MA-222. UKE 34: ROMGEOMETRI I

SVERRE LUNØE–NIELSEN

Innhold

1. Innledning

Vi dekker kapittel 10.1-4 i [1] hvor vi skal snakke om metoder for å beskrive romlige legemer ved hjelp av algebra. Koblingen mellom geometri og algebra gjør oss i stand til å modellere geometriske former i det fysiske rommet matematisk.

Dette er forelesningsnotater og erstatter ikke læreboken.

2. Grunnleggende definisjoner

Vår geometri bygger på definisjonen av den *reelle tallinjen* $\mathbb{R}$.

- Det **Kartesiske rommet** er mengden $\mathbb{E}^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- Et element $P \in \mathbb{E}^3$ kalles et **punkt**. Komponentene x, y, z omtales også som punktets *koordinater*.
- Et **plan** er alle punkter (x, y, z) som oppfyller en lineær likning på formen

  $$ax + by + cz = d$$

  der $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ er reelle konstanter der a, b, c ikke alle er null.
- En **linje** defineres som snittet, som mengder, av ulike plan som har minst ett punkt til felles.

Vi vet fra **ma-179** at løsningene til et system av to lineære likninger med tre ukjente

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{2}$$

enten har 0 eller uendelig mange løsninger. Hvis vi antar at snittet mellom planene er en linje, betyr dette at antall frie variable lik 1.

Date: 16. november 2023.

La $P = (x_1, y_1, z_1)$ og $Q = (x_2, y_2, z_2)$ være to forskjellige punkter som løser likningssystemet over. Da er det lett å sjekke at punktet

$$\begin{aligned} t \cdot P + (1-t) \cdot Q = (&t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2, \\ &t \cdot y_1 + (1-t) \cdot y_2, \\ &t \cdot z_1 + (1-t) \cdot z_2) \end{aligned}$$

også løser likningssystemet, for alle $t \in \mathbb{R}$. Siden antall frie variable er lik 1, er dette også alle løsningene til systemet.

Dette gjør at vi kan snakke om *linjen gjennom to punkter*:

- La $P = (x_1, y_1, z_1)$ og $Q = (x_2, y_2, z_2)$ være to forskjellige punkter i rommet. Mengden av punkter på formen

$$t \cdot P + (1-t) \cdot Q \tag{3}$$

  der $t \in \mathbb{R}$, er en linje som inneholder punktene P og Q. Denne linjen er unik: det finnes ingen andre linjer som inneholder P og Q.
- Dersom vi begrenser den frie variabelen til intervallet $t \in [0, 1]$, utgjør mengden med punkter på formen (3) det vi kaller **linjestykket** mellom P og Q.
- Dersom vi begrenser den frie variabelen til intervallet $t \in [0, \infty)$, utgjør mengden med punkter på formen (3) det vi kaller **strålen** fra P mot Q.

2.1. **Likningsystemer.** Vi kan også definere våre geometriske byggeklosser ved hjelp av likninger i en mer konsistent form:

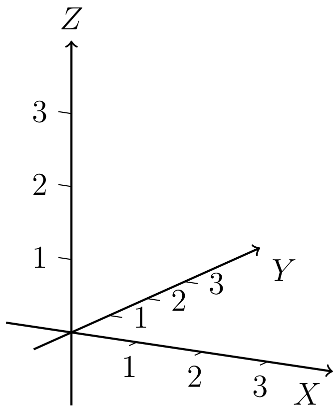
- Dimensjon 3: **Hele rommet** er løsningsmengden til systemet med 0 antall lineære likninger med tre ukjente. Et slikt (tomt) system har tre frie variable.
- Dimensjon 2: Et **plan** er løsningsmengden til et system med én lineær likning med tre ukjente og to frie variable.
- Dimensjon 1: En **linje** er løsningsmengden til et system med to lineære likninger med tre ukjente og én fri variabel.
- Dimensjon 0: Et **punkt** er løsningsmengden til et system med tre lineære likninger med tre ukjente og ingen frie variable.

