y}(\mathbf{0}) = A \cdot \mathbf{Y}(s) + \mathbf{G}(s) \tag{2.24}$$

som vi kan ordne slik:

$$s \cdot \mathbf{Y}(s) - A \cdot \mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) + \mathbf{y}(\mathbf{0}) \tag{2.25}$$

Merk at dette er en likning der den deriverte til $\mathbf{y}$ ikke lenger inngår. Vi har med andre ord transformert vår differensiallikning til å bli en ren algebraisk likning som har én ukjent funksjon: $\mathbf{Y}$.

Venstresiden av likningen over kan skrives om slik[1]:

$$s\mathbf{Y} - A \cdot \mathbf{Y} = (s \cdot I_2 - A) \cdot \mathbf{Y}\,.$$

Her er I_2 identitetsmatrisen med 2 rader og 2 søyler. Med de verdiene oppgaven oppgir blir

$$(s \cdot I_2 - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix},$$

og ved å bruke tabell 1.1 blir høyresiden av likning (2.25) lik

$$\mathbf{G}(s) + \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} (s-3)^{-1} \\ -s^{-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{for alle } s > 3$$

Når vi slår alt dette sammen, ser likningen (2.25) slik ut:

$$\begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} 1 + (s-3)^{-1} \\ 2 - s^{-2} \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Matrisen på venstre side av denne likningen er invertibel så lenge determinanten

$$\det(s \cdot I_2 - A) = (s-1)^2 \neq 0\,.$$

Dette er sikret siden $s > 3$ som følge av at vi Laplacetransformerte $\mathbf{g}(t)$. Det vil si at $sI_2 - A$ er en invertibel matrise med invers lik:

$$(sI_2 - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

Vi bruker nå inversen til å løse (2.26) med hensyn på $\mathbf{Y}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + (s-3)^{-1} \\ 2 - s^{-2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2(s-1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + (s-3)^{-1} \\ 2 - s^{-2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(s-1)} \begin{bmatrix} 1 + (s-3)^{-1} + 4(s-1)^{-1} - 2s^{-2}(s-1)^{-1} \\ 2 - s^{-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)(s-3)} + \frac{4}{(s-1)^2} - \frac{2}{s^2(s-1)^2} \\ \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s^2(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

[1] Sjekk at dette stemmer ved å regne ut matriseproduktet på begge sider og se at de er like.

Vi bruker nå delbrøksoppspalting for å skrive om $Y_1(s)$ og $Y_s(2)$.

2.3.2 $Y_1(s)$ først

Vi bryter opp først opp brøken

$$\frac{1}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} = \frac{As - 3A + Bs - B}{(s-1)(s-3)}$$

som, ved å sammenligne tellerne i de to brøkene, gir gir likhetene $A + B = 0$ og $-3A - B = 1$. Disse har løsninger $A = -1/2$ og $B = 1/2$. Altså er

$$\frac{1}{(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-3)}\,. \tag{2.27}$$

Til slutt

$$\begin{aligned}\frac{2}{s^2(s-1)^2} &= \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s} \\ &= \frac{As^2 + Bs^2(s-1) + C(s-1)^2 + Ds(s-1)^2}{s^2(s-1)^2}\,.\end{aligned}$$

Tellerne i de to brøkfunsjonene skal være like for alle s, så dersom vi setter $s = 1$, $s = 0$, $s = 2$ og $s = -1$ får vi de fire likningene

$$\begin{aligned}A &= 2 \\ C &= 2 \\ 4A + 4B + C + 2D &= 2 \\ A - 2B + 4C - 4D &= 2\end{aligned}$$

Den utvidede matrisen til dette likningssystemet er

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Så $A = C = 2$, $B = -4$ og $D = 4$, og

$$\frac{2}{s^2(s-1)^2} = \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{4}{s-1} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s}\,. \tag{2.28}$$

2.3.3 $Y_2(s)$ til slutt

Igjen bruker vi delbrøksoppspalting til å skrive

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2(s-1)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} \\ &= \frac{As(s-1) + B(s-1) + Cs^2}{s^2(s-1)} \,.\end{aligned}$$

Tellerne i disse to funksjonene skal være like for alle s, så ved å sette $s = 0$, $s = 1$ og $s = -1$ får vi likningessystemet

$$\begin{aligned}B &= -1 \\ C &= 1 \\ 2A &= -2\end{aligned}$$

Som betyr at

$$\frac{1}{s^2(s-1)} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \,. \tag{2.29}$$

2.3.4 Løsningen

Ved hjelp av (2.27) og (2.28) kan vi nå skrive

$$\begin{aligned}Y_1(s) &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-3)} + \frac{4}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{4}{s-1} - \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} \\ &= \frac{9}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-3)} + \frac{2}{(s-1)^2} - \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s}\end{aligned}$$

og ved (2.29) får vi at

$$\begin{aligned}Y_2(s) &= \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1} \\ &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \,.\end{aligned}$$

Som vi husker ønsker vi finne funksjonene $y_i(t)$ slik at $\mathcal{L}[y_i(t)] = Y_i(s)$ for $i = 1, 2$. Dette kan vi nå lese ut i fra tabell 1.1:

$$y_1(t) = \frac{9}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} + 2te^t - 2t - 4$$

og

$$y_2(t) = e^t + 1 + t \,.$$

Bibliografi

[1] Robert Adams and Christopher Essex, *Calculus*: *A complete course*, 10th ed., Addison Wesley, 2021.

[2] Walter A. Strauss, *Partial differential equations: An introduction*, 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc., 2007.

[3] Kohler Werner and Lee W. Johnson, *Elementary differential equations with boundary value problems*, 2nd ed., Pearson Education Limited, 2013.