Med andre ord: Hele rommet er snittet av ingen plan. Et plan er seg selv. En linje er snittet av to plan. Et punkt er snittet av tre plan.

2.2. **Analytisk romgeometri: Kort historikk.** Vi tenker på det fysiske rommet vi lever i som et kontinuum hvor det gir intuitiv mening å snakke om *punkter*, *rette linjer* og *vinkler* mellom linjer som har minst ett punkt til felles. Dette er med stor sannsynlighet de samme mentale bildene som lå til grunn for Euklids (ca. 300 år fvt.) aksiomatisering av plangeomtri.

Ved å følge idéer med opphav hos Descartes (1596-1650) velger vi tre[1] *perpendikulære* akser som så brukes som et kart til å navngi alle punkter i rommet: Dersom p er et punkt, er de kartesiske *koordinatene* til p de tre forholdene mellom p sin projeksjon ned på hver av de tre aksene, sammenlignet med enhetsmålestokken på hver akse. Dette knytter algebra til geometri fordi posisjoner av punkter, lengder og areal blir knyttet til en felles målestokk. Denne formen for geometri kalles *analytisk*, og ble grunnlaget for oppfinnelsen av Newton og Leibniz' inifitesimalkalkulus noen år senere.

[1]Descartes (og omtrent samtidig Fermat) brukte ikke visstnok ikke tre akser i sine opprinnelige arbeider, men én akse eller målestokk. Innføringen av tre akser kom senere, i følge `https://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system`.



FIGUR 1. Tre perpendikulære akser i et kartesisk rom.

I moderne språk identifiserer vi hver koordinatakse med den *reelle talllinjen* $\mathbb{R}$ og får derfor at koordinatene til et punkt i rommet er et trippel av reelle tall (x, y, z). Valg av bokstaver for navngi de tre koordinatene stammer fra Descartes selv, og det er vanlig å kalle selve aksene med de samme bokstavene: X, Y og Z-aksen.

David Hilbert moderniserte Euklids geometri i 1899, da han bygget Euklids aksiomatiske geometri opp på nytt, basert på teorien om mengdelære. Vårt kartesiske rom er en 3-dimensjonal generalisering av det *reelle Kartesiske planet* som oppfyller Hilberts aksiomer for plangeometri.

Alt dette er forklart ganske grundig i Hartshornes bok [2].

2.3. **Eksempler.** Vi avslutter dette avsnittet med noen eksempler, før vi i neste avsnitt snakker om avstandsmåling i rommet.

Eksempel 1 Planet gitt ved likningen

$$z = 0$$

består av alle punkter $(x, y, 0)$ der x og y individuelt kan anta alle verdier i $\mathbb{R}$. Planet inneholder origo, $(0, 0, 0)$, og kalles XY-planet. Tilsvarende definerer vi XZ-planet ved likningen $y = 0$, og YZ-planet ved $x = 0$.

Eksempel 2 Gitt planene

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ x + y + z &= 1\,. \end{aligned}$$

Det første planet består av alle punkter $(x, y, 0)$ der x og y kan variere fritt. Dersom vi ønsker å finne ut hva slags linje disse to planene definerer som deres snitt, må vi undersøke løsningsmengdene til begge to og finne ut hvilke punkter som løser begge likningene på likt. Dersom (x, y, z) er et punkt som oppfyller begge likningene på likt, vil derfor for det første $z = 0$ og for det andre $x + y + 0 = 1$. Med andre ord er linjen i snittet lik linjen som oppfyller $y = 1 - x$ og $z = 0$, altså linjen i XY-planet med stigningstall -1 som inneholder punktet $(0, 1, 0)$.

Eksempel 3 La planet W være gitt ved likningen

$$2x + y - z = 1\,.$$

For å få et inntrykk av hvordan dette planet ligger i forhold til koordinataksene i rommet, kan finne linjene som dannes ved å snitte det med de forskjellige akseplanene. Vi får da linjene

$$\begin{aligned} x = 0 \;&\Rightarrow\; y - z = 1 \\ y = 0 \;&\Rightarrow\; 2x - z = 1 \\ z = 0 \;&\Rightarrow\; 2x + y = 1\,. \end{aligned}$$

Ved å tegne disse linjene "ser" vi lettere planet som de alle tre linjene er inneholdt i.

Eksempel 4 La P være punktet med koordinater $(1, 1, 1)$ og la L være linjen i XZ-planet gitt ved likningen $3x - z = 0$. Vi ønsker å finne planet som inneholder både punktet P og linjen L. Vi leter med andre ord etter reelle konstanter a, b, c, d slik at likningen

$$ax + by + cz = d$$

gir oss likningen til linjen L dersom vi begrenser oss til XZ-planet, dvs. setter $y = 0$. Dette betyr at $a = 3$, $c = -1$ og $d = 0$. For å finne den siste koeffesienten b, bruker vi at $(1, 1, 1)$ også må være en løsning av likningen. Vi setter inn og får

$$3 \cdot 1 + b \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

eller $2 + b = 0$ som betyr at $b = -2$. Altså er likningen for planet lik

$$3x - 2y - z = 0\,.$$

Eksempel 5 Kube med sidelengde $2r$ sentrert i (x_0, y_0, z_0).

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\le r \\ |y - y_0| &\le r \\ |z - z_0| &\le r \end{aligned}$$

eventuelt

$$\begin{aligned} -r \le x - x_0 &\le r \\ -r \le y - y_0 &\le r \\ -r \le z - z_0 &\le r \end{aligned}$$

Eksempel 6 En "kvart pyramide"

$$\begin{aligned} x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ z &\ge 0 \\ x + y + z &\le 1\,. \end{aligned}$$

Det vil også være mulig å beskrive dette romlegemet som området begrenset av de tre akseplanene og planet

$$x + y + z = 1\,.$$

3. Avstand mellom punkter

Sentralt i klassisk geometri er idéen om å kunne sammenligne geometriske objekter. Euklid så antagelig for seg at to linjestykker var "like" dersom man kunne skyve, rotere og speile det ene linjestykket slik at det overlappet med det andre [2, s.31-33]. Siden vi ønsker å reservere ordet "likhet" for objekter som er identiske som undermengder, bruker vi gjerne ordet "kongruente" når vi sammenligner på denne måten.

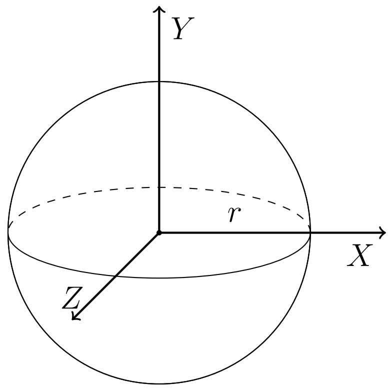
I analytisk geometri kan kongruens uttrykkes ved hjelp av såkalt Euklidsk avstand: Dersom P_1 og P_2 er to punkter med koordinater henholdsvis (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2), er den Euklidske avstanden mellom dem definert som det reelle tallet

$$||P_1P_2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,. \tag{4}$$

To linjestykker er definert til å være kongruente dersom avstanden mellom endepunktene i det ene linjestykket er lik avstanden mellom endepunktene i det andre.[2]

Eksempel 7 La $r > 0$. Kulen med radius r sentrert i punktet (x_0, y_0, z_0) er mengden av alle punkter (x, y, z) som løser likningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$$



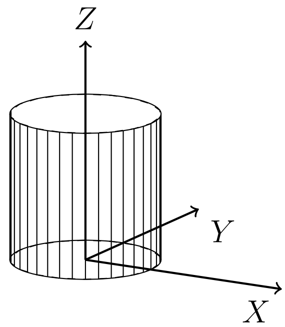
Figur 2. En kule med senter $(0, 0, 0)$ og radius r.

Eksempel 8 Sylinder.

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$
$$z \geq 0$$
$$z \leq 1$$

---

[2] I antikken ble Pytagoras' setning formulert ved hjelp av arealer til kvadrater med sidekanter lik sidekanter i en rettviklet trekant. I analytisk geometri formulerer vi arealet til et kvadrat med sidelengde a som det reelle tallet a^2. Dersom lengden av et linjestykke AB som ligger på en av de kartesiske aksene er absoluttverdien $|B - A|$, og lengder samtidig skal være uendret under translasjon, så forteller Pytagoras' setning at lengden på et vilkårlig linjestykke må være gitt nettopp ved formelen (4). Vi kan si at Pytagoras' setning tvinger definisjonen av lengde til å være gitt ved denne formelen når bygger vår geometri med utgangspunkt i den reelle tallinjen.



Eksempel 9 Sylinder med “skjevt tak”.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ z &\geq 0 \\ x + y + z &\leq 2 \end{aligned}$$

Eksempel 10 La linjen L være snittet av XY-planet og planet definert med

$$2x + y = 0\,.$$

Dersom vi ønsker å finne linjen i XY-planet som inneholder punktet $(0, 0, 0)$ og som er perpendikulær på L kan vi bruke *kosinussetningen* for trekanter: Dersom ABC er en trekant vil

$$||BC||^2 = ||AB||^2 + ||AC||^2 - 2 \cdot ||AB|| \cdot ||AC|| \cdot \cos(\angle A)\,. \tag{5}$$

Formelen sier spesielt at vinkelen $\angle A$ er rett (90 grader) dersom Pytagoras’ formel gjelder for trekanten:

$$||BC||^2 = ||AB||^2 + ||AC||^2\,.$$

Punktet $(1, -2, 0)$ ligger på linjen L. La s være et ukjent reellt tall og se på linjen i XY-planet definert ved $sx + y = 0$. Denne linjen inneholder $(0, 0, 0)$ og punktet $(1, -s, 0)$. Dersom vi ser på trekanten med hjørner $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, -2, 0)$ og $C = (1, -s, 0)$ vil vinkelen $\angle A$ være rett hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} (1-1)^2 + (-2-(-s))^2 &= (1-0)^2 + (-2-0)^2 + (1-0)^2 + (-s-0)^2 \\ 4 - 4s + s^2 &= 1 + 4 + 1 + s^2 = 6 + s^2 \\ -4s &= 2 \;\Rightarrow\; s = -1/2\,. \end{aligned}$$

Linjen som ligger i XY-planet, inneholder $(0, 0, 0)$ og som er perpendikulær på linjen L er derfor gitt ved likningen

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ -\frac{1}{2}x + y &= 0 \;\Leftrightarrow\; -x + 2y = 0\,. \end{aligned}$$

4. Vektorer i rommet

I kurset **ma-179** ble vi introdusert for *vektorrommet* av vektorer med 3 komponenter:

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\} .$$

At $\mathbb{R}^3$ er et vektorrom betyr at mengden har en viss algebraisk struktur ut over å være kun en mengde: det finnes en måte å legge sammen vektorer på, og vi kan skalere en vektor med vilkårlige reelle skalarer. Disse operasjonene er definert som følger for $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

$$c \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix} .$$

Vi oppsummerer de viktigste regnereglene her, hvor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ er vektorer i $\mathbb{R}^3$, og $r, s \in \mathbb{R}$ er reelle skalarer.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \tag{6}$$

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \tag{7}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \tag{8}$$

$$0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{9}$$

$$(r + s) \cdot \mathbf{u} = r \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{u} \tag{10}$$

$$r \cdot (s \cdot \mathbf{u}) = (rs) \cdot \mathbf{u} \tag{11}$$

$$r \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v} \tag{12}$$

4.1. Vektorer og analytisk romgeometri.

La P_1 og P_2 være to punkter i rommet med koordinater henholdsvis (x_1, y_1, z_1) og (x_2, y_2, z_2), og dann vektoren

$$\mathbf{P_1 P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} .$$

Vi tenker på denne vektoren som en pil som starter i P_1 og som ender i P_2 fordi elementene i vektoren forteller oss hvor mange enheter vi må endre hver koordinat i P_1 for å ende opp med P_2.

Denne endringen er uforandret om vi parallellforskyver P_1 og P_2, og vi illustrerer derfor vanligvis vektorer i $\mathbb{R}^3$ som piler som starter i origo $(0, 0, 0)$.

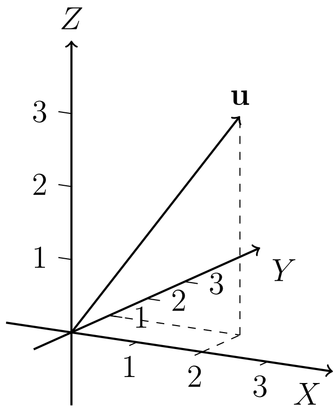
Dersom $P = (x, y, z)$ er et punkt i rommet og $\mathbf{u} = [a\ b\ c]^T$ en vektor, skriver vi $P + \mathbf{u}$ for punktet vi får ved å parallellforskyve P med vektoren $\mathbf{u}$. Dette punktet har koordinater

$$(x + a, y + b, z + c) .$$

4.2. Skalarproduktet.

I tillegg til regnereglene for vektorer finnes et *skalarprodukt* som er en funksjon som tar to vektorer og produserer et reelt tall, og er gitt med formelen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 . \tag{13}$$



FIGUR 3. En vektor i et kartesisk rom.

Skalarproduktet oppfyller regnereglene

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\\ \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\\ \mathbf{u}\cdot(r\cdot\mathbf{v}) &= (r\cdot\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = r\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\end{aligned}$$

og går også under navnet *prikkprodukt* eller *indreprodukt*.

Skalarproduktet av $\mathbf{P_1P_2}$ med seg selv er

$$\mathbf{P_1P_2}\cdot\mathbf{P_1P_2} = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

som vi gjenkjenner som kvadratet av den euklidske avstanden (4) mellom endepunktene i linjestykket P_1P_2. Vi definerer derfor *lengden* til enhver vektor $\mathbf{u}$ som

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\,.$$

På denne måten får vektoren $\mathbf{P_1P_2}$ den samme lengden som lengden til linjestykket mellom punktene P_1 og P_2.

Skalarproduktet bærer også med seg detaljert informasjon om vinkelen mellom de to vektorene som multipliseres. Dersom vi ser på lengden av vektoren[3] $\mathbf{z}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$, og bruker regnereglene for prikkproduktet, får vi

$$\begin{aligned}||\mathbf{z}||^2 &= \mathbf{z}\cdot\mathbf{z}\\ &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\\ &= ||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2-2\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\end{aligned}$$

På den annen side bestemmer de to vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ en trekant i rommet med hjørner O, $O+\mathbf{u}$ og $O+\mathbf{v}$ som vi kan tyde via kosinussetningen (5):

$$||\mathbf{z}||^2 = ||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2-2\cdot||\mathbf{u}||\cdot||\mathbf{v}||\cdot\cos(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}))\,.$$

Ved å sammenligne de to forskjellige utregningene, får vi en viktig geometrisk versjon av skalarproduktet:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\cdot||\mathbf{v}||\cdot\cos(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}))\,. \tag{14}$$

((Kommentér fortegnet i denne likningen.))

[3]Her mener vi egentlig $\mathbf{u}+(-1)\cdot\mathbf{v}$, men det er vanlig å uttrykke dette som en differans slik slik vi har gjort i teksten.

Vi kan også si at kosinussetningen er den geometriske motsatsen til skalarproduktet. Akkurat som vi konkluderte med at en trekant er rettvinklet dersom Pytagoras' likning er sann for lengdene av trekantens sidekanter, kan vi bruke formelen over til å si at to vektorer med positive lengder er perpendikulære hvis og bare hvis skalarproduktet er null:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \cos(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = 0 \iff \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \pm\pi/2\,. \tag{15}$$

Referanser

[1] Robert Adams and Christopher Essex, *Calculus*: *A complete course*, 10th ed., Addison Wesley, 2021.
[2] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, 2002.

Institutt for ingeniørvitenskap, Universitetet i Agder
Email address: `sverreal@uia.no`
URL: `https://home.uia.no/sverreal